

Zweitveröffentlichung/ Secondary Publication



Staats- und
Universitätsbibliothek
Bremen

<https://media.suub.uni-bremen.de>

Carmesin, Hans-Otto

Einstein in der Schule – Teil 1 – Unterrichtskonzepte zur allgemeinen Relativitätstheorie

Journal Article as: published version (Version of Record)

DOI of this document* (secondary publication): <https://doi.org/10.26092/elib/2657>

Publication date of this document: 09/01/2024

* for better findability or for reliable citation

Recommended Citation (primary publication/Version of Record) incl. DOI:

Please note that the version of this document may differ from the final published version (Version of Record/primary publication) in terms of copy-editing, pagination, publication date and DOI. Please cite the version that you actually used. Before citing, you are also advised to check the publisher's website for any subsequent corrections or retractions (see also <https://retractionwatch.com/>).

This document is made available with all rights reserved.

Take down policy

If you believe that this document or any material on this site infringes copyright, please contact publizieren@suub.uni-bremen.de with full details and we will remove access to the material.

Einstein in der Schule (Teil 1)

Unterrichtskonzepte zur allgemeinen Relativitätstheorie

von Hans-Otto Carmesin

Die allgemeine Relativitätstheorie, ART, ist grundlegend für das Denken von Raum und Zeit ([10], [29]) und daher für viele Schülerinnen und Schüler interessant. Hier zeige ich, wie Lernende ein Astrofoto aufnehmen, daran die relativistische Lichtablenkung messen und, ausgehend von ihren Basiskonzepten, wesentliche Konzepte der ART entwickeln. Dazu berichte ich über Erfahrungen in den Klassenstufen 5–12. Auch präsentiere ich Material, das für Unterricht in Astronomie, Physik und Mathematik geeignet ist.

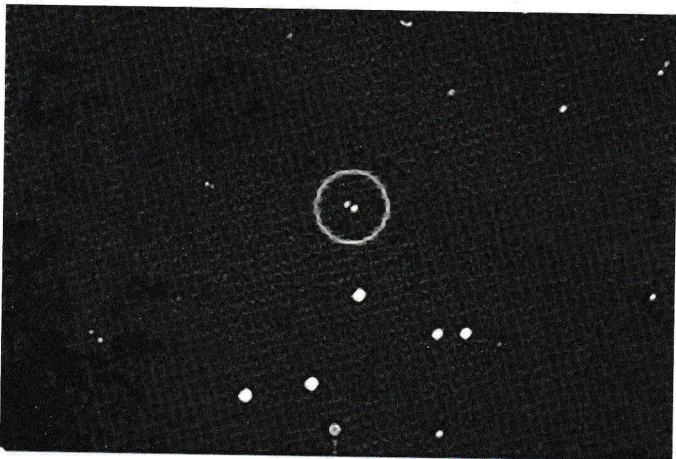
1 Einleitung

Die Schwerkraft ist allgegenwärtig. Aber erst im Jahr 1686 formulierte Newton eine auch für den Mond und die Planeten brauchbare Regel, das Newton'sche Gravitationsgesetz [15]. Bereits im Jahr 1784 folgerte John Mitchell daraus, dass selbst Licht der Schwerkraft unterliegt und sogar von einem Stern mit sehr kleinem Radius, also hoher Dichte, am Entweichen gehindert wird [8]. Der Radius, ab dem das passiert, heißt heute Schwarzschildradius. Die Auswirkung

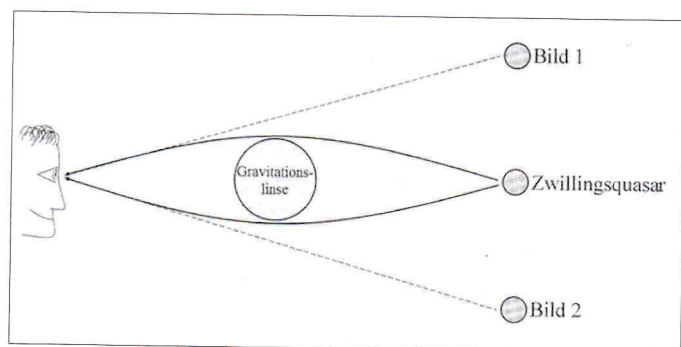
der Schwerkraft auf das Licht können Schülerinnen und Schüler selbst entdecken, indem sie beispielsweise den Galaxienkern 0957 +561 fotografieren (Bild 1). Dieser Galaxienkern erscheint im Foto in Form von zwei Punkten und wird daher Zwillingquasar 0957 +561 genannt. Das deutet man dadurch, dass das Licht auf zwei Wegen in das Auge des Betrachters gelangt, wobei diese Wege durch die Schwerkraft einer Masse entstehen (Bild 2). Diese sammelt das Licht beim Betrachter, ähnlich wie eine Sammellinse, daher nennt man die

Masse auch eine Gravitationslinse. Man verwendet Licht als Maßstab für Geradlinigkeit und deutet entsprechend den Lichtweg in Bild 2 durch eine Raumzeitkrümmung, die von der Masse verursacht wird. Diese Deutung hat den zusätzlichen Vorteil, dass man mit ihr den Lichtweg berechnen oder durch Computerexperimente ermitteln kann. Solche Berechnungen sind Gegenstand der sogenannten allgemeinen Relativitätstheorie, die Einstein 1915 formulierte [7]. Hier ist die Krümmung der Raumzeit in der Nähe einer Masse wichtig (Bild 2). Die äußere Schwarzschildlösung beschreibt die Raumzeitkrümmung in der Nähe einer Punktmasse. Da die ART grundlegend für das moderne Denken über Raum und Zeit ist, ist sie auch für Schülerinnen und Schüler interessant ([1], [5], [10], [20], [21], [29], [30], [31]).

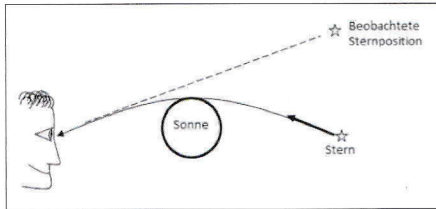
Diese Entdeckung der Gravitationslinse und ihre Erklärung durch die Raumzeitkrümmung stellt ein anspruchsvolles Lernziel dar. Dieses ha-



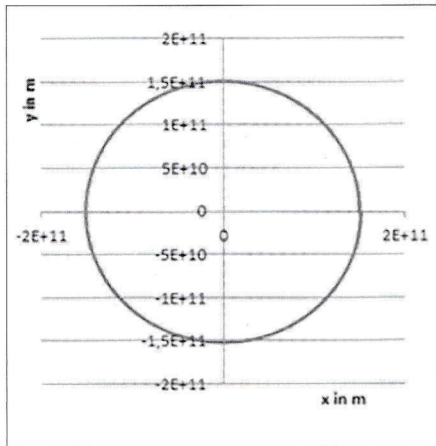
1 Lernende der Klassenstufen 5–12 haben gemeinsam den Zwillingsquasar 0957 +561 A, B (roter Kreis) fotografiert. Dazu nutzten sie ein Teleskop mit einer Öffnung von 11 Zoll vom Typ C11 und eine Kamera der Firma SBIG vom Typ ST402 bei einer Belichtungsdauer von 5 min und bei einer Kamertemperatur von -10°C .



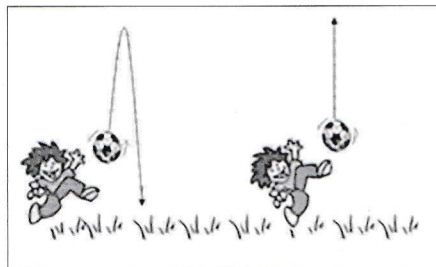
2 Lernende der Klassenstufen 5–12 entwickelten gemeinsam eine Vermutung: Dem fotografierten Zwillingsquasar liegt eine einzige Galaxie zugrunde. Das Licht gelangt auf zwei Wegen zum Beobachter. So entstanden die beiden umrandeten Punkte in Bild 1.



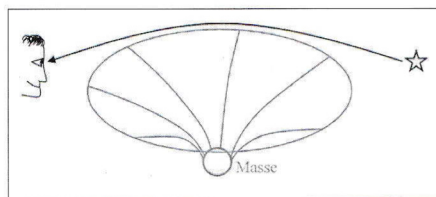
3 Bestimmung des Ablenkungswinkels bei der Sonne



4 Die Lernenden berechneten bei ihren Computereperimenten mit Hilfe einer Tabellenkalkulation verschiedene Planetenbahnen.



5 Fällt der Ball immer wieder herunter?



6 Eine Masse auf der Sprungmatte eines Trampolins dehnt diese Matte grob analog dazu, wie eine Masse die Raumzeit in ihrer Umgebung dehnt.

be ich in einer sehr heterogenen Lerngruppe, bestehend aus Schülerinnen und Schülern der Klassenstufen 5–12, einer Arbeitsgemeinschaft für Astronomie unterrichtet. Daher eignet sich dieses Projekt als **Fallbeispiel** zur Untersuchung von anspruchsvollem binnendifferenziertem Unterricht, wie er im Zusammenhang mit inklusivem Unterricht gefordert wird [28]. Bei diesem

Fallbeispiel werden ein fachliches und drei pädagogische Ziele verfolgt:

Das **fachliche Ziel** des präsentierten Projekts bestand darin, dass Lernende der Klassenstufen 5–12 die Gravitationslinse und die zugehörige Krümmung der Raumzeit, also wesentliche Konzepte der ART ([7], [14], [23], [25]), ausgehend von ihren Basiskonzepten, sich selbst erarbeiten. Dazu wurde vorbereitend die übliche Theorie der *vierdimensionalen Raumzeit* so gegliedert, dass die zwei waagerechten Raumdimensionen separiert werden und nur die zwei übrigen Dimensionen effektiv behandelt werden müssen. Dadurch können die Lernenden die exakte Raumzeitkrümmung mit Schulmitteln entwickeln (s. Abschn. 4). Mit Hilfe der Huygens'schen Elementarwellen werden Lichtwege berechnet und Massen bestimmt.

Die wesentlichen **pädagogischen Ziele** sind hier:

- Herausfordernde **Lernbarrieren**, die die Lernenden mit Vorwissen bewältigen: Denn das steigert gerade in den Naturwissenschaften die Lernwirksamkeit. Auch sind nach W. v. Humboldt reale Lernbarrieren gut geeignet, um Bildungsprozesse anzuregen [2].
- **Selbstständiges Denken**: Das steigert die Lernwirksamkeit besonders durch Aufstellen und Testen von Hypothesen [13]. Zudem ist die Nutzung des eigenen Verstandes ein wichtiges Ziel der Aufklärung [10].
- **Heterogenität**: Teilhabe auch unterschiedlicher Menschen an der Bildung ist ein wichtiges gesellschaftliches Ziel. Dabei sollte nicht nivellierend gefördert werden [28]. Dazu wird das Konzept der binnendifferenzierenden Progression zum gemeinsamen Ziel vorgeschlagen und konkret ausgeführt (s. Abschn. 6).

2 Untersuchung einer Gravitationslinse

In einem ersten Abschnitt haben die Lernenden den Linseneffekt erarbeitet und zunächst durch ihr Basiskonzept Gravitation erklärt. Auch haben sie die Unzulänglichkeit ihres Basiskonzepts mithilfe von Computereperimenten erkannt.

2.1 Erstellen des Fotos

Ausgangspunkt für den Lernprozess ist das Foto der Zwillingsgalaxie (Bild 1).

Dieses haben die Lernenden selbst in ihrer Schulsternwarte aufgenommen. Gruppen ohne Sternwarte können dieses Foto oder ähnliche einsetzen.

2.2 Vom Foto zur Leitfrage

Die Lernenden erhielten die Zusatzinformation, dass die beiden Lichtpunkte gemeinsame Helligkeitsschwankungen zeigen.¹ Daraus folgerten die Schülerinnen und Schüler, dass das Licht von nur einer Quelle stammt. Entsprechend wurde die Skizze in Bild 2 entwickelt. Es stellte sich die Leitfrage: Warum kommt das Licht auf zwei Wegen zum Betrachter?

2.3 Von der Leitfrage zu Vermutungen

Die Lernenden vermuteten die Schwerkraft² als Ursache. Wenn das Licht durch die Gravitation abgelenkt wird, dann kann es auf den beiden Wegen (Bild 2) zum Beobachter kommen. Fortgeschrittene Lernende haben auch schon etwas von der Krümmung der Raumzeit gehört, diese Vermutung erscheint zunächst aber unnötig kompliziert. Daher wurde erst die Basis-Vermutung zur Schwerkraft, dargestellt durch das Newton'sche Gravitationsgesetz, überprüft.

2.4 Überprüfung der Basis-Vermutung

Zur Überprüfung der Vermutungen werteten die Lernenden das Foto quantitativ aus. Dazu wurde zunächst der Sehwinkel von 6" bestimmt (Bild 1). Da über eine vermutete Gravitationslinse (Bild 2) zunächst noch wenig bekannt ist, wurde die Sonne als ein weiteres Beispiel gewählt. Die Lernenden erhielten dazu die nötigen Informationen (**Bild 3**).

Arbeitsblatt 1: Bestimmung des Sehwinkels beim Zwillingssquasar

Zwillingssquasar: Foto Athenaeum, 17.7.15, C11, ST402, Belichtung 5 min, Kamertemperatur -10°C (Bild 1)

Die Bildhöhe entspricht einem Sehwinkel von $0,083^{\circ}$:

Bestimme zu den beiden Bildern des Zwillingssquasars den Sehwinkel.

Lösung zum AB 1

Bildhöhe: 100 mm $\rightarrow 0,083^{\circ}$
1 mm $\rightarrow 0,00083^{\circ}$

Sehwinkel des Zwillingssquasars: 2 mm $\rightarrow 2 \cdot 0,00083^{\circ}$
 $= 0,00166^{\circ} = 6''$

Arbeitsblatt 2: Bestimmung des Ablenk- winkels bei der Sonne

Bei der Sonnenfinsternis 1919 wurde beobachtet, dass das Licht eines Sterns, das die Sonnenoberfläche tangiert, um einen Winkel von $\delta = 1,74''$ abgelenkt wird.

Markiere den Winkel in der Skizze.

Erkläre, warum der Ablenkwinkel bei einer Sonnenfinsternis gemessen wurde.

Die Lernenden führten Computerexperimente zum Ablenkwinkel durch. Dazu nutzten sie ein Programm, das sie zuvor bereits zur Modellierung von Planetenbahnen eingesetzt hatten (**Bild 4**). Die Schülerinnen und Schüler hatten diese Simulationen vorher spielerisch entwickelt.³ Dabei hatten sie als Kraft die Newton'sche Gravitationskraft verwendet. Zur Steigerung der Genauigkeit hatten fortgeschrittene Lernende die gleiche Dynamik in der Programmiersprache Java implementiert. Mit diesem Programm erkundeten alle die Lichtwege bei der Sonne und erhielten den Ablenkwinkel $\delta = 0,87''$. Die Lernenden stellten fest: Das Newton'sche Gravitationsgesetz alleine kann die Lichtablenkung an der Sonne nicht erklären. Da die Basis-Vermutung verworfen war, überprüften wir die Vermutung zur Raumzeitkrümmung.

3 Untersuchung der Raumzeitkrümmung

In einem weiteren Abschnitt wurde die Raumzeitkrümmung entdeckt und zur qualitativen Erklärung der Gravitationslinse angewendet.

3.1 Entdeckung des Schwarzschildradius

Zunächst untersuchten die Lernenden wesentliche Typen von Bahnen, die bei Gravitation prinzipiell auftreten können. Dabei lernten sie den Schwarzschildradius mit Hilfe eines Arbeitsblattes kennen (**Bild 5**):

$$R_s = \frac{2MG}{c^2} \quad (1)$$

Arbeitsblatt Schwarzschildradius

Anna schießt einen Fußball senkrecht nach oben bis zu einem Abstand R vom Erdmittelpunkt. Die Erde hat die Masse $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg und den Radius $R_E = 6378$ km.

1) Leite eine Formel für die Abschussgeschwindigkeit v her.

2) Leite eine Formel für die Abschuss-

geschwindigkeit v her, bei welcher der Ball nicht zurückkommt.

- 3) Bestimme den Radius R_s , auf den man die Erde zusammendrücken müsste, so dass nicht einmal Licht die Erde verlassen kann. Die Lichtgeschwindigkeit beträgt $c = 300\,000$ km/s. Dieser Radius R_s wurde 1784 von *John Mitchell* entdeckt.

Lösungen zum AB

$$\text{Zu 1) } 0 = \Delta E = -m \cdot M \cdot G \cdot \left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{R} \right)$$

$$+ m \cdot v^2 / 2 \rightarrow v = \sqrt{2MG \left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{R} \right)}$$

$$\text{Zu 2) Für } R \rightarrow \infty \text{ ist: } v = \sqrt{\frac{2MG}{R_E}}$$

$$\text{Zu 3) } c = \sqrt{\frac{2MG}{R_s}} \rightarrow R_s = \frac{2MG}{c^2}$$

Der Radius einer Masse M , ab der Licht nicht entweichen kann, heißt Schwarzschildradius R_s . Für die Erde beträgt der Schwarzschildradius $R_s = 8,9$ mm.

3.2 Entwicklung des Konzepts der Dehnung der Raumzeit

Mit den Lernenden wird die folgende Leitfrage behandelt: Wie verläuft ein senkrechter Aufstieg beim Schwarzen Loch? Die Lernenden beschreiben zunächst das Geschehen bei einem Ball. Der Ball startet mit einer Anfangsgeschwindigkeit senkrecht nach oben, die Geschwindigkeit sinkt, wird null, dann entwickelt sich eine Geschwindigkeit nach unten, schließlich trifft der Ball wieder unten ein.

Als Nächstes analysieren sie Licht. Das Licht startet mit der Anfangsgeschwindigkeit c senkrecht nach oben, die Geschwindigkeit sinkt nicht, denn die Lichtgeschwindigkeit ist eine Konstante.⁴ Dennoch kann das Licht das Schwarze Loch nicht verlassen und beispielsweise die Erde erreichen. Wie ist das möglich? Die Lernenden untersuchen die zurückgelegte Strecke genauer. Beim Aufstieg des Lichts nimmt die zurückgelegte raumzeitliche Strecke⁵ mit konstanter Geschwindigkeit c unbegrenzt zu. Also steht eine unbegrenzte raumzeitliche Strecke zum Aufstieg des Lichts zur Verfügung, ohne dass das Licht beispielsweise die Erde erreicht. Somit muss die raumzeitliche Strecke durch das Schwarze Loch unendlich gedehnt worden sein. Verallgemeinernd wird festgestellt, dass eine

Masse in ihrer Umgebung die Raumzeit dehnt.

3.3 Erklärung des Lichtweges

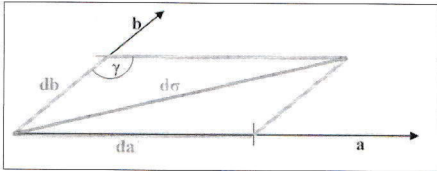
Vorbereitend wird den Lernenden erläutert, dass das Licht auf dem Weg von der Quelle zum Beobachter bevorzugt den kürzesten Weg nimmt. Das erklärt, warum sich Licht im nicht gedehnten Raum auf einer Geraden ausbreitet. Damit erklären die Schülerinnen und Schüler nun, warum das Licht in Bild 2 einen raumzeitlichen Weg um die Gravitationslinse herum realisiert (s. auch Bild 4): In der Nähe der Gravitationslinse ist die Raumzeit gedehnt und der raumzeitliche Weg verlängert.

3.4 Veranschaulichung der Dehnung der Raumzeit

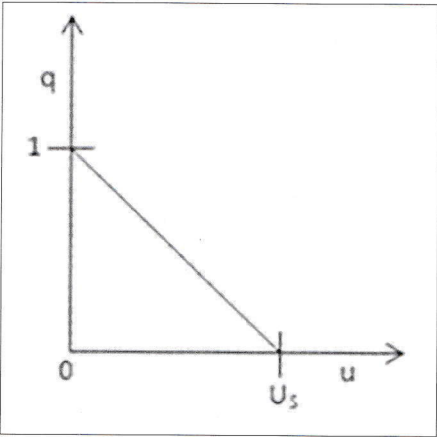
Die Dehnung der Raumzeit durch eine Masse wird ergänzend durch eine Analogie zum Trampolin grob veranschaulicht (**Bild 6**). Die Lernenden erarbeiten die einander entsprechenden Komponenten: Die Sprungmatte entspricht einer Fläche des Raums. Auf diese Matte wird eine Masse gelegt, dem entspricht eine Masse in der betrachteten Fläche des Raums. Die Dehnung der Sprungmatte in der Umgebung der Masse entspricht der Dehnung der Fläche. Die Verlängerung des Weges auf der Sprungmatte von der Masse nach außen entspricht der Verlängerung des Weges in der Nähe einer Masse in der betrachteten Fläche. Die Sprungmatte ist an verschiedenen Stellen unterschiedlich gedehnt, so dass sie keine ebene Fläche mehr ist; man nennt sie daher gekrümmt. Analog ist der Raum in der Nähe einer Masse so ungleichmäßig gedehnt, dass er auch gekrümmt ist.

4 Herleitung und Berechnung der Raumzeitkrümmung bei einer Masse

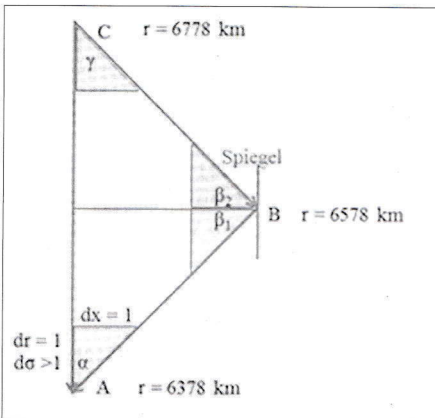
Zur Mathematisierung untersuchten wir die Längenberechnung für einen gekrümmten Raum. Dazu betrachteten wir die krummlinigen Koordinaten auf einem Globus und stellten fest, dass unter der Lupe die Koordinatenlinien praktisch geradlinig sind, aber generell schräg liegen und gedehnt sein können (**Bild 7**). Die Lernenden entwickelten dazu selbstständig ein Verfahren zur Abstandsberechnung und lernten dabei



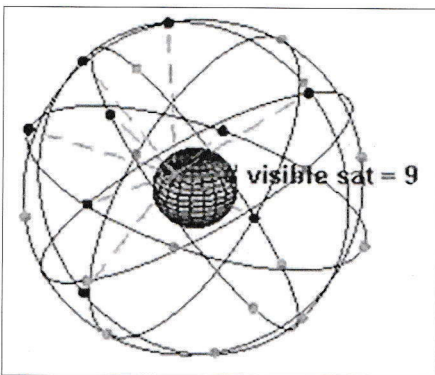
7 Arbeitsblatt: Metrischer Tensor



8 Arbeitsblatt: Ermittlung der Schwarzschildlösung im Rahmen einer Regression



9 Berechnung der Winkelsumme im Dreieck kleiner als 180°



10 GPS: Bild aus Wikipedia. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Global_Positioning_System (Heruntergeladen 2012).

den metrischen Tensor kennen.

Arbeitsblatt: Metrischer Tensor

Bestimme den Abstand $d\sigma$ aus den schrägen und gedehnten Koordinaten da und db .

- 1) Gib eine Formel für $d\sigma^2$ für $\gamma = 90^\circ$ an.
- 2) Gib eine Formel für $d\sigma^2$ für beliebige Winkel γ an.
- 3) Gib zur Formel $d\sigma^2 = g_{aa} \cdot da \cdot da + g_{bb} \cdot db \cdot db + g_{ab} \cdot da \cdot db + g_{ba} \cdot db \cdot da$ die Terme für die sogenannten Elemente des metrischen Tensors g_{aa} , g_{bb} und $g_{ba} = g_{ab}$ an.
- 4) Gib die Elemente des metrischen Tensors für die gewöhnliche Ebene an.

Lösungen zum AB

Zu 1) Satz des Pythagoras:

$$d\sigma^2 = da^2 + db^2$$

Zu 2) Kosinussatz:

$$d\sigma^2 = da^2 + db^2 - 2 \cdot \cos(\gamma) \cdot da \cdot db$$

Zu 3) $g_{aa} = 1$, $g_{bb} = 1$ und

$$g_{ba} = g_{ab} = -\cos(\gamma)$$

Zu 4) $g_{aa} = 1$, $g_{bb} = 1$ und $g_{ba} = g_{ab} = 0$

4.1 Ermittlung⁶ der Schwarzschildmetrik im Rahmen einer Regression

Nachdem die Lernenden den metrischen Tensor als Werkzeug zur Abstandsberechnung kennengelernt hatten, stellten wir die Frage nach dem metrischen Tensor in der Nähe einer Masse M . In die beiden waagerechten Richtungen wirkt keine Schwerkraft, daher sind die entsprechenden Komponenten eins. Wir suchten also für die senkrechte Koordinate r , die sogenannte radiale Koordinate, das Element g_{rr} . Dieses ermittelten die Lernenden mit einem Arbeitsblatt teils selbstständig, teils mit individuellen Lernhilfen (Bild 8):

$$g_{rr} = 1/(1-R_s/r). \quad (2)$$

Wie hängt die Strecke $d\sigma^2 = g_{rr} \cdot dr^2$ bei einer Masse M von der radialen Koordinate r ab?

Besondere Stellen:

- 1) Für $r \rightarrow \infty$ ist $g_{rr} = 1$ oder kurz $(rg_{rr}) = (\infty|1)$. Begründe.
- 2) Beim Schwarzschildradius R_s kann senkrecht aufsteigendes Licht M nicht verlassen, obwohl es sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet. Daher muss die raumzeitliche Strecke unendlich groß sein. Für $r \rightarrow R_s$ geht daher $g_{rr} \rightarrow \infty$ oder kurz $(rg_{rr}) = (R_s|\infty)$. Begründe, dass g_{rr} nicht schon für $r > R_s$ divergiert.

Vermeidung von Unendlichkeiten durch Kehrwerte:

Wir ersetzen r durch $1/u$ sowie g_{rr} durch $1/q$ und kürzen $1/R_s$ durch U_s ab.

- 3) Rechne die beiden Stützstellen ($\infty|1$) und $(R_s|\infty)$ in die neuen Variablen um.
- 4) Bestimme die Funktion $q(u)$ durch die beiden Stützstellen als lineare Funktion.
- 5) Bestimme aus $q(u)$ den Term $g_{rr}(r)$. Dieser Term beschreibt die radiale Komponente der Raumzeitdehnung bei einer Masse exakt und wird Schwarzschildlösung genannt.

Lösungen zum AB

Zu 1) Die Schwerkraft geht gegen null, daher geht g_{rr} gegen 1.

Zu 2) Für $r > R_s$ verlässt Licht die Masse M , daher muss nichts divergieren.

Zu 3) $(u|q) = (0|1)$ und $(u|q) = (U_s|\infty)$

Zu 4) $q = 1 - u/U_s$

Zu 5) $g_{rr} = 1/(1-R_s/r)$

4.2 Berechnung der Winkelsumme im Dreieck

Um die Schwarzschildlösung zu konsolidieren, untersuchten wir die Winkelsumme eines rechtwinkligen Dreiecks, das grob der Flughöhe der ISS entspricht (Bild 9).

Wie groß ist die Winkelsumme im Dreieck auf der Erde?

Lösung zum AB, berechnet mit Excel

Schwerelos wäre $\alpha = \gamma = 45^\circ$; $\beta = 90^\circ$. Wir wählen $dr = 1 \text{ m} = dx$. $R_s = 8,89 \text{ mm}$. Waagrecht: $dx = 1 \text{ m}$

Wir berechnen α mit dem gelben Hilfsdreieck bei A: $d\sigma = dr/(1-R_s/r)^{0,5}$. $d\sigma = 1 \text{ m}/(1-8,89 \text{ mm}/6378 \text{ km})^{0,5}$ $= 1 \text{ m} + 696,9 \text{ pm} \rightarrow \alpha = \arctan(1 \text{ m}/d\sigma) = 45^\circ - 19,97 \text{ n}^\circ$.

Für β_1 ist: $d\sigma = 1/(1-8,89 \text{ mm}/6578 \text{ km})^{0,5} = 1 \text{ m} + 675,7 \text{ pm}$. $\beta_1 = \arctan(d\sigma/m) = 45^\circ + 19,36 \text{ n}^\circ = \beta_2$.

Für γ ist:

$$d\sigma = 1/(1-8,89 \text{ mm}/6778 \text{ km})^{0,5} = 1 \text{ m} + 655,8 \text{ pm}$$

$$\gamma = \arctan(1 \text{ m}/d\sigma) = 45^\circ - 18,79 \text{ n}^\circ$$

$$\text{Winkelsumme } \alpha + \beta_1 + \beta_2 + \gamma = 180^\circ - 35,8 \text{ p}^\circ$$

Arbeitsblatt: Zeitfaktor⁷ g_{tt}

Um die Schwarzschildlösung zu vervollständigen, bestimmten die Lernenden den zeitlichen Faktor g_{tt} ähnlich wie den räumlichen g_{rr} :

$$g_{tt} = 1 - R_s/r. \quad (3)$$

Wie hängt die Dauer $d\tau^2 = g_{tt} \cdot dt^2$ bei einer Masse M von der radialen Koordinate r ab?

Besondere Stellen:

- 1) Für $r \rightarrow \infty$ ist $g_{tt} = 1$ oder kurz $(rg_{tt}) = (\infty|1)$. Begründe.
- 2) Ein senkrecht fallender Astronaut kann den Schwarzschildradius R_s nach einer endlichen Falldauer, gemessen mit seiner Uhr, erreichen, denn die Gravitation behindert das Fallen nicht. Damit nicht umgekehrt Licht von R_s aus das Schwarze Loch verlassen kann, sollte bei R_s die für das Licht verfügbare Zeit durch den Zeitfaktor g_{tt} unendlich verkleinert sein. Bestimme g_{tt} für $r \rightarrow R_s$.

Vermeidung von Unendlichkeit durch Kehrwert:

Wir ersetzen r durch $1/u$ und kürzen $1/R_s$ durch U_s ab.

- 3) Rechne die beiden Stützstellen ($\infty|1$) und $(R_s|0)$ in die neue Variable um.
- 4) Ermittle die Funktion $g_{tt}(u)$ durch die beiden Stützstellen als lineare Funktion.
- 5) Ermittle aus $g_{tt}(u)$ den Term $g_{tt}(r)$. Dieser Term beschreibt den Zeitfaktor bei einer Masse exakt und gehört auch zur Schwarzschildlösung.

Lösungen zum AB

- Zu 1) Die Schwerkraft geht gegen null, daher geht g_{tt} gegen 1.
 Zu 2) $g_{tt} = 0$
 Zu 3) $(ulg_{tt}) = (0|1)$ und $(ulg_{tt}) = (U_s|0)$
 Zu 4) $g_{tt} = 1 - u/U_s$
 Zu 5) $g_{tt} = 1 - R_s/r$

4.3 Berechnung der Zeitdehnung auf der Erde und auf GPS-Satelliten

Um die Schwarzschildlösung weiter zu konsolidieren, untersuchten wir den Gang der Uhren auf GPS-Satelliten (Bild 10).

Wie funktioniert das GPS?

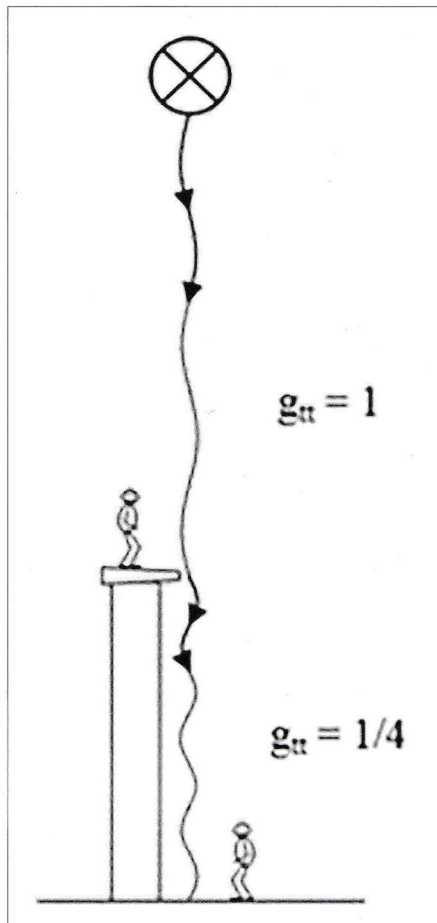
Arbeitsblatt: Berechnung der Zeitabweichung auf GPS-Satelliten

Flughöhe der Satelliten: 20200 km

- 1) Bestimme den Gang der Uhren im Satellit sowie am Erdboden und vergleiche.

Lösung zum AB, berechnet mit Excel

$R_s = 8,89 \text{ mm}$ $g_{tt}(r_{\text{Erde}}) = 1 - 1,39 \cdot 10^{-9}$; $g_{tt}(r_{\text{Sat}}) = 1 - 0,334 \cdot 10^{-9}$
 Für $dt = 1 \text{ s}$ ist die Dauer



11 Zwei Beobachter messen für einen Lichtwellenzug die Sendedauer t_{Senden} sowie die Anzahl n der Wellenberge und berechnen daraus die Periodendauer T .

$d\tau_{\text{Erde}} = dt \cdot [g_{tt}(r_{\text{Erde}})]^{0,5} = 1 \text{ s} - 697 \text{ ps}$ und
 $d\tau_{\text{Sat}} = dt \cdot [g_{tt}(r_{\text{Sat}})]^{0,5} = 1 \text{ s} - 167 \text{ ps}$.
 Die Abweichung beträgt 530 ps je Sekunde oder 53 n%.

$\rightarrow 46 \mu\text{s pro Tag} \rightarrow 46 \mu\text{s/Tag} \cdot 300000 \text{ km/s} = 13,7 \text{ km/Tag} \rightarrow$ völlig inakzeptabel⁸ \rightarrow Die Uhr wird passend kalibriert (Bild 11).

Die Lernenden erhielten die Info, dass in den GPS-Satelliten die Zeitabweichung ausgeglichen wird. Damit ist für die Lernenden auch die Schwarzschildmetrik empirisch überprüft.

Anmerkungen

1 Didaktisch reduzierend wurde die Tatsache ausgeklammert, dass eine Helligkeitsschwankung des Quasars auf einem Lichtweg über 400 Tage später bei der Erde eintrifft als auf dem anderen Lichtweg. Dies wird mit dem Saphiro-Effekt durch unterschiedlich lange Lichtwege erklärt (s. [17]).

2 Anknüpfend an ihr Vorwissen gingen die Lernenden spontan von ihrem Basiskonzept der Newton'schen Gravitation aus. Später erkannten sie die Unzulänglichkeit ihres Basiskonzepts und erlebten so einen kognitiven Konflikt und die Notwendigkeit zur Erweiterung ihres Konzepts. Dazu wurde, ausgehend vom Basiskonzept, das Konzept der Raumzeitkrümmung entwickelt. So erreichten die Lernenden eine tragfähige Erklärung.

Diese Vernetzung mit dem Vorwissen verspricht eine hohe Lernwirksamkeit. Aus fachlicher Sicht ist ein kognitiver Konflikt immer teils unstimmig. So wirkt auf masselose Photonen aus fachlicher Sicht keine Newton'sche Gravitationskraft. Immerhin hängt die Gravitationsbeschleunigung nur von der felderzeugenden Masse, jedoch nicht von der angezogenen ab und kann daher im Sinne eines Basiskonzepts auch auf das masselose Licht angewendet werden. Der kognitive Konflikt entspricht der Falsifikation des Basiskonzepts und somit dem erkenntnistheoretischen Vorgehen beim kritischen Rationalismus [18].

3 Die spielerische Entwicklung von Computerexperimenten durch Schülerinnen und Schüler der Klassenstufen 5–12 stelle ich in einem weiteren Aufsatz in Kürze dar. Grundsätzlich erzeugen die Lernenden einen Euler'schen Polygonzug [3].

4 Das können die Lernenden mit Hilfe einer Schulsternwarte nachweisen (CARMESIN, 2006).

5 Die raumzeitliche Strecke des Lichts berücksichtigt auch die Dauer der Lichtausbreitung.

6 Diese Regression vernachlässigt höhere Ordnungen bei der Ermittlung der Raumzeitkrümmung. Die Raumzeitkrümmung wird üblicherweise mittels der Einstein'schen Feldgleichung hergeleitet, deren Ermittlung ähnlich denkbare höhere Ordnungen vernachlässigt (s. [7], [9]).

7 Die beiden Elemente des metrischen Tensors, die radiale Komponente g_{rr} und die zeitliche Komponente g_{tt} , stellen nur gemeinsam ein Hindernis dar dafür, dass Licht das schwarze Loch verlässt. Bei Interesse können die Lernenden das am Beispiel der Strecke vom Schwarzschildradius R_s zum zweifachen Schwarzschildradius $2 \cdot R_s$ überprüfen. Dabei kürzen wir im Folgenden den Schwarzschildradius mit a ab:

Die Längskomponente L ist das Integral von a bis $2 \cdot a$ mit dem Integrand $1/(1 - a/r)$, integriert bezüglich dr . Die Integration ergibt $L = 2,29559 \cdot a \approx 2,3 \cdot a$. Diese Länge L ist endlich und stellt somit alleine kein Hindernis für das Entweichen von Licht dar.

Die Zeitkomponente T ist das Integral von a bis $2 \cdot a$ mit dem Integrand $1/(1 - a/r)$, integriert bezüglich dr/c . Die Integration ergibt $T = 0,53284 \cdot a/c \approx 0,53 \cdot a/c$. Diese Dauer T ist endlich und stellt daher alleine kein Hindernis für das Entweichen von Licht dar.

Mit Krümmung der Raumzeit ist das Quadrat der Eigenzeit $d\tau \cdot d\tau = g_{tt} \cdot dt^2 - g_{rr} \cdot dr^2/c^2$. Auflösen nach dt ergibt: $dt = g_{rr} \cdot dr/c$. Ein entfernter Beobachter stellt somit für die Dauer Δt der Lichtausbreitung von a bis $2 \cdot a$ die Zeit Δt fest, die gleich dem Integral ist von a bis $2 \cdot a$ mit dem Integranden $1/(1 - a/r)$ bezüglich dr/c . Dieses Integral ist $\Delta t = [a \cdot \ln(r - a) + r]/c$ an den Integrationsgrenzen a bis $2 \cdot a$. Dieses Integral divergiert für a gegen den Schwarzschildradius. Aus Sicht eines entfernten Beobachters entkommt das Licht also nie bei ihm an. Die Ursache ist die Krümmung der Raumzeit, dargestellt durch beide Elemente des metrischen Tensors g_{rr} und g_{tt} zusammen.

8 Üblicherweise verwendet das Empfangsgerät die Zeitangabe der GPS-Satelliten. Auch das verringert den durch die Raumzeitkrümmung möglichen Fehler.

Die Literaturangaben folgen im 2. Teil.

Hans-Otto Carmesin

Gymnasium Athenaeum
 Harsfelder Str. 40
 21680 Stade

Studienseminar Stade
 Bahnhofstr. 5
 21682 Stade

Universität Bremen
 FB 1 Physik/Elektrotechnik
 Otto-Hahn-Allee 1
 28359 Bremen
 E-Mail: hans-otto.carmesin@t-online.de