
**Eine konsistente Plattentheorie
zweiter Ordnung
für monotropes Material**

Diplomarbeit

Universität Bremen

Betreuung

Prof. Dr.-Ing. habil. Reinhold Kienzler
Universität Bremen, Fachbereich Produktionstechnik
Fachgebiet Technische Mechanik - Strukturmechanik

und

Prof. Dr. rer. nat. habil. Michael Böhm
Universität Bremen, Fachbereich Mathematik
AG Modellierung und PDEs

von

Patrick Schneider

5. Januar 2010

Patrick Schneider
Bgm.-Smidt-Str. 45
28195 Bremen

pasch@math.uni-bremen.de

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitendes	3
1.1	Einordnung der Arbeit	3
1.2	Zielsetzung der Arbeit	4
1.3	Gliederung der Arbeit und Abgrenzung von bestehenden Plattentheorien	4
1.4	Grundlegende mathematische Definitionen	5
1.5	Die Geometrie der Platte	7
1.6	Die dimensionslosen Koordinaten	10
2	Lineare Elastostatik	11
2.1	Definitionen und Notation	11
2.2	Die Grundgleichungen der linearen Elastostatik	13
2.3	Materialgesetze	14
3	Die schwache Formulierung	17
3.1	Sobolevräume	17
3.2	Existenz und Eindeutigkeit der schwachen Lösung	21
4	Fourierreihen	28
4.1	Eine Basis für L_2	28
4.2	Die Eigenschaften der Basispolynome	29
4.3	Fourierreihen von L_2 -Funktionen	36
4.4	Regularität der Fourier-Koeffizienten	37
5	Die exakte 2D-Darstellung	39
5.1	Das äquivalente 2D-Problem	39
5.2	Die Schnittgrößen	42
5.3	Die Lastresultanten	45
5.4	Die Verschiebungsrandbedingungen in den Fourier-Koeffizienten von u	46
5.5	Die 2D-Darstellung für homogenes Material	46
6	Das approximative 2D-Problem	49
7	Das approximative 2D-Problem in w	56
7.1	Die Reduktion des approximativen 2D-Problems	56
7.2	Die Ordnung der PDE in w	64
7.3	Vergleich mit anderen isotropen Plattentheorien	65
8	Die schubweiche Modellierung	66
8.1	Die Reduktion mit ψ -Anteilen	66
8.2	Die Äquivalenz zu bestehenden Plattentheorien für Isotropie	70
9	Vergleich eines isotropen und eines orthotropen Materials	74
10	Zusammenfassung und Ausblicke	78
	Literatur	80

1 Einleitendes

1.1 Einordnung der Arbeit

Die Arbeit beschäftigt sich mit einem Teilgebiet der *Mechanik*, den *Plattentheorien*. Die Aufgabe der Mechanik „[...] besteht in der Vorausberechnung der Bewegung und Deformation von materiellen Körpern und der mit ihnen in Zusammenhang stehenden Kräfte. Kräfte können äußere, eingeprägte Kräfte (z.B. Lasten) oder innere Kräfte (z.B. Schnittgrößen, Spannungen) sein.“ (aus Kienzler und Schröder, 2009, Seite 1) Die Mechanik wird oft in zwei Teilgebiete unterteilt (vgl. auch Gross u. a., 2003), welche zwei Sichtweisen auf die Mechanik entsprechen. Als *Technische Mechanik* bezeichnet man den Teil der Literatur zur Mechanik, welcher sich auf die Ansprüche des konstruierenden Ingenieurs konzentriert. Der andere Teil der Mechanik, welcher die mathematische Untersuchung prinzipieller physikalischer Gesetzmäßigkeiten in den Vordergrund stellt, wird als *analytische Mechanik* bezeichnet. Wir benutzen daher den Terminus *Technische Mechanik* immer dann, wenn wir uns auf die einschlägige Ingenieurliteratur beziehen.

Unabhängig von der Sichtweise unterteilt man die Mechanik auch thematisch. Zum einen unterteilt man die Theorien nach dem *Aggregatzustand* des betrachteten Körpers und dem angenommenen idealisierten *Materialverhalten* des Körpers. Zum anderen unterteilt man die Mechanik in die Gebiete *Kinematik* und *Dynamik*, wobei sich die Kinematik nur mit Bewegungsabläufen beschäftigt, ohne auf die für die Bewegung verantwortlichen Kräfte einzugehen. Die Dynamik hingegen untersucht den Zusammenhang zwischen Kräften und Bewegung sowie Deformation. Man unterteilt die Dynamik weiter in *Statik* und *Kinetik*. Die Statik beschäftigt sich mit ruhenden Körpern im Gleichgewicht, während sich die Kinetik mit zeitlichen Bewegungsabläufen und den ursächlichen Kräften beschäftigt. Plattentheorien sind ein Teilgebiet der *linearen Elastostatik*. Wir untersuchen also die Statik fester, linear elastischer Körper.

Die *Technische Elastostatik* unterteilt man weiter nach geometrischen Ausprägungen des festen Körpers (in diesem Teilgebiet auch *Tragwerk* genannt) und seiner Belastung. Die Plattentheorien beschäftigen sich mit *Platten*, welche ebene (nicht gekrümmte) *Flächentragwerke* sind. Ein Flächentragwerk zeichnet sich dadurch aus, dass eine charakteristische Längenabmessung des dreidimensionalen Körpers (Tragwerk), die sogenannte *Dicke*, wesentlich kleiner ist als die übrigen zwei charakteristischen Längenabmessungen. Ist ein Flächentragwerk eben und wird es nur senkrecht zur Mittelebene des Tragwerks belastet (d.h. senkrecht zu der Ebene, in der jeder Punkt die Dicke des Tragwerks halbiert), so nennt man es eine Platte.

Die Plattentheorien werden wiederum in zwei Teilgebiete unterteilt. Das erste Teilgebiet sind die *experimentell motivierten Plattentheorien*. Die mathematischen Modellierungen aller Plattentheorien dieses Teilgebietes stützen sich auf a-priori Annahmen, welche durch Beobachtungen von Experimenten motiviert wurden. Bereits 1850 veröffentlichte G. R. Kirchhoff die erste Plattentheorie (siehe Kirchhoff, 1850). Seine Plattentheorie ist heute auch als *klassische* Plattentheorie bekannt. In der Kirchhoffschen Theorie wird der Einfluss von Querkraftschubspannungen ignoriert. Man spricht in diesem Zusammenhang von einer *schubstarren* Plattentheorie. Es zeigte sich, dass eine solche Modellierung gute Ergebnisse liefert, falls die Platte hinreichend dünn ist und die maximale Durchbiegung der Platte klein gegenüber der Dicke ist. In der Ingenieurliteratur findet sich die Faustformel, dass die Kirchhoffsche Theorie bei Durchbiegungen bis zu einem Zehntel der Plattendicke gute (bzw. bei Durchbiegungen bis zu einem Fünftel der Plattendicke brauchbare) Ergebnisse liefert. Für dicke Platten oder größere Durchbiegungen wurden zahlreiche sogenannte *verbesserte* Plattentheorien aufgestellt. Die erste wurde von E. Reissner 1944 veröffentlicht (siehe Reissner, 1944). Reissner modellierte erstmals eine Theorie, die den Einfluss von Querkraftschubspannungen berücksichtigte. Man spricht in diesem Zusammenhang von einer *schubweichen* Plattentheorie.

Das zweite Teilgebiet bilden die sogenannten *konsistenten* Plattentheorien. Die Grundidee der konsistenten Plattentheorien besteht darin, die zweidimensionalen Plattentheorien mit Hilfe von Reihenentwicklungen bezüglich der Dickenrichtung der Platte aus den dreidimensionalen Grundgleichungen der linearen Elastostatik abzuleiten. Das Vorgehen der konsistenten Plattentheorien erlaubt es dabei Plattentheorien beliebiger Genauigkeit (Approximationsordnung) aufzustellen, zudem benötigt man nicht die klassischen a-priori Annahmen der experimentell motivierten Plattentheorien. Wir greifen hier im Speziellen die Modellierungsansätze der konsistenten Plattentheorie von R. Kienzler auf (für eine Einführung siehe Bose, 2004, Kapitel 3).

1.2 Zielsetzung der Arbeit

R. Kienzlers Plattentheorie ist eine Theorie der zweiten Approximationsordnung für ein homogen isotropes Material. Isotropie ist das einfachste Modell für ein linear elastisches Material. Ziel dieser Arbeit ist die mathematische Modellierung einer konsistenten Plattentheorie zweiter Approximationsordnung für ein homogen monotropes Material. Wir werden später sehen, dass Monotropie das komplexeste Modell für ein linear elastisches Material ist, für welches man eine Plattentheorie aufstellen kann. Eine Plattentheorie für Monotropie (insbesondere eine konsistente) gibt es bisher nicht. Wir beschränken uns in dieser Arbeit dabei auf den wichtigen Spezialfall einer Platte mit konstanter Dicke.

Wir rücken dabei eine mathematisch rigorose Modellierung stärker in den Fokus als in den Arbeiten von R. Kienzler. Dazu betten wir die Modellierungsansätze der konsistenten Plattentheorien in eine schwache Lösungstheorie ein. Wir bemühen uns gleichsam, Grundlegendes aus der Mathematik und den Ingenieurwissenschaften (oder genauer der Technischen Mechanik) soweit anzugeben, dass auch Vertreter der jeweils anderen Fachrichtung die Arbeit nachvollziehen können.

1.3 Gliederung der Arbeit und Abgrenzung von bestehenden Plattentheorien

Nachdem wir die Geometrie der Platte diskutiert und die Grundgleichungen der linearen, dreidimensionalen Elastostatik zusammengetragen haben, führen wir im Kapitel 3 zunächst die schwache Formulierung der linearen Elastostatik ein und liefern ein Existenz- und Eindeutigkeitsresultat. Dabei folgen wir im Wesentlichen dem Vorgehen von E. Zeidler und zeigen eine für unsere Zwecke verallgemeinerte Version des Theorems 61.D aus Zeidler (1997). Das Resultat gilt dabei für einen beliebigen linear elastischen Körper, insbesondere auch für einen inhomogenen. Auch nutzen wir für das Resultat noch nicht die spezifische Geometrie der Platte aus. Wir zeigen weiter, dass die schwache Formulierung äquivalent ist zu dem Prinzip minimaler potentieller Energie, welches normalerweise der Ausgangspunkt konsistenter Plattentheorien (wie insbesondere auch bei R. Kienzler) ist. In Kapitel 4 zeigen wir dann die Existenz der benötigten Reihenentwicklungen bezüglich einer Basis aus skalierten Legendre-Polynomen mit Hilfe der Theorie der abstrakten Fourier-Reihen. Dies weicht ebenfalls von dem Vorgehen der konsistenten Plattentheorien ab, bei denen eine Basis aus Monomen benutzt wird. Wir können durch die hier gewählte Basis die Existenz unter vergleichsweise niedrigen Voraussetzungen an die Regularität der Funktion gewährleisten und erhalten zudem ein schwächer besetztes System partieller Differentialgleichungen in Kapitel 6. Das Kapitel 5 beschäftigt sich dann mit verschiedenen Möglichkeiten, die schwache Formulierung der dreidimensionalen Elastostatik aus Kapitel 3 in äquivalente (exakte) zweidimensionale Formulierungen zu überführen, die jedoch alle abzählbar viele Unbekannte umfassen. Wir nutzen dabei stark die Geometrie der Platte und die in Kapitel 4 bewiesene Existenz von Reihenentwicklungen bezüglich der Dickenrichtung der Platte aus. Die exakten zweidimensionalen Formulierungen gelten dabei wiederum für ein beliebiges linear elastisches, nicht notwendigerweise homogenes Material. Den Spezialfall eines homogenen

Materials behandeln wir erst im letzten Abschnitt des Kapitels 5. Ab Kapitel 6 konkretisieren wir dann schließlich das linear elastische Material auf ein homogenes monotropes Material und gehen den Ansätzen der konsistenten Plattentheorien folgend zu einem approximativen Problem mit endlich vielen Unbekannten über. In Kapitel 7 reduzieren wir das entstehende PDE-System auf eine PDE in einer Variablen. Wir zeigen, dass diese PDE für den Spezialfall der Isotropie und als Plattentheorie der ersten Approximationsordnung mit der klassischen Kirchhoff-Plattentheorie übereinstimmt. Wir haben daher gezeigt, dass es möglich ist, diese Theorie auch ohne die klassischen a-priori-Annahmen der schubstarrten Plattentheorien herzuleiten. Gleichsam werden wir jedoch auch sehen, dass eine konsequente Modellierung einer konsistenten Plattentheorie zweiter Ordnung auf eine schubstarre Theorie führt und nicht wie man erwarten würde auf eine schubweiche. Um zu einer schubweichen Theorie zu gelangen, werden wir leider doch eine a-priori-Annahme (jedoch keine der klassischen) benötigen. Mit Hilfe dieser werden wir in Kapitel 8 eine schubweiche Plattentheorie zweiter Ordnung für Monotropie aufstellen können und schließlich zeigen, dass diese für den Spezialfall der Isotropie mit der schubweichen Plattentheorie von R. Kienzler übereinstimmt. In Kapitel 9 vergleichen wir abschließend die Koeffizienten der Differentialgleichungen unserer Plattentheorie für einen textilverstärkten orthotropen Feinbeton (Textilbeton) und dem unverstärkten isotropen Feinbeton sowie dem isotrop homogenisierten Textilbeton, um die Notwendigkeit von Plattentheorien mit möglichst komplexen Materialmodellen zu motivieren. In Kapitel 10 fassen wir die Arbeit zusammen und geben Ausblicke auf an die Arbeit anschließende Themen.

Aufgrund der Komplexität der Gleichungen werden einige Schritte der Diplomarbeit mit Hilfe des Computeralgebrasystems „Maple“ vollzogen. Damit das Vorgehen nachvollziehbar bleibt, hängt der Arbeit eine ausgedruckte Version einer Mapledatei („Anhang.mws“) an, welche die entsprechenden Schritte durchführt. Mit Verweisen der Form A(n) in dieser Arbeit beziehen wir uns auf den n-ten Abschnitt des Anhangs. Wir empfehlen ein gleichzeitiges Lesen des Anhangs ab Kapitel 7 dieser Arbeit.

1.4 Grundlegende mathematische Definitionen

Zunächst führen wir einige grundlegende Begriffe ein und zitieren zwei Sätze, die wir häufig benutzen werden. Vor allem den Lesern, die nicht Mathematiker sind, soll dies den Einstieg erleichtern.

Definition 1 (*Gebiet*)

Unter einem Gebiet verstehen wir eine nicht leere, zusammenhängende, offene Menge.

Weiter bezeichne \bar{M} den Abschluß einer Menge M und ∂M den Rand der Menge.

Definition 2 (*Räume der stetig differenzierbaren Funktionen*)

Für ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ und $m \in \mathbb{N}_0$ bezeichne $C^m(G)$ den Raum aller Funktionen $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, die stetige partielle Ableitungen bis zur Ordnung (einschließlich) m auf G haben. $C^0(G) = C(G)$ bezeichne den Raum der auf G stetigen Funktionen. $C^m(\bar{G})$ bezeichne den Raum aller Funktionen $f \in C^m(G)$, die selbst und deren Ableitungen bis zur Ordnung (einschließlich) m stetig auf \bar{G} fortgesetzt werden können. Es sei $C_0^m(G) := \{f \in C^m(G) \mid \text{supp}(f) \subset G \text{ kompakt}\}$, wobei $\text{supp}(f) := \overline{\{x \in G \mid f(x) \neq 0\}}$. Weiter sei $C^\infty(G) := \bigcap_{m \in \mathbb{N}_0} C^m(G)$, $C^\infty(\bar{G}) := \bigcap_{m \in \mathbb{N}_0} C^m(\bar{G})$ und $C_0^\infty(G) := \bigcap_{m \in \mathbb{N}_0} C_0^m(G)$.

Definition 3 (*$L_2(G)$*)

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und nicht leer. Wir definieren für $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}$ messbar

$$(f, g)_{L_2(G)} := \int_G fg \, dV, \quad \|f\|_{L_2(G)} := \sqrt{(f, f)_{L_2(G)}}$$

und

$$\widetilde{L}_2(G) := \left\{ f : G \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ messbar und } \|f\|_{L_2(G)} < \infty \right\}.$$

In $L_2(G)$ identifizieren wir dabei zwei Funktionen aus $\widetilde{L}_2(G)$, die sich nur auf einer Menge vom Maß Null unterscheiden. Präziser

$$\begin{aligned} f, g \in L_2(G) : f &= g \\ \Leftrightarrow f, g \in \widetilde{L}_2(G) : \exists N \subset G, \text{ wobei } N \text{ vom Maß } 0 \text{ mit } f(x) &= g(x) \text{ für alle } x \in G \setminus N. \end{aligned}$$

Üblich ist in diesem Zusammenhang die Schreibweise

$$f(x) = g(x) \text{ für fast alle (kurz: f.f.a.) } x \in G.$$

Ein Element $f \in L_2(G)$ ist also nicht eine einzelne Funktion, sondern präziser formuliert eine Äquivalenzklasse von Funktionen, die sich untereinander höchstens auf Mengen vom Maß Null unterscheiden. In der Literatur der Mathematik spricht man jedoch oft der Einfachheit halber von einer Funktion, wenn ein $f \in L_2(G)$ gemeint ist.

$L_2(G)$ ist mit dem Skalarprodukt $(f, g)_{L_2(G)}$ ein Hilbertraum.

Definition 4 (Multiindex)

Unter einem Multiindex versteht man ein $\nu \in \mathbb{N}_0^n$, wobei $n \in \mathbb{N}$. Man definiert $|\nu| := \sum_{i=1}^n \nu_i$ und

$$D^\nu := \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_n^{\nu_n}}.$$

Außerdem sei $D^0 f := f$.

Definition 5 (Räume der hölderstetig differenzierbaren Funktionen)

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $|\bullet|$ die euklidische Norm, $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $0 < \alpha \leq 1$, $\nu \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex und $f \in C^m(\overline{G})$. Wir definieren die Hölder-Konstante $H_\alpha(f)$ als

$$H_\alpha(f) := \sup_{p, q \in G, p \neq q} \frac{|f(p) - f(q)|}{|p - q|^\alpha}$$

und nennen f hölderstetig, falls $H_\alpha(f) < \infty$. Wir setzen

$$\|f\|_{m, \alpha} := \sum_{|\nu| \leq m} \sup_{p \in G} |D^\nu f(p)| + \sum_{|\nu|=m} H_\alpha(D^\nu f)$$

und definieren den Raum der m -fach hölderstetig differenzierbaren Funktionen $C^{m, \alpha}(\overline{G})$ als

$$C^{m, \alpha}(\overline{G}) := \left\{ f \in C^m(\overline{G}) \mid \|f\|_{m, \alpha} < \infty \right\}.$$

Definition 6 (Hölderstetig differenzierbare Gebietsränder)

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Wir schreiben $\partial G \in C^{m, \alpha}$, falls $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ mit $r_1, r_2 > 0$ existieren, so dass für jedes $x_0 \in \partial G$ eine Funktion $\psi \in C^{m, \alpha}(\overline{B}_{r_1}(0))$ mit $\overline{B}_{r_1}(x) := \{y \in \mathbb{R}^{n-1} \mid |x - y| \leq r_1\}$ existiert, so dass nach einer möglichen Starrkörperbewegung in \mathbb{R}^n (Eine Starrkörperbewegung

ist eine Kombination aus Translation und Rotation. Siehe V_0 (Seite 24)), die x_0 in 0 überführt, gilt:

- $\partial\Omega \cap (B_{r_1}(0) \times [-r_2, r_2]) = \{(\tilde{x}, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{x} \in B_{r_1}(0), x_n = \psi(\tilde{x})\}$ mit $\psi(0) = 0$,
- $\{(\tilde{x}, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{x} \in B_{r_1}(0), \psi(\tilde{x}) < x_n < \psi(\tilde{x}) + r_2\} \subset \Omega$
- $\{(\tilde{x}, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{x} \in B_{r_1}(0), \psi(\tilde{x}) - r_2 < x_n < \psi(\tilde{x})\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$

Den Sobolevraum $H^1(G)$ führen wir erst in Kapitel 3 ein. Der folgende Satz gilt aber bekanntlich auch für $f, g \in C^1(G)$.

Satz 7. Partielle Integration

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial G \in C^{0,1}$ und $f, g \in H^1(G)$, dann gilt für alle $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\int_G \frac{\partial f}{\partial x_i} g \, dV = \int_{\partial G} f g n_i \, dA - \int_G f \frac{\partial g}{\partial x_i} \, dV,$$

wobei n der äußere Normaleneinheitsvektor auf ∂G ist.

Beweis: (vgl. Zeidler, 1990a, Korollar 18.4) ■

Satz 8. Hauptsatz der Variationsrechnung

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $G \subset \mathbb{R}^n$ nicht leer und offen und $f \in L_2(G)$. Es gelte

$$\forall \phi \in C_0^\infty(G) : \int_G f \phi \, dV = 0.$$

Dann gilt:

$$f = 0 \text{ im } L_2(G) \text{ Sinne. D.h. } f(x) = 0 \text{ für fast alle } x \in G.$$

Beweis: (siehe Zeidler, 1990a, Theorem 18.2) ■

1.5 Die Geometrie der Platte

Wir wollen in diesem Abschnitt klären, was man in der Technischen Mechanik unter einer Platte versteht.

Wir legen uns auf ein festes kartesisches Koordinatensystem ξ_1, ξ_2, ξ_3 fest. Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial A \in C^{0,1}$ und a ein charakteristisches Längenmaß von A , wie z.B. die größte Ausdehnung. Sei weiter

$$\Omega := \left\{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (\xi_1, \xi_2) \in A, \xi_3 \in \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right) \right\}.$$

Wir werden Ω im Folgenden mit der zu modellierenden Platte assoziieren. Die Größe h ist damit die konstante Dicke der Platte, und A nennen wir die Mittelebene der Platte. Der Begriff der Platte ist in der Technischen Mechanik (kurz: TM) nicht an eine konstante Dicke gebunden. Wir werden in dieser Arbeit jedoch nur diesen einfacheren und in der Praxis wichtigsten Fall betrachten. Die Mittelebene ist bei uns per Definition eben. (Präziser: Als Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 betrachtet,

hat A die konstante Krümmung Null.) In diesem Zusammenhang spricht man in der TM von ebenen Flächentragwerken. Wäre A gekrümmt, so würden wir Ω in der TM eine Schale nennen.

Weiter unterscheidet man in der TM ebene Flächentragwerke nach ihrem Belastungszustand. Ein ebenes Flächentragwerk, das nur parallel zur Mittelebene belastet wird, nennt man Scheibe. Ein ebenes Flächentragwerk, das nur senkrecht zur Mittelebene belastet wird, nennt man Platte. Wir werden zunächst beliebige Volumenbelastungen zulassen und in Abschnitt 6 sehen, wie unser ursprüngliches Problem sich in ein Platten- und ein Scheibenproblem entkoppelt, womit dann klar ist, warum die Unterscheidung nach Belastungszuständen in der TM angebracht ist.

Vor dem modellierungstechnischen Hintergrund eines ebenen Flächentragwerkes ist es sinnvoll, A als beschränktes Gebiet anzunehmen. Die Annahme $\partial A \in C^{0,1}$ hingegen ist eine technische Annahme und außerdem nicht sonderlich anschaulich. Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass – grob gesprochen – jedoch nahezu jedes vor dem modellierungstechnischen Hintergrund sinnvolle Gebiet zulässig ist. Salopp ausgedrückt, sind alle Gebiete mit stückweise glattem Rand zulässig. Ecken und Kanten sind in \mathbb{R}^2 erlaubt, sofern sie nicht beliebig spitz (Null-Grad-Winkel) werden. Die letzten beiden Punkte von Definition 6 schließen zudem aus, dass das Gebiet auf beiden Seiten seines Randes liegen kann, was die Behandlung von „Rissen“ (mit Flächenmaß Null) ausschließt. „Löcher“ (mit positivem Flächenmaß) sind hingegen erlaubt, sofern ihr Rand nicht die obigen Punkte verletzt.

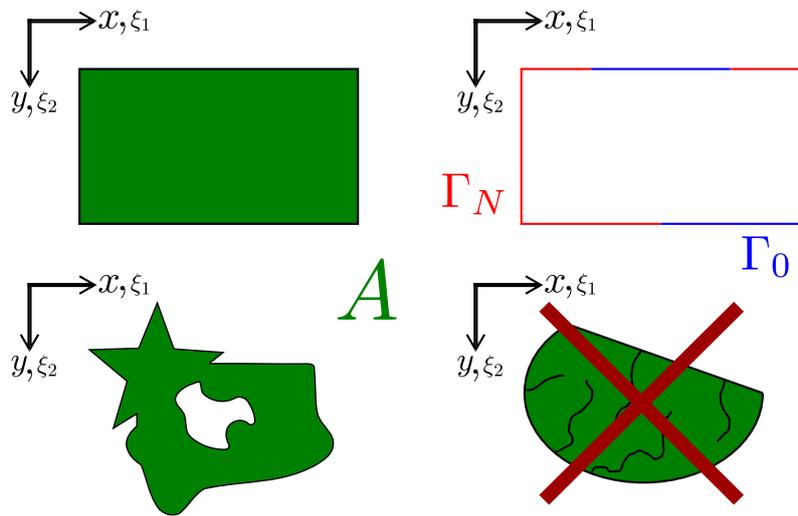


Abbildung 1: Links: Zwei als Mittelebene zulässige Gebiete. Oben rechts: Eine disjunkte Zerlegung des Randes. Unten rechts: Eine aufgrund von „Rissen“ unzulässige Mittelebene.

Wir führen den Plattenparameter c als

$$c := \frac{h}{\sqrt{12}a}$$

ein. Er ist eine dimensionslose Kennzahl, welche die „Dünnheit“ der Platte charakterisiert. Der Ausdruck *dimensionslos* bezieht sich darauf, dass c die physikalische Einheit [1] hat, da sowohl a als auch h die physikalische Einheit Länge haben. Wir nehmen c dabei, durch den modellierungstechnischen Hintergrund motiviert, als eine sehr kleine Größe $c \ll 1$ an. Ab Kapitel 6 werden wir von dieser Annahme starken Gebrauch machen, um zu einem endlichen System partieller Differentialgleichungen (kurz: PDEs) zu gelangen. Die unintuitive $\sqrt{12}$ in der Definition hat historische Gründe, welche durch die Kirchhoffsche Plattentheorie bedingt sind. Wir werden in Abschnitt 7.3 sehen, warum es zu dieser Definition kam.

Um später Randbedingungen an Ω formulieren zu können, setzen wir eine disjunkte Zerlegung des Randes in zwei Teile voraus. $\partial\Omega_0$ wird später der Randteil der Verschiebungsrandbedingungen und $\partial\Omega_N$ der Teil der Krastrandbedingungen sein. Aus technischen Gründen setzen wir weiter voraus, dass die Randteile offen seien sollen. *Offen* bezieht sich in diesem Fall auf die Relativtopologie auf dem Rand.

Definition 9 (Offene Teilmengen des Randes)

Für eine Menge M heißt $\Gamma \subset \partial M$ genau dann offen, falls ein $G \subset M$ offen existiert mit

$$\Gamma = G \cap \partial M.$$

Formal: Sei $\Gamma_0 \neq \emptyset$ offen und Γ_N offen derart, dass

$$\partial A = \overline{\Gamma_0} \cup \overline{\Gamma_N}, \quad \Gamma_0 \cap \Gamma_N = \emptyset.$$

Sei weiter

$$\partial\Omega_0 = \Gamma_0 \times \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right), \quad \partial\Omega_N = \Gamma_N \times \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right) \cup A \times \left\{-\frac{h}{2}\right\} \cup A \times \left\{\frac{h}{2}\right\}$$

(siehe Abb. 2). Offenbar sind $\partial\Omega_0$ und $\partial\Omega_N$ offen mit

$$\partial\Omega = \overline{\partial\Omega_0} \cup \overline{\partial\Omega_N}, \quad \partial\Omega_0 \cap \partial\Omega_N = \emptyset.$$

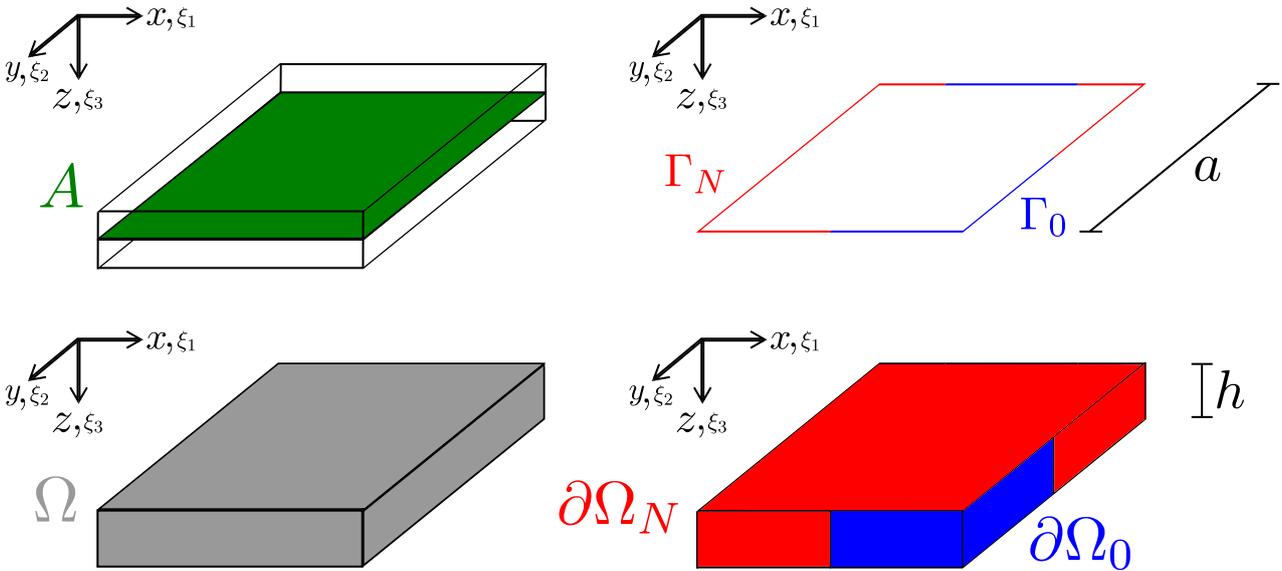


Abbildung 2: Der Zusammenhang zwischen A und Ω und deren Rändern. Linker Rand: Längenabmessungen im ξ -Koordinatensystem. a wurde als längste Seitenkante gewählt.

Man beachte, dass aufgrund von $\Gamma_0 \neq \emptyset$ und offen stets ein Flächenstück mit positivem Flächenmaß existiert, an dem Verschiebungsrandbedingungen vorgegeben sind, was sich als wesentliche Voraussetzung für die Eindeutigkeit einer Lösung herausstellen wird. Anschaulich ist klar, dass bei einer Platte, die salopp gesprochen „nirgends festgehalten“ (nicht gelagert) wird, die Lösung des Verschiebungsfeldes nur bis auf Starkkörperverschiebungen bestimmt sein kann. Dass die Deckflächen der Platte per Definition zu $\partial\Omega_N$ gehören, ist eine weitere plattenspezifische Eigenschaft: Eine Platte wird (höchstens) am Seitenrand gelagert.

1.6 Die dimensionslosen Koordinaten

Zusätzlich zu den ξ -Koordinaten führen die dimensionslosen x -Koordinaten $x_i := \xi_i/a$ mit der Vereinbarung

$$x := x_1, y := x_2, z := x_3$$

ein. Wir entdimensionieren dabei alle Koordinaten mit a , analog zum Vorgehen in den Arbeiten von R. Kienzler, und nicht etwa ξ_3 mit h . Einige Schlüsse können wir dadurch völlig analog zu dessen Arbeiten ziehen.

Natürlich lassen sich die physikalischen Größen unserer Theorie in beiden Koordinatensystemen ausdrücken, jedoch wird eine physikalische Größe in unterschiedlichen Koordinatensystemen durch unterschiedliche Funktionen beschrieben.

Zunächst benötigen wir ein Hilfsmittel, um überhaupt unabhängig vom gewählten Koordinatensystem über Punkte in Ω sprechen zu können. Wir legen also ein Referenzkoordinatensystem fest, welches jedem Punkt in Ω einen Vektor $p \in \mathbb{R}^3$ zuordnet. In diesem Zusammenhang spricht man von der Referenzkonfiguration von Omega. Unser ξ -Koordinatensystem ist dann eine Abbildung $\xi : \Omega \rightarrow \Omega_\xi \subset \mathbb{R}^3$ mit $p \mapsto \xi(p)$. Ω_ξ heißt dann die Parametrisierung von Ω in ξ -Koordinaten. Analog sei Ω_x die Parametrisierung von Ω in x -Koordinaten. Für eine Funktion $F : \Omega_\xi \rightarrow \mathbb{R}$ meint $F(\xi)$, dass F vom Vektor ξ also von allen drei Koordinaten von ξ abhängt. Analoges gilt für Funktionen $\tilde{F} : \Omega_x \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. $\tilde{F}(x)$ meint ebenfalls das \tilde{F} von allen drei Koordinaten von x abhängt. Da nie etwas nur von der ersten Koordinate x_1 abhängen wird, ist die doppelte Belegung von x unproblematisch. Beschreiben F und \tilde{F} die selbe Größe, so muss für jeden Punkt p in Ω $F(\xi(p)) = \tilde{F}(x(p))$ gelten. Ist eine differenzierbare Funktion $F(\xi)$ gegeben und sei $\tilde{F}(x)$ die Funktion, die durch Einsetzen von $\xi_i = ax_i$ aus F entsteht, für die also $F(\xi) = F(ax) = \tilde{F}(x)$ gilt, so gilt nach der Produktregel für die Ableitung

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_j}(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_j}(F(x(\xi))) = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial F}{\partial x_l}(x(\xi)) \frac{\partial x_l}{\partial \xi_j}(\xi) = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_l}(x) \frac{1}{a} \delta_{lj} = \frac{1}{a} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_j}(x).$$

Wir wollen dabei im Folgenden auf die Indizierung der Funktion beim Koordinatenwechsel mittels Schlangenlinie verzichten, d.h. F bezeichnet in diesem Sinne eine Größe und nicht eine bestimmte zu einer konkreten Parametrisierung gehörende Funktion. Mit dieser Vereinbarung können wir für die obige Formel die Ingenieurschreibweise

$$(\bullet)_{,i} := \frac{\partial}{\partial x_i}(\bullet) = a \frac{\partial}{\partial \xi_i}(\bullet) =: a(\bullet)_{|i} \quad (1)$$

benutzen, wobei \bullet für eine beliebige physikalische Größe steht.

Sei nun F auf Ω integrierbar. Für die Integration der Funktion F nach einem spezifischen ξ_i , hier exemplarisch ξ_2 , gilt nach der Substitutionsregel für festes (ξ_1, ξ_3) und $(\xi_1, g_1, \xi_3), (\xi_1, g_2, \xi_3) \in \Omega_\xi$

$$\int_{g_1}^{g_2} F(\xi_2) d\xi_2 = \int_{g_1}^{g_2} F \circ x_2(\xi_2) d\xi_2 = a \int_{g_1}^{g_2} F \circ x_2(\xi_2) \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}(\xi_2) d\xi_2 = a \int_{g_1/a}^{g_2/a} \hat{F}(\xi_1, x_2, \xi_3) dx_2. \quad (2)$$

Nach dem Satz von Fubini gilt dann auch

$$\int_{\Omega_\xi} F(\xi) dV_\xi = a^3 \int_{\Omega_x} \tilde{F}(x) dV_x,$$

beziehungsweise

$$\int_{\Omega_\xi} \bullet dV_\xi = a^3 \int_{\Omega_x} \bullet dV_x,$$

wobei \bullet wieder für eine beliebige physikalische Größe steht.

2 Lineare Elastostatik

In diesem Kapitel wollen wir lediglich kurz die dreidimensionalen Grundgleichungen der linearen Elastostatik zusammentragen. Grundkenntnisse in diesem Gebiet müssen wir voraussetzen, da eine Einführung den Rahmen der Arbeit sprengen würde. Eine Einführung für Ingenieure liefert Kienzler und Schröder (2009). Aus Sicht der Mathematik sei Zeidler (1997) genannt.

2.1 Definitionen und Notation

Die Größen der linearen Elastostatik sind Tensorfelder.

Definition 10 (*Basiswechselmatrix*)

Es seien $e := \{e_1, \dots, e_n\}$ und $\tilde{e} := \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ zwei Basen des \mathbb{R}^n und $\underline{e} := [e_1, \dots, e_n]$ und $\underline{\tilde{e}} := [\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n]$ die Matrizen in $\mathbb{R}^{n \times n}$, deren Spaltenvektoren die Basisvektoren der entsprechenden Basis sind. Die Basiswechselmatrix $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ von der Basis e zur Basis \tilde{e} ist die Matrix für die gilt:

$$\underline{\tilde{e}} = \underline{A} \underline{e}.$$

Definition 11 (*Tensorfelder*)

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und nicht leer.

- Ein Tensorfeld nullter Stufe oder auch ein skalares Feld f ist eine Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}$.
- Ein Tensorfeld erster Stufe t ist eine Zuordnung $t : G \rightarrow \mathbb{R}^n$, die jedem Punkt $p \in G$ (bezogen auf eine feste Referenzkonfiguration, d.h. p hängt nicht vom Koordinatensystem ab) ein vom Koordinatensystem abhängiges n -Tupel $(t_i)_{i \in \{1, \dots, n\}} \in \mathbb{R}^n$ zuweist, welches sich unter einer orthogonalen Basistransformation mit Basiswechselmatrix $A = (a_{ij})$ ($A^T A = A A^T = id_{\mathbb{R}^{n \times n}}$) von der Basis e zur Basis \tilde{e} wie folgt verhält:

$$\tilde{t}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j,$$

wobei $\tilde{t} = (\tilde{t}_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ das n -Tupel zur Basis \tilde{e} und $t = (t_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ das n -Tupel zur ursprünglichen Basis e ist.

- Ein Tensorfeld m -ter Stufe t , wobei $m \in \mathbb{N}$ ist, ist eine Zuordnung $t : G \rightarrow \mathbb{R}^{n^m}$, die jedem Punkt $p \in G$ ein vom Koordinatensystem abhängiges Tupel $(t_{i_1, \dots, i_m})_{i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\}} \in \mathbb{R}^{n^m}$ zuweist, welches sich unter einer orthogonalen Basistransformation mit Basiswechselmatrix $A = (a_{ij})$ ($A^T A = A A^T = id_{\mathbb{R}^{n \times n}}$) von der Basis e zur Basis \tilde{e} wie das assoziierte Produkt von n -Tupeln

$$t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_m}$$

verhält. Z.B. gilt für einen Tensor zweiter Stufe

$$\tilde{t}_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 a_{ik} a_{jl} t_{kl}.$$

Bemerkung

- Die Definition unserer Tensorfelder wird oft auch als Definition eines Tensors angegeben, vor allem in der TM. Auch wir wollen im Folgenden kurz von Tensoren reden. Bei anderen Autoren ist mit einem Tensor ein Tensorfeld an einem bestimmten festen Punkt gemeint.
- Ein skalares Feld ist bezogen auf eine feste Referenzkonfiguration unabhängig vom konkret gewählten Koordinatensystem. Skalare Felder werden in diesem Zusammenhang auch Invarianten genannt.
- Unsere Definition des Tensors ist mit der Definition des Tensors, welche zwischen kovarianten Indizes und kontravarianten Indizes unterscheidet (vgl. Zeidler, 1997, Definition 74.4) kompatibel, da wir uns auf ein kartesisches Ursprungskoordinatensystem ξ festgelegt haben und nur orthogonale Koordinatentransformationen (also geometrisch Drehungen und Spiegelungen) zulassen, die nur die Überführung in weitere kartesische Koordinatensysteme zulassen. Für den Spezialfall eines kartesischen Koordinatensystems entsprechen die metrischen Tensorfelder dem Kroneckertensor und die Christoffelsymbole sind identisch Null. (siehe Zeidler, 1997, Abschnitt 74.5)

Wir verwenden im Folgenden, sofern dies nicht explizit anders angegeben wird, die **Summenkonvention** in folgender Weise: Untere Indizes sind Tensorindizes, über die zu summieren ist, falls ein Index doppelt in einem Produkt oder in Verbindung mit einer partiellen Ableitung benutzt wird. Für obere Indizes gilt die Summenkonvention **nicht**. Die lateinischen Indizes sind dabei aus der Menge $\{1, 2, 3\}$ und die griechischen aus der Menge $\{1, 2\}$. Ist ein Tensorindex in einer Gleichung nicht durch die Summenkonvention gebunden, so gilt die Gleichung für alle Indizes aus der entsprechenden Menge. Eine Ausnahme bildet eine Notation der Form $v = (v_i)$. Hier ist v ein Tensor erster Stufe und die v_i sind seine drei Komponenten.

Wir benutzen im Weiteren die folgenden Bezeichnungen, wobei alle Tensoren über Ω definiert sind:

- Ω - der Körper (bei uns eine Platte) in (undeformierter) Referenzkonfiguration.
 Ω_ξ, Ω_x - Konkrete Parametrisierung von Ω in ξ - bzw. x -Koordinaten.
- $u = (u_i)$ - das Verschiebungsfeld.
Dieses gibt für jeden Punkt seine Verschiebung im deformierten Zustand des Körpers gegenüber der Referenzkonfiguration an.
- $\varepsilon = (\varepsilon_{ij})$ - der linearisierte Verzerrungstensor.
Siehe (4) unten.
- $\sigma = (\sigma_{ij})$ - der Cauchy-Spannungstensor.
 σ sei bei uns symmetrisch. D.h. $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.
Der Tensor σ beschreibt für einen festen Punkt p den Spannungszustand in diesem Punkt eindeutig. Multiplikation von σ mit einem Normaleneinheitsvektor liefert den Spannungsdichtevektor im Punkt p , der bei einem Schnitt mit der Schnittebene, auf der der Normaleneinheitsvektor senkrecht steht, entsteht.
- $f = (f_i)$ - die (Volumen)-Dichte der auf den Körper wirkenden Kräfte.
- $E = (E_{ijrs})$ - der Elastizitätstensor.
- $n = (n_i)$ - der äußere Normaleneinheitsvektor ($\|n\| = 1$) auf dem Rand des Körpers $\partial\Omega$.

- $\delta = (\delta_{ij}), \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ - Kroneckertensor (Einheitstensor).

2.2 Die Grundgleichungen der linearen Elastostatik

Da wir ein **statisches**, also von der Zeit unabhängiges Problem betrachten wollen, setzen wir voraus, dass alle Funktionen unabhängig von der Zeit sind. In diesem Fall vereinfacht sich die allgemeine Bewegungsgleichung der Kontinuumsmechanik zu der **Gleichgewichtsbedingung** der Elastostatik (vgl. Zeidler, 1997, Abschnitt 61.5f)

$$\operatorname{div}(\sigma) + f = 0 \quad f.a. x \in \Omega.$$

Für unser kartesisches Koordinatensystem ξ erhalten wir

$$\sigma_{ij|j} + f_i = 0 \quad f.a. \xi \in \Omega_\xi. \quad (3)$$

Die Symmetrie des Spannungstensors σ kann man auch als Teil der Gleichgewichtsbedingung verstehen, da sie in der Ingenieurliteratur üblicherweise aus dem Momentengleichgewicht an einem infinitesimalen Volumenelement gefolgert wird, unter der Voraussetzung, dass keine Punktmomente zugelassen sind.

Der symmetrische, linearisierte Verzerrungstensor ist folgendermaßen definiert

$$\varepsilon_{ij} := \frac{1}{2}(u_{i|j} + u_{j|i}) \quad f.a. \xi \in \Omega_\xi. \quad (4)$$

Diese Gleichung wird in der TM üblicherweise als **Kinematische Bedingung** bezeichnet (obwohl wir uns innerhalb der Statik befinden). Der linearisierte Verzerrungstensor wird in der Literatur entweder direkt definiert oder aus der Linearisierung des Green-Lagrange-Verzerrungstensors beziehungsweise des Almansi-Euler-Verzerrungstensors gewonnen. Alle Verzerrungstensoren sind dabei symmetrisch. Bei uns ist der linearisierte Verzerrungstensor offenbar per Definition symmetrisch.

Des weiteren brauchen wir ein **Materialgesetz**, das Spannungen und Verzerrungen miteinander in Verbindung bringt. Für einen **linear elastischen** Körper gilt per Definition ein Materialgesetz der Form

$$\sigma_{ij} = E_{ijrs}\varepsilon_{rs} \quad f.a. x \in \Omega. \quad (5)$$

Der Elastizitätstensor erfüllt dabei die Symmetrieeigenschaften

$$E_{ijrs} = E_{jirs}, \quad E_{ijrs} = E_{ijsr}, \quad E_{ijrs} = E_{rsij}. \quad (6)$$

Die ersten beiden Symmetrien gelten offenbar aufgrund der Symmetrien von σ und ε . Die letzte Symmetrie ist äquivalent zu der Existenz einer elastischen Potentialdichte pro Volumen. (siehe Kienzler und Schröder, 2009, 4.2.21 bis 4.2.23)

Bei der üblichen Problemstellung der linearen Elastostatik werden die Volumenkraftdichte f und der Elastizitätstensor E als bekannt vorausgesetzt, so dass mit (3) bis (5) 15 linear unabhängige skalare Feldgleichungen für die 15 Unbekannten (3 Komponentenfunktionen von u , und je 6 linear unabhängige Komponentenfunktionen von σ und ε) zur Verfügung stehen.

Zur Definition der Randbedingungen hatten wir den Rand bereits disjunkt zerteilt (vgl. Seite 9).

$$\partial\Omega = \overline{\partial\Omega_0} \cup \overline{\partial\Omega_N}, \quad \partial\Omega_0 \cap \partial\Omega_N = \emptyset.$$

Auf $\partial\Omega_0$ wollen wir Verschiebungsrandbedingungen, also das Verschiebungsfeld u vorgeben, während wir auf $\partial\Omega_N$ Kraftrandbedingungen, also einen Kraftdichtevektor t , mittels $t_i = \sigma_{ij}n_j$, vorgeben.

$$u_i = u_{0i} \text{ auf } \partial\Omega_0 \quad (7)$$

$$\sigma_{ij}n_j = g_i \text{ auf } \partial\Omega_N \quad (8)$$

Erfüllt (u, σ, ε) (3) bis (5) und (7) bis (8) für gegebenes f , u_0 und g so nennt man (u, σ, ε) eine Lösung des Systems (3) bis (5).

Wenn wir (3) bis (5) ineinander einsetzen und die Symmetrien (6) ausnutzen, können wir das Problem nur in dem Verschiebungsfeld u formulieren. Wir erhalten die sogenannten Navier-Lamé-Gleichungen

$$(E_{ijrs}u_{r|s})_{|j} + f_i = 0. \quad (9)$$

(8) wird mit Einsetzen von (4) und (5) unter Ausnutzung der Symmetrien (6) zu

$$E_{ijrs}u_{r|s}n_j = g_i \text{ auf } \partial\Omega_N. \quad (10)$$

Definition 12 (Klassische Lösung)

Ein Vektorfeld $u \in [C^2]^3(\Omega)$ (d.h. $u_i \in C^2(\Omega)$), das die Randbedingungen (7) und (10) für gegebenes u_0 und g erfüllt und (9) für gegebenes f löst, heißt Lösung des klassischen Problems der linearen Elastostatik.

Die konkrete Struktur der Navier-Lamé-Gleichungen (9) ist dabei natürlich vom speziell gewählten Elastizitätsgesetz (5), d.h. vom konkreten Elastizitätstensor abhängig.

2.3 Materialgesetze

In diesem Abschnitt wollen wir kurz erklären, was man unter einem linear elastischen, monotropen Material versteht und gehen darauf ein, was die Vorgabe der Monotropie für die konkrete Struktur des Elastizitätstensors E bedeutet.

Wie schon erwähnt, verbindet der Elastizitätstensor die Spannungen mit den Verzerrungen (5). Seine Komponenten E_{ijrs} können im Allgemeinen von den Koordinaten ξ_i abhängen. Trotzdem wollen wir im Folgenden, wie in der Literatur üblich, die Komponenten des Elastizitätstensors als Elastizitätskonstanten bezeichnen. Als Tensor vierter Stufe hat der Elastizitätstensor $3^4 = 81$ Komponenten, von denen jedoch aufgrund der Symmetrien des Elastizitätstensors (6) nur 21 voneinander unabhängig sind. Somit ist es möglich, mittels der Einführung des „Spannungsvektors“

$$\underline{\sigma} := [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}]^T, \quad (11)$$

des „Verzerrungsvektors“

$$\underline{\varepsilon} := [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{31}]^T \quad (12)$$

und der Elastizitätsmatrix

$$\underline{\underline{E}} := \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & E_{1112} & E_{1123} & E_{1113} \\ & E_{2222} & E_{2233} & E_{2212} & E_{2223} & E_{2213} \\ & & E_{3333} & E_{3312} & E_{3323} & E_{3313} \\ S & & & E_{1212} & E_{1223} & E_{1213} \\ & Y & & & E_{2323} & E_{2313} \\ & & M. & & & E_{1313} \end{bmatrix} \quad (13)$$

das Elastizitätsgesetz (5) in der Form

$$\underline{\sigma} = \underline{E} \underline{\varepsilon} \quad f.a. x_k \in \Omega \quad (14)$$

darzustellen. Das Produkt in (14) ist dabei das normale Matrix-Vektor-Produkt. Die verkürzende Schreibweise in (13) für eine symmetrische Matrix werden wir noch häufiger benutzen. Die Äquivalenz der Darstellungen (5) und (14) lässt sich durch Nachrechnen trivial verifizieren (siehe A(1)).

Ein Material mit 21 voneinander unabhängigen Elastizitätskonstanten nennt man **aelotrop**. Wir machen bis Abschnitt 6 keine konkreten Annahmen, welches Materialgesetz benutzt wird, so dass alle Gleichungen auch für aelotropes Material gelten. Dann wollen wir jedoch ein für die Praxis relevanteres und einfacheres Material untersuchen: Ein **monotropes** Material.

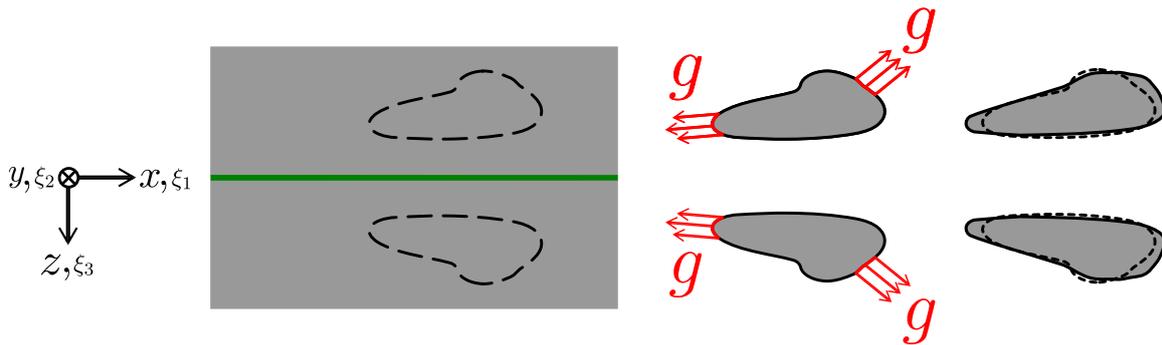


Abbildung 3: Illustration der Monotropie. Links: Man sieht einen Teil eines Schnittes durch die Platte um die Monotropieebene (grün). Es werden zwei Proben symmetrisch zu dieser Ebene aus dem Körper geschnitten. Mitte: Es werden gespiegelt gleiche Belastungen, hier Randlasten die nur auf einem Teil des Randes wirken, an die Proben angelegt. Rechts: Die Proben erfahren die gespiegelt gleiche Deformation.

In einem monotropen Material haben zwei symmetrisch zur Monotropieebene aus dem Körper herausgeschnittene Proben dasselbe Materialverhalten, d.h. sie würden sich unter (gespiegelt) gleicher Belastung gleich deformieren (siehe Abb. 3). Wir wählen hier aufgrund der hohen Praxisrelevanz (z.B. bei Sandwich-Verbundwerkstoffen) die Mittelebene A als Symmetrieebene. Aufgrund der postulierten Symmetrie darf sich der Elastizitätstensor unter der Koordinatentransformation, die der Spiegelung an der ξ_1, ξ_2 -Ebene entspricht, die also das Vorzeichen des ξ_3 -Basisvektors ändert, nicht ändern. Zu dieser Transformation gehört die Basiswechselmatrix

$$\underline{A} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nach den Tensortransformationsgesetz (siehe Definition 11) ändert unter dieser Transformation jedoch jede Tensorkomponente, die eine ungerade Anzahl Tensorindizes gleich drei hat, das Vorzeichen, so dass diese Komponenten des Elastizitätstensors Null sein müssen. Demnach gilt für monotropes

Material:

$$\underline{\underline{E}} := \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & E_{1112} & 0 & 0 \\ & E_{2222} & E_{2233} & E_{2212} & 0 & 0 \\ & & E_{3333} & E_{3312} & 0 & 0 \\ S & & & E_{1212} & 0 & 0 \\ & Y & & & E_{2323} & E_{2313} \\ & & M. & & & E_{1313} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Es verbleiben also nur 13 unabhängige Materialkonstanten.

Monotropie schließt dabei einige in der Praxis sehr relevante Spezialfälle mit ein, auf die wir im Folgenden noch kurz eingehen wollen. Verlangt man eine zweite Monotropieebene, die senkrecht zur ersten steht, so vereinfacht sich das Materialgesetz wie folgt:

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & E_{2222} & E_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & E_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ S & & & E_{1212} & 0 & 0 \\ & Y & & & E_{2323} & 0 \\ & & M. & & & E_{1313} \end{bmatrix}.$$

Dabei ist es egal, welche Ebene man wählt; das Material ist zur dritten orthogonalen Ebene automatisch ebenfalls symmetrisch. Ein solches Material nennt man **orthotrop**. Es verbleiben 9 unabhängige Materialkonstanten.

Fordert man anstelle der Spiegelsymmetrie bei Monotropie die Invarianz gegenüber der Rotation um eine Koordianatenachse, so spricht man von **transversaler Isotropie**. Da ein solches Material dann spiegelsymmetrisch bezüglich der durch die zwei übrigen Koordinatenachsen gegebenen Ebenen ist, ist ein solcher Werkstoff insbesondere orthotrop. Man kann jedoch zeigen, dass sich die Elastizitätsmatrix weiter vereinfacht (siehe Kienzler und Schröder, 2009, S. 125-128), z.B. bei transversaler Isotropie bezüglich der x_3 Achse zu

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & & 0 & 0 & 0 \\ & E_{1111} & E_{1133} & & 0 & 0 & 0 \\ & & E_{3333} & & 0 & 0 & 0 \\ S & & & \frac{1}{2}(E_{1111} - E_{1122}) & 0 & 0 & \\ & Y & & & E_{2323} & 0 & \\ & & M. & & & & E_{2323} \end{bmatrix}$$

mit 5 unabhängigen Materialkonstanten. Fordert man die Rotationsinvarianz bezüglich einer zusätzlichen orthogonalen Achse, ist das Material bereits invariant gegen Rotationen bezüglich jeder beliebigen

Achse. Man spricht dann von **Isotropie** und erhält eine Elastizitätsmatrix der Form

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & E_{1111} & E_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & & E_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ S & & & \frac{1}{2}(E_{1111} - E_{1122}) & 0 & 0 \\ & Y & & & \frac{1}{2}(E_{1111} - E_{1122}) & 0 \\ & & M. & & & \frac{1}{2}(E_{1111} - E_{1122}) \end{bmatrix}$$

mit 2 unabhängigen Materialkonstanten. Gebräuchlich ist eine Angabe dieses Materialgesetzes in den drei Konstanten Elastizitätsmodul E , Schubmodul G und Querkontraktionszahl ν , die allerdings z.B. aufgrund der Beziehung $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ (vgl. Kienzler und Schröder, 2009, Tabelle 4.1) nicht unabhängig voneinander sind. Es gilt dann:

$$E_{1111} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad E_{1122} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \frac{1}{2}(E_{1111} - E_{1122}) = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

(siehe Kienzler und Schröder, 2009, Formel 4.3.44).

Bemerkung

Leider ist die Definition von Spannungsvektor und Verzerrungsvektor in der Literatur nur bis auf eine Permutation der letzten drei Komponenten eindeutig, so dass auch die angegebenen Elastizitätsmatrizen nur bis auf Permutationen übereinstimmen. Unsere Definitionen stimmen beispielsweise mit Altenbach u. a. (1998), jedoch nicht mit Kienzler und Schröder (2009) überein. Falls die zu vertauschenden Einträge in den Elastizitätsmatrizen jedoch aufgrund von Materialsymmetrien übereinstimmen, so ist dieser Unterschied nicht relevant. Für Isotropie stimmt unsere Elastizitätsmatrix exakt mit der in Kienzler und Schröder (2009) überein.

3 Die schwache Formulierung

In diesem Kapitel wollen wir das Problem der linearen Elastostatik in schwacher Formulierung aufstellen und ein Existenz- und Eindeutigkeitsresultat zeigen. Hierfür müssen wir zunächst einige wichtige Begriffe und Funktionenräume einführen.

3.1 Sobolevräume

Definition 13 (*Schwache Sobolev-Ableitung*)

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ nicht leer und offen, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ein Multiindex, $n \in \mathbb{N}$ und $F \in L_2(G)$. $D^{(\alpha)}F \in L_2(G)$ heißt schwache Sobolev-Ableitung von F der Ordnung $|\alpha|$, falls

$$\forall \phi \in C_0^\infty(G) : \left(D^{(\alpha)}F, \phi \right)_{L_2} = (-1)^{|\alpha|} (F, D^\alpha \phi)_{L_2}$$

gilt.

Schwache Sobolev-Ableitungen (im Folgenden auch kurz *schwache Ableitungen* genannt) sind (bis auf Änderungen auf Mengen vom Maß Null) eindeutig bestimmt und für eine Funktion $F \in C^m(G)$ sind alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung m ebenso schwache Sobolev-Ableitungen (siehe z.B. Zeidler, 1990a, Proposition 21.3). Somit ist eine Unterscheidung von $D^{(\alpha)}$ und D^α nicht notwendig.

Definition 14 (Sobolevräume)

Sei für ein $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und nicht leer $H^m(G)$ der Sobolevraum aller $F \in L_2(G)$, für die alle schwachen Sobolev-Ableitungen bis zur Ordnung m existieren.

$H^m(G)$ ist mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^m} := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \int_G D^\alpha u D^\alpha v \, dV$$

ein Hilbertraum (siehe z.B. Werner, 2007, Satz V.1.13). Die assoziierte Norm ist

$$\|u\|_{H^m} = \sqrt{(u, u)_{H^m}}.$$

Eine äquivalente Definition der Sobolevräume liefert der folgende Satz.

Satz 15. Äquivalente Definition der Sobolevräume

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, dann gilt:

$$H^m(G) = \overline{\left\{ f \in C^m(G) \mid \|f\|_{H^m(G)} < \infty \right\}},$$

wobei sich der Abschluß auf die Norm $\|\bullet\|_{H^m(G)}$ bezieht. Ist $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial G \in C^{0,1}$, so gilt

$$H^m(G) = \overline{C^m(\overline{G})}.$$

Beweis: Alle Argumente finden sich in Adams (1975). Die erste Aussage ist ein Spezialfall von Theorem 3.16. Die zweite Aussage ist ein Spezialfall von Theorem 3.18, wobei für G noch die „segment property“ (vgl. Adams, 1975, S. 54) nachzuweisen ist. Für ein beschränktes Gebiet ist $\partial G \in C^{0,1}$ zur „strong local Lipschitz property“ von G äquivalent (siehe Adams, 1975, S. 66), welche die „segment property“ impliziert (siehe Adams, 1975, 4.7). Man beachte auch, dass $f \in C^m(\overline{G})$ die Beschränktheit der Funktion und aller Ableitungen (der Ordnung $\leq m$) und damit $\|f\|_{H^m(G)} < \infty$ impliziert. ■

Da Funktionen aus Sobolevräumen im allgemeinen nicht punktweise auswertbar sind, ist die Einschränkung von Sobolevfunktionen auf den Rand zunächst problematisch. Da wir später solchen Funktionen Randwerte vorschreiben wollen, untersuchen wir dies genauer.

Wir benötigen hierfür ein mathematisches Konstrukt, das wir besonders für die Ingenieure unter den Lesern zunächst kurz erläutern wollen.

Definition 16 (Einbettung)

Es seien X und Y zwei reelle (oder komplexe) Banachräume. Wir sagen X ist in Y eingebettet, in Zeichen

$$X \hookrightarrow Y,$$

falls ein linearer, injektiver Operator $j : X \longrightarrow Y$ existiert. In diesem Fall nennen wir j den Einbettungsoperator. Ist j zudem stetig oder kompakt, so nennen wir die Einbettung stetig oder kompakt.

Das Einbettungssymbol \hookrightarrow erinnert dabei absichtlich an das Teilmengensymbol \subset . Salop gesprochen ist die Einbettung die Verallgemeinerung der Teilmengenrelation für Funktionenräume. Falls tatsächlich $X \subset Y$ gilt, so ist die Identität ein Einbettungsoperator $id : X \longrightarrow Y$. Falls $X \hookrightarrow Y$ gilt, aber keine „echte“ Teilmengenrelation besteht, so ist es trotzdem möglich, aufgrund der Injektivität des Einbettungsoperators j , jedes Element $x \in X$ mit seinem Bild $j(x) \in Y$ zu identifizieren. Im

nächsten Satz tritt beispielsweise die Einbettung $H^m(G) \hookrightarrow C^j(\overline{G})$ auf. Man beachte, dass hier keine Teilmengenrelation bestehen kann, da Elemente aus $H^m(G)$ Äquivalenzklassen von Funktionen sind, während ein Element aus $C^j(\overline{G})$ eine einzelne Funktion ist.

Satz 17. Stetige Vertreter und der Spuroperator

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial G \in C^{0,1}$, dann gilt:

a) Für $m - j > n/2$ lässt sich jede Funktion aus einer Äquivalenzklasse von $H^m(G)$ mit Änderung auf einer Menge vom Maß Null zu einer Funktion in $C^j(\overline{G})$ verändern. (Anders formuliert: Jede Äquivalenzklasse aus $H^m(G)$ beinhaltet einen Vertreter in $C^j(\overline{G})$.) Die so definierte Einbettung $H^m(G) \hookrightarrow C^j(\overline{G})$ ist stetig.

b) Es existiert genau ein stetiger, linearer Operator

$$S : H^1(G) \longrightarrow L_2(\partial G)$$

mit der Eigenschaft

$$\forall u \in C^1(\overline{G}) : Su = u|_{\partial G}.$$

Beweis: (siehe Zeidler, 1990a, Theorem 21A) ■

Teil a) des oben stehenden Satzes garantiert uns, dass jede Funktion $f \in H^k(G)$ mit $k \geq 2$ auf einer Teilmenge $G \subset \mathbb{R}^n$ mit $n \leq 3$ einen stetigen Vertreter hat. Somit können wir wie üblich $u|_{\partial G}$ nutzen, um Randwerte für derartige Funktion vorzugeben. $H^1(G)$ bleibt in diesem Fall jedoch problematisch. Hier nutzen wir Teil b) des Satzes und verallgemeinern den Begriff der Randbedingungen, indem wir statt der nicht sinnvoll definierten Einschränkung der Funktion $f \in H^1(G)$ auf ∂G $Sf \in L_2(\partial G)$ nutzen, um Randwerte vorzugeben. Die Werte von Sf auf ∂G sind bis auf Mengen vom Oberflächenmaß Null eindeutig bestimmt, so dass sich Randbedingungen der Form

$$Sf(x) = 0 \text{ für fast alle } x \in \partial G$$

oder

$$Sf(x) = g(x) \text{ für fast alle } x \in \partial G \text{ (D.h.: } Sf = g \text{ im } L_2\text{-Sinne)}$$

für ein $g \in L_2(\partial G)$ realisieren lassen. Die „verallgemeinerten Randwerte“ von Sobolev-Funktionen werden in der Mathematik Spuren genannt. So nennen wir für ein $f \in H^1(G)$ $Sf \in L_2(\partial G)$ die Spur von f auf ∂G .

Wir werden uns nun noch über einen wichtigen Spezialfall Gedanken machen. Es sei $g \in H^2(\Omega)$. Dann hat g nach Satz 17 a) einen stetigen Vertreter $\hat{g} \in C^0(\overline{\Omega})$, welchen wir auf den Rand einschränken können. Nach Satz 17 b) hat g auch eine Spur Sg in $L_2(\partial\Omega)$. Aber nach der Aussage des Satzes 17 wissen wir a-priori nicht, dass die Spur mit der Einschränkung des Vertreters auf dem Rand übereinstimmt, da der Vertreter ja nicht in $C^1(\overline{\Omega})$ ist.

Lemma 18. Jedes $g \in H^2(\Omega)$ hat einen stetigen Vertreter $\hat{g} \in C^0(\overline{\Omega})$ für den gilt:

$$Sg(x) = \hat{g}(x) \text{ f.f.a. } x \in \partial\Omega$$

Beweis: Nach Satz 15 existiert eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $g_n \in C^2(\overline{\Omega})$, welche in der H^2 -Norm gegen g bzw. \hat{g} konvergiert. Aufgrund der Stetigkeit der Einbettung $H^2(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ gilt

$$\|g_n - \hat{g}\|_\infty \leq c \|g_n - \hat{g}\|_{H^2(\Omega)} = c \|g_n - g\|_{H^2(\Omega)},$$

was impliziert, dass die Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch in der Supremumsnorm und damit auch punktweise gegen \hat{g} konvergiert. Für jedes Folgenglied gilt dann $Sg_n = g_n|_{\partial\Omega}$. Wenn wir zum Grenzwert übergehen, erhalten wir

$$Sg = \hat{g}|_{\partial\Omega},$$

wobei wir den linken Grenzwert aufgrund der Stetigkeit des Spuroperators in diesen hineinziehen durften. Weiter ist für punktweise konvergente Funktionen offenbar die Einschränkung des Grenzwertes gleich dem Grenzwert der Einschränkungen der Folgenglieder. Man beachte, dass $Sg \in L_2(\partial\Omega)$ gilt. Somit stimmt die Spur der Funktion mit der Einschränkung des stetigen Vertreters für fast alle $x \in \partial\Omega$ überein. ■

Der Raum $L_2(\partial G)$ ist nicht der exakte Raum der Spuren der Funktionen in $H^1(G)$, da S i.A. nicht surjektiv ist. Das heißt, dass zwar jede Funktion in $H^1(G)$ eine Spur in $L_2(\partial G)$ hat, doch nicht jede Funktion in $L_2(\partial G)$ ist auch die Spur einer $H^1(G)$ Funktion. Der exakte Raum der Spuren wird ein Sobolevraum mit nicht ganzzahliger Ordnung sein, weshalb wir zunächst unsere Definition erweitern müssen.

Definition 19 (Spurräume mit $0 < k < 1$)

Sei $0 < k < 1$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial G \in C^{0,1}$. Wir setzen

$$f(b) := \int_{\partial G} \int_{\partial G} \frac{(b(x) - b(y))^2}{|x - y|^{n-1+2k}} dA dA$$

und

$$\|b\|_{H^k(\partial G)}^2 := \int_G b^2 dA + f(b).$$

Wir definieren $H^k(\partial G)$ als den Raum aller Funktionen $b \in L_2(\partial G)$ mit $\|b\|_{H^k(\partial G)} < \infty$.

$H^k(\partial G)$ wird mit der Norm $\|\bullet\|_{H^k(\partial G)}$ zu einem separablen und reflexiven Banachraum (siehe Zeidler, 1990b, Anhang A2(51a)).

Satz 20. Charakterisierung der Spuren

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $n \geq 2$ und $\partial G \in C^{0,1}$, dann gilt:

a) Für den Randwertoperator S ist die Abbildung

$$S : H^1(G) \longrightarrow H^{1/2}(\partial G)$$

linear, stetig und surjektiv.

b) Es existiert ein linearer, stetiger Operator

$$V : H^{1/2}(\partial G) \longrightarrow H^1(G),$$

so dass

$$V \circ S = id_{H^1(G)}$$

und

$$S \circ V = id_{H^{1/2}(\partial G)}.$$

Beweis: (siehe Zeidler, 1990b, Anhang A2(49)) ■

$H^{1/2}(\partial G) \subset L_2(\partial G)$ ist damit exakt der Raum der Spuren von $H^1(G)$. Da wir zwei Randteile ($\partial\Omega_0$ und $\partial\Omega_N$) mit unterschiedlichen Randbedingungen für jeden Teil des Randes haben, benötigen wir außerdem Funktionenräume auf Teilen des Randes.

Definition 21 (Funktionenräume auf Teilen des Randes)

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $n \geq 2$ und $\partial G \in C^{0,1}$. Weiter sei $\Gamma \subset \partial G$ offen und $\Gamma \neq \emptyset$. Wir definieren $H^k(\Gamma)$ als den Raum aller Funktionen, die man auf Funktionen $H^k(\partial G)$ erweitern kann und versehen ihn mit der Norm

$$\|g\|_{H^k(\Gamma)} = \inf_{\tilde{g}} \|\tilde{g}\|_{H^k(\partial G)},$$

wobei das Infimum über alle Erweiterungen zu bilden ist.

3.2 Existenz und Eindeutigkeit der schwachen Lösung

Nun können wir die für diese Arbeit wichtigen Funktionenräume

$$X := [H^1]^3(\Omega) \text{ und}$$

$$X_0 := \{v \in X \mid Sv_i = 0 \text{ auf } \partial\Omega_0\}$$

definieren. Der Raum X ist dabei der Raum der Funktionen, in dem jede der drei Komponentenfunktionen in $H^1(\Omega)$ ist. In X_0 ist zudem die Spur jeder Komponentenfunktion für fast alle $x \in \partial\Omega_0$ gleich Null. X ist mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_X := \sum_{i=1}^3 (u_i, v_i)_{L_2} + \sum_{i,j=1}^3 (u_{i|j}, v_{i|j})_{L_2}$$

ein Hilbertraum. Neben der assoziierten Norm

$$\|v\|_X = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \|v_i\|_{L_2}^2 + \sum_{i,j=1}^3 \|v_{i|j}\|_{L_2}^2}$$

ist wegen der Äquivalenz von Normen auf \mathbb{R}^n auch

$$\|v\| = \sum_{i=1}^3 \|v_i\|_{L_2} + \sum_{i,j=1}^3 \|v_{i|j}\|_{L_2}$$

eine Norm auf X . X_0 ist mit $(\bullet, \bullet)_X$ oder dem (auf X_0) äquivalenten Skalarprodukt

$$(u, v)_{X_0} := \sum_{i,j=1}^3 (u_{i,j}, v_{i,j})_{L_2}$$

ein Hilbertraum. Für letzteres ist die Eigenschaft $\partial\Omega_0 \neq \emptyset$ wesentlich, welche aufgrund der Offenheit von $\partial\Omega_0$ (vgl. Seite 9) auch ein positives Maß von $\partial\Omega_0$ impliziert (siehe auch Zeidler, 1990b, Anhang A2(53c)).

Wir wollen für das schwachen Problem dazu übergehen, das gesuchte Verschiebungsfeld u im Funktionenraum X zu suchen. Um zu motivieren, wie wir von der klassischen Formulierung (9) zur

schwachen gelangen, bilden wir das Skalarprodukt der Gleichung (9) mit einer Testfunktion $v \in X_0$ und integrieren über Ω , um formell partielle Integration anzuwenden. In das entstehende Randintegral setzen wir die Randbedingung (10) ein.

$$\int_{\Omega} (E_{ijrs} u_{r|s})_{|j} v_i + \int_{\Omega} f_i v_i = 0 \quad (16)$$

$$\text{PI} \implies \underbrace{\int_{\Omega} E_{ijrs} u_{r|s} v_{i|j}}_{=:B(u,v)} = \underbrace{\int_{\Omega} f_i v_i + \int_{\partial\Omega_N} g_i v_i}_{=:f(v)} \quad (17)$$

Definition 22 (Schwache Lösung)

Es seien g, f und u_0 gegeben. $u \in X$ heißt Lösung des schwachen Problems linearer Elastostatik, falls

$$\forall v \in X_0 : B(u, v) = f(v)$$

gilt und u die verallgemeinerten Verschiebungsrandbedingungen zu (7)

$$Su(x) = u_0(x) \text{ für fast alle } x \in \partial\Omega_0 \quad (18)$$

erfüllt.

Sei nun $u_0 \in [H^{1/2}]^3(\partial\Omega_0)$ gegeben. Wir wählen eine feste Erweiterung $\widehat{u}_0 \in [H^{1/2}]^3(\partial\Omega)$. Dann erfüllt $\widetilde{u}_0 := V\widehat{u}_0 \in X$ die verallgemeinerten Randbedingungen zu (7) und das schwache Problem ist äquivalent zu

$$\text{Ges.: } \tilde{u} \in X_0 : \forall v \in X_0 : B(\tilde{u} + \widetilde{u}_0, v) = f(v).$$

B ist offenbar eine Bilinearform, so dass sich dieses Problem wiederum zu

$$\text{Ges.: } \tilde{u} \in X_0 : \forall v \in X_0 : B(\tilde{u}, v) = \underbrace{f(v) - B(\widetilde{u}_0, v)}_{\tilde{f}(v)}$$

umformen lässt. Auf dieses homogenisierte Problem wollen wir den folgenden Satz anwenden, um ein Existenz- und Eindeutigkeitsresultat zu erhalten.

Satz 23. Minimierung quadratischer Probleme

Sei H ein reeller Hilbertraum, a eine symmetrische, stetige und koerzive Bilinearform und b eine stetige Linearform (jeweils auf H). Dann sind die Probleme

$$(I) \begin{cases} E(v) := 1/2a(v, v) - b(v) \\ \text{Ges.: } u \in H : E(u) = \inf_{v \in H} E(v) \end{cases}$$

$$(II) \{ \text{Ges.: } u \in H \forall v \in H : a(u, v) = b(v) \}$$

äquivalent und sie haben genau eine Lösung.

Präziser formuliert ist u sogar ein absolutes striktes Minimum von E , d.h.

$$\forall v \in H \setminus \{u\} : E(u) < E(v).$$

Beweis: Existenz und Eindeutigkeit:

Aufgrund der Stetigkeit und Koerzivität der Bilinearform a gibt es Konstanten c_1 und c_2 für die gilt:

$$\forall v \in H : c_1 \|v\|_H \leq \sqrt{a(v, v)} \leq c_2 \|v\|_H.$$

Somit ist die durch $\|\bullet\|_E = \sqrt{a(\bullet, \bullet)}$ gegebene Norm eine äquivalente Norm auf H . Per Definition ist damit $(u, v)_E := a(u, v)$ ein äquivalentes Skalarprodukt auf H . b ist eine stetige Linearform auf H und damit per Definition ein Element des Dualraums H^* . Nach dem Darstellungssatz von Fréchet-Riesz (siehe z.B. Werner, 2007, Theorem V.3.6) existiert dann genau ein $w \in H$ mit

$$a(v, w) = b(v) \text{ f.a. } v \in H.$$

Somit ist w die eindeutig bestimmte Lösung von (II).

Äquivalenz der Probleme:

(I) \implies (II)

Sei u die Lösung von (I) und $v \in H \setminus \{0\}$ beliebig aber fest. Weiter sei $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\phi(t) := E(u + tv).$$

Dann gilt unter Ausnutzung der Bilinearität und Symmetrie von a und der Linearität von b :

$$\phi(t) = \frac{1}{2}t^2 [a(v, v)] + t [a(u, v) - b(v)] + \left[\frac{1}{2}a(u, u) - b(u) \right].$$

ϕ ist offenbar ein Polynom zweiten Grades in t und somit insbesondere unendlich oft stetig differenzierbar. Die Bedingung, dass E ein absolutes striktes Minimum in u hat impliziert, dass ϕ ein absolutes striktes Minimum in 0 hat, was äquivalent zu

$$\frac{d^2\phi}{dt^2}(0) > 0 \text{ und } \frac{d\phi}{dt}(0) = 0$$

ist. Man beachte, dass $a(v, v) > 0$ für alle $v \in H \setminus \{0\}$ aufgrund der Koerzivität von a gilt. Dass u ein absolutes striktes Minimum von E ist, impliziert somit

$$a(u, v) = b(v) \text{ f.a. } v \in H \setminus \{0\}.$$

Da a ein äquivalentes Skalarprodukt ist und b eine stetige Linearform ist, gilt offenbar auch $a(u, 0) = 0 = b(0)$.

(II) \implies (I)

Sei u die Lösung von (II), dann gilt $E(u) = -1/2a(u, u)$ und wegen der Koerzivität von a auch

$$\forall v \in H \setminus \{u\} : E(v) - E(u) = \frac{1}{2}a(u - v, u - v) \geq \frac{1}{2}c \|u - v\|_H^2 > 0. \quad \blacksquare$$

Es bleiben die Eigenschaften von B und f nachzuweisen. Man beachte: Wenn f und B stetig sind, so ist auch \tilde{f} stetig.

Satz 24. Eigenschaften von f

Sei $g_i \in H^{1/2}(\partial\Omega_N)$ und $f_i \in L_2(\Omega)$, dann gilt:

- f ist linear,
- f ist stetig.

Beweis: f ist offensichtlich linear und wegen der Stetigkeit von S existiert für ein $v \in H^1(\Omega)$ eine Abschätzung der Form

$$\|Sv\|_{L_2(\partial\Omega)} \leq c_1 \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

wobei c_1 gerade die Operatornorm von S ist. Weiter ist die Einbettung $H^{1/2}(\partial\Omega_N) \hookrightarrow L_2(\partial\Omega_N)$ stetig (siehe Zeidler, 1990b, Anhang A2(51)), so dass für ein $v \in H^{1/2}(\partial\Omega_N)$ eine Abschätzung der Form

$$\|v\|_{L_2(\partial\Omega_N)} \leq c_2 \|v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega_N)}$$

gilt. Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt dann

$$\begin{aligned}
 |f(v)| &= \left| \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 f_i v_i dV + \int_{\partial\Omega_N} \sum_{i=1}^3 g_i v_i dA \right| \\
 &\leq \sum_{i=1}^3 |(f_i | v_i)_{L_2(\Omega)}| + \sum_{i=1}^3 |(g_i | v_i)_{L_2(\partial\Omega_N)}| \\
 &\leq \sum_{i=1}^3 \left(\|f_i\|_{L_2(\Omega)} \|v_i\|_{L_2(\Omega)} + \|g_i\|_{L_2(\partial\Omega_N)} \|v_i\|_{L_2(\partial\Omega)} \right) \\
 &\leq \sum_{i=1}^3 \left(\|f_i\|_{L_2(\Omega)} + c_1 c_2 \|g_i\|_{H^{1/2}(\partial\Omega_N)} \right) \|v_i\|_{H^1(\Omega)} \\
 &\leq \max_{i \in \{1,2,3\}} \left\{ \|f_i\|_{L_2(\Omega)} + c_1 c_2 \|g_i\|_{H^{1/2}(\partial\Omega_N)} \right\} \underbrace{\sum_{i=1}^3 \|v_i\|_{H^1(\Omega)}}_{\leq c_3 \|v\|_X},
 \end{aligned}$$

wobei wir für die c_3 -Abschätzung die Äquivalenz von Normen auf \mathbb{R}^n ausnutzen. ■

Um die Eigenschaften von B nachzuweisen, benötigen wir die Kornsche Ungleichung und ein Hilfslemma. Zunächst definieren wir dafür den Raum der Verschiebungsfelder, die keine Verzerrungen hervorrufen.

$$Y_0 := \{u \in X_0 | \forall i, j \in \{1, 2, 3\} : \varepsilon_{ij}(u) = 0 \text{ auf } \Omega\}$$

Da dieser ein abgeschlossener Untervektorraum des Hilbertraumes X_0 ist, gilt:

$$X_0 = Y_0 \oplus Y_0^\perp.$$

Satz 25. Kornsche Ungleichung

Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial G \in C^{0,1}$. Es gelte eine Randzerlegung der Form

$$\partial G = \overline{\partial G_1} \cup \overline{\partial G_2}, \quad \partial G_1 \cap \partial G_2 = \emptyset,$$

wobei ∂G_1 und ∂G_2 offene Teilmengen von ∂G seien. Weiter sei

$$H_0 := \left\{ v \in [H^1]^3(G) | S v_i = 0 \text{ auf } \partial G_1 \right\}, \quad V_0 := \{v \in H_0 | \forall i, j \in \{1, 2, 3\} : \varepsilon_{ij}(v) = 0 \text{ auf } G\}.$$

Dann gilt:

$$\exists c > 0 \quad \int_G \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(u) dV \geq c \|u\|_{H_0}^2 \quad f.a. u \in V_0^\perp$$

Beweis: (siehe Zeidler, 1997, Theorem 62.F) ■

Die Struktur des Raumes V_0 hat eine einfache physikalische Interpretation:

Falls $\partial G_1 = \emptyset$, so gilt:

$$u \in V_0 \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}^3 \quad u(x) = \alpha + \beta \times x.$$

Falls $\partial G_1 \neq \emptyset$, so gilt:

$$V_0 = \{0\}$$

(siehe Zeidler, 1997, Lemma 62.15 und 62.16). V_0 ist also der Raum der Starkkörperverschiebungen. Diese erfüllen die homogenen verallgemeinerten Verschiebungsrandbedingungen von H_0 nicht mehr, falls $\partial G_1 \neq \emptyset$ gilt. In unserem Fall gilt also $Y_0 = \{0\}$.

Lemma 26. Sei \underline{E} reell symmetrisch positiv definit (s.p.d.) für alle $x \in \bar{\Omega}$. Die Komponenten $\underline{E}_{ij} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ seien entweder stetig, oder sie nehmen auf $\bar{\Omega}$ nur endlich viele diskrete Werte in \mathbb{R} an, dann existiert

$$\lambda_{min} := \min_{x \in \bar{\Omega}} \min \{ \lambda(x) | \lambda(x) \text{ ist ein Eigenwert von } \underline{E}(x) \},$$

und es gilt $\lambda_{min} > 0$.

Beweis: Da \underline{E} s.p.d. ist (für alle $x \in \bar{\Omega}$), sind alle Eigenwerte reell und positiv, womit das innere Minimum von λ_{min} sinnvoll definiert ist und offenbar existiert.

Falls die Komponenten von \underline{E} und damit auch $\underline{E} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ nur endlich viele diskrete Werte annehmen, so existiert offenbar auch das äußere Minimum und aufgrund der Voraussetzung, $\forall x \in \bar{\Omega} : \underline{E}(x)$ s.p.d., gilt auch $\lambda_{min} > 0$.

Falls die Komponenten $\underline{E}_{ij} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind, gilt: Die Eigenwerte von $\underline{E}(x)$ hängen stetig von den Komponenten (siehe Franklin, 2000, Abschnitt 6.13 auf Seite 191) und damit nach Voraussetzung auch stetig von den Koordinaten x ab.

$$\widetilde{\lambda}_{min}(x) := \min \{ \lambda(x) | \lambda(x) \text{ ist ein Eigenwert von } \underline{E}(x) \}$$

ist damit ebenfalls eine stetige, skalare Funktion auf der kompakten Menge $\bar{\Omega}$. Nach dem Satz vom Minimum und Maximum (siehe Amann und Escher, 2006, Korollar 3.8) wird daher das Minimum auf $\bar{\Omega}$ angenommen, d.h. es existiert ein $x_0 \in \bar{\Omega}$ mit

$$\widetilde{\lambda}_{min}(x_0) = \min_{x \in \bar{\Omega}} \widetilde{\lambda}_{min}(x) = \lambda_{min}.$$

Da für alle $x \in \bar{\Omega}$ nach Voraussetzung \underline{E} s.p.d. ist, gilt insbesondere $\lambda_{min} > 0$. ■

Satz 27. Eigenschaften von B

Sei \underline{E} reell symmetrisch positiv definit (s.p.d.) für alle $x \in \bar{\Omega}$. Die Komponenten $\underline{E}_{ij} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ seien entweder stetig, oder sie nehmen auf $\bar{\Omega}$ nur endlich viele diskrete Werte in \mathbb{R} an. Dann gilt:

- B ist bilinear und symmetrisch,
- B ist stetig,
- B ist koerziv.
D.h.: $\exists c \forall u \in X_0 : B(u, u) \geq c \|u\|_X^2$.

Beweis: B ist offenbar bilinear und symmetrisch.

Falls die Komponenten von E stetig sind, gilt

$$|E| := \max_{(i,j,r,s) \in \{1,2,3\}^4} \left\{ \max_{x \in \bar{\Omega}} \{ |E_{ijrs}(x)| \} \right\} < \infty,$$

da aus $\bar{\Omega}$ kompakt folgt, dass das Bild jeder Komponente kompakt (also insbesondere beschränkt) ist (siehe Amann und Escher, 2006, Theorem 3.6). Falls die Komponenten nur endlich viele diskrete Werte

annehmen, so gilt offenbar ebenfalls $|E| < \infty$. Mit Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt

$$\begin{aligned}
 |B(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \sum_{r,s=1}^3 E_{ijrs} \varepsilon_{ij}(v) \varepsilon_{rs}(u) \, dV \right| \\
 &= \left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \sum_{r,s=1}^3 E_{ijrs} u_{r|s} v_{i|j} \, dV \right| \\
 &\leq \sum_{i,j=1}^3 \sum_{r,s=1}^3 \left| \int_{\Omega} E_{ijrs} u_{r|s} v_{i|j} \, dV \right| \\
 &\leq \sum_{i,j=1}^3 \sum_{r,s=1}^3 \sqrt{\int_{\Omega} E_{ijrs}^2 u_{r|s}^2 \, dV} \sqrt{\int_{\Omega} v_{i|j}^2 \, dV} \\
 &\leq |E| \sum_{i,j=1}^3 \sum_{r,s=1}^3 \|u_{r|s}\|_{L_2(\Omega)} \|v_{i|j}\|_{L_2(\Omega)} \leq 9c^2 |E| \|u\|_X \|v\|_X,
 \end{aligned}$$

wobei wir für die c -Abschätzung erneut die Äquivalenz von Normen im \mathbb{R}^n ausnutzen. Somit ist B stetig. Da \underline{E} s.p.d. ist für alle $x \in \bar{\Omega}$, sind alle Eigenwerte positiv und reell, und es gilt aufgrund der Schur-Zerlegung: Es gibt eine orthogonale Matrix $\underline{Q} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ (d.h. $\underline{Q}^T \underline{Q} = \underline{Q} \underline{Q}^T = id_{\mathbb{R}^{6 \times 6}}$) mit

$$\underline{Q} \underline{E} \underline{Q}^T = \underline{L} := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_6),$$

wobei λ_n die sechs positiven reellen Eigenwerte von \underline{E} sind. Sei $\lambda_{\min} := \min_{x \in \bar{\Omega}} \min\{\lambda_1(x), \dots, \lambda_6(x)\}$. Es gilt dann aufgrund der Voraussetzungen nach Lemma 26: $0 < \lambda_{\min} < \infty$. Damit gilt auch:

$$\begin{aligned}
 B(v, v) &= \int_{\Omega} E_{ijrs} \varepsilon_{ij}(v) \varepsilon_{rs}(v) \, dV = \int_{\Omega} \varepsilon^T(v) \underline{E} \varepsilon(v) \, dV \\
 &= \int_{\Omega} (\underline{Q} \varepsilon(v))^T \underline{L} \underline{Q} \varepsilon(v) \, dV = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^6 \lambda_i (\underline{Q} \varepsilon(v))_i^2 \, dV \\
 &\geq \lambda_{\min} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^6 (\underline{Q} \varepsilon(v))_i^2 \, dV = \lambda_{\min} \int_{\Omega} \varepsilon^T(v) \varepsilon(v) \, dV \\
 &\geq \lambda_{\min} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) \, dV \geq \lambda_{\min} c \|v\|_X^2,
 \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung aufgrund der Kornschen Ungleichung (Satz 25) gilt. Somit ist B koerziv. ■

In der Praxis dürfte meistens der mathematisch triviale Fall vorliegen, dass die Elastizitätsmatrix nur endlich viele diskrete Werte auf $\bar{\Omega}$ annimmt (z.B. bei schichtweisem Aufbau der Platte). Die Voraussetzung, dass \underline{E} s.p.d. ist, scheint aus mathematischer Sicht recht einschneidend zu sein. Aus der Sicht der TM ist diese Annahme jedoch eine der grundlegendsten Modellierungsannahmen. Tatsächlich kann man aus der Annahme der positiven Definitheit Schranken für messbare Materialparameter ableiten, die von linear elastischen Materialien (der realen Welt) erfüllt werden. Die Annahme hat im Rahmen der TM somit quasi den Rang eines Naturgesetzes.

Wir können schließlich den folgenden Satz formulieren:

Satz 28. Existenz und Eindeutigkeit der schwachen Lösung

Seien $u_0 \in [H^{1/2}]^3(\partial\Omega_0)$, $g_i \in H^{1/2}(\partial\Omega_N)$, $f_i \in L_2(\Omega)$ und \underline{E} s.p.d. für alle $x \in \bar{\Omega}$ gegeben. Die Komponenten $\underline{E}_{ij} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ seien entweder stetig, oder sie nehmen auf $\bar{\Omega}$ nur endlich viele diskrete Werte in \mathbb{R} an. Dann existiert ein $\tilde{u}_0 \in X$, das die verallgemeinerten Randbedingungen

$$S\tilde{u}_0(x) = u_0(x) \text{ für fast alle } x \in \partial\Omega_0$$

erfüllt, und es gilt:

Die Probleme

$$(I) \begin{cases} \Pi(v + \tilde{u}_0) := 1/2B(v + \tilde{u}_0, v + \tilde{u}_0) - f(v + \tilde{u}_0) \\ \text{Ges.: } \tilde{u} \in X_0 : \forall v \in X_0 \setminus \{\tilde{u}\} : \Pi(\tilde{u} + \tilde{u}_0) < \Pi(v + \tilde{u}_0) \end{cases}$$

$$(II) \{ \text{Ges.: } \tilde{u} \in X_0 \forall v \in X_0 : B(\tilde{u} + \tilde{u}_0, v) = f(v) \}$$

sind äquivalent und es existiert genau eine gemeinsame Lösung.

Beweis: Mit allen Vorüberlegungen des Kapitels können wir schließlich Satz 23 mit $a := B$ und $b := \tilde{f}$ anwenden, was jedoch die Aussage des Satzes zunächst für Problem

$$(I^*) \begin{cases} E(v) := 1/2B(v, v) - f(v) + B(\tilde{u}_0, v) \\ \text{Ges.: } \tilde{u} \in X_0 : \forall v \in X_0 \setminus \{\tilde{u}\} : E(\tilde{u}) < E(v) \end{cases}$$

und Problem (II) (aus dem Satz) liefert. Es gilt jedoch

$$\Pi(v + \tilde{u}_0) = E(v) + \underbrace{\frac{1}{2}B(\tilde{u}_0, \tilde{u}_0) - f(\tilde{u}_0)}_{=\Pi(\tilde{u}_0)=\text{konstant}}$$

womit Problem (I*) und (I) wiederum äquivalent sind. ■

Der Teil des Satzes, der sich auf Problem (I) bezieht, ist dabei das aus der TM bekannte **Prinzip minimaler potentieller Energie**, hier im Rahmen der schwachen Lösungstheorie. In Worten:

Unter allen Verschiebungen $v \in X$, die die verallgemeinerten Verschiebungsrandbedingungen (18) erfüllen, ist die Lösung des schwachen Problems linearer Elastostatik diejenige, unter welcher die totale potentielle Energie Π ihr absolutes Minimum annimmt

(vgl. auch Washizu, 1982, Abschnitt 2.1). Das Prinzip minimaler potentieller Energie ist normalerweise der Ausgangspunkt zur Aufstellung konsistenter Plattentheorien. Wir werden die schwache Formulierung des äquivalenten Problems (II) als Ausgangspunkt zur Ableitung unserer Plattentheorie wählen.

Im Folgenden nehmen wir an, die Lösung $u := \tilde{u} + \tilde{u}_0$ wäre in $[H^2]^3(\Omega)$. Diese Annahme wollen wir kurz diskutieren. Die bisherigen Resultate der Regularitätstheorie schwacher Lösungen linearer, elliptischer PDEs lassen sich salopp gesprochen wie folgt zusammenfassen: Je glatter die Daten sind, desto glatter ist auch die schwache Lösung einer linearen elliptischen PDE. Tatsächlich gilt im einfachen Fall reiner homogener Dirchlet-Randbedingungen der folgende Satz:

Satz 29. Regularität der schwachen Lösung

Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 28 gelte:

$\partial\Omega_N = \emptyset$, $u_0 = 0$, $E_{ijrs} \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $\partial\Omega \in C^\infty$, $f_i \in H^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Dann gilt für die eindeutig bestimmte Lösung des Satzes 28:

$$u \in [H^{1+k}]^3(\Omega).$$

Beweis: Die $[H^{1+k}]^3$ -Regularität von $u = \tilde{u}$ folgt aus (Zeidler, 1990a, Theorem 22.I.) ■

Entsprechende Resultate gibt es auch für den Fall inhomogener Dirichlet-Randbedingungen. Leider gibt es aber kein entsprechendes Resultat für die von uns betrachtete gemischte Randwertaufgabe, so dass an dieser Stelle eine Argumentationslücke verbleibt. „Ein solches Resultat ist auch nicht in der hier betrachteten Allgemeinheit zu erwarten.“ (Zitat aus einem persönlichen Gespräch mit Prof. M. Böhm)

4 Fourierreihen

4.1 Eine Basis für L_2

Wir wollen in diesem Abschnitt eine Basis für $L_2(a, b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ finden. Konkreter werden wir später $a = \frac{-h}{2a}$ und $b = \frac{h}{2a}$ wählen. $L_2(a, b)$ ist, wie schon erwähnt, ein Hilbertraum. Eine **Hilbertraumbasis** ist dabei in der Literatur per Definition ein vollständiges Orthonormalsystem. (Wir schreiben im Folgenden *ONS* als Abkürzung für Orthonormalsystem.)

Definition 30 (*Vollständigkeit eines Orthonormalsystems*)

Seien S, T ONS im Hilbertraum H .
 S vollständig : $\iff S \subset T \Rightarrow T = S$.

Die Vollständigkeit von S ist dabei äquivalent zu $H = \overline{\text{lin } S}$, wobei lin die Lineare Hülle bezeichnet (siehe Werner, 2007, Satz V.4.9). Somit steht diese Definition im Einklang mit der Definition der Basis eines Banachraumes.

Definition 31 (*Banachbasis*)

Sei B ein Banachraum. Eine höchstens abzählbare Folge $(w_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit $w_j \in B$ von denen jeweils endlich viele linear unabhängig sind heißt *Banachbasis*, falls

$$B = \overline{\cup_{n \in \mathbb{N}} \text{lin} \{w_1, \dots, w_n\}}.$$

Man beachte, dass B nach dieser Definition nur eine Basis hat, falls B separabel ist. (vgl. Zeidler, 1990a, Proposition 21.49)

Satz 32. Die Menge aller Polynome \mathbb{P} ist bezüglich der L_2 -Norm dicht in $L_2(a, b)$.

Beweis: Nach dem Approximationssatz von Weierstraß ist \mathbb{P} dicht in $C[a, b]$ bezüglich der Supremumsnorm $\|f\|_\infty := \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ (siehe Werner, 2007, Satz I.2.10). Wegen

$$\|f\|_{L_2(a, b)}^2 = \int_a^b f^2 dx < (b - a) \|f\|_\infty^2$$

ist \mathbb{P} auch bezüglich der L_2 -Norm dicht in $C[a, b]$. Weiter ist $C[a, b]$ bezüglich der L_2 -Norm dicht in $L_2(a, b)$ (siehe Werner, 2007, Satz I.2.12) oder (siehe Adams, 1975, Theorem 2.19). ■

Somit ist $L_2(a, b)$ insbesondere separabel. Offenbar ist auf separablen Hilberträumen jede Hilbertbasis insbesondere eine Banachbasis. Um eine Banachbasis zu erhalten, brauchen wir nur ein linear unabhängiges Erzeugendensystem der Menge aller Polynome \mathbb{P} anzugeben. Z.B. ist die Menge der Monome $\{x^n | n \in \mathbb{N}\}$ somit eine Banachbasis von $L_2(a, b)$. Eine Hilbertbasis ist eine ONS Banachbasis. Die Menge der Monome ist keine Hilbertbasis. Die von uns letztlich gewählten Basispolynome

$\{\hat{P}^n | n \in \mathbb{N}\}$, welche skalierte Legendre-Polynome sind, werden eine orthogonale Banachbasis von $L_2\left(\frac{-h}{2a}, \frac{h}{2a}\right)$, aber nicht normal und damit ebenfalls keine Hilbertbasis sein. Die Nichtnormalität wird dabei für die Modellierung eine der wichtigsten Eigenschaften sein.

Bemerkung

Aufgrund weiterer dichter Einbettungen ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von \mathbb{P} , wie z.B. $\{x^n | n \in \mathbb{N}\}$ und $\{\hat{P}^n | n \in \mathbb{N}\}$ sogar eine Banachbasis für die Räume

$$C[a, b], C^m[a, b], L_p(a, b), W_p^m(a, b),$$

wobei $m \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p < \infty$ (vgl. Zeidler, 1990a, Beispiel 21.48).

4.2 Die Eigenschaften der Basispolynome

In diesem Abschnitt werden wir einige elementare Eigenschaften der skalierten Legendre-Polynome \hat{P}^n nachweisen. Um einen griffigeren Namen für die skalierten Legendre-Polynome zu haben, werden wir diese kurz Basispolynome nennen.

Definition 33 (Legendre-Polynome)

Sei für $n \in \mathbb{N}_0$ das n -te Legendre-Polynom $P^n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$P^n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n}.$$

Die Legendre-Polynome skalieren wir mit dem Plattenparameter c (siehe Seite 8):

Definition 34 (Basispolynome)

Sei für $n \in \mathbb{N}_0$ das n -te Basispolynom $\hat{P}^n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\hat{P}^n(\xi) := \sqrt{(2n + 1)c^n} P^n\left(\frac{1}{\sqrt{3c}} \xi\right).$$

Die Eigenschaften der Basispolynome wollen wir aus den Eigenschaften der Legendre-Polynome ableiten. In diesem Kapitel sind x und ξ stets in \mathbb{R} und nicht etwa Koordinaten in Ω .

Satz 35. Eigenschaften der Legendre-Polynome

$$P^0(x) = 1, \quad P^1(x) = x, \tag{19}$$

$$\int_{-1}^1 P^n(x) P^m(x) dx = \frac{2}{2n + 1} \delta_{nm} \quad \text{f.a. } n, m \in \mathbb{N}_0, \tag{20}$$

$$\frac{d}{dx} \left((1 - x^2) \frac{dP^n}{dx}(x) \right) + n(n + 1) P^n(x) = 0 \quad \text{f.a. } n \in \mathbb{N}_0, \tag{21}$$

$$(x^2 - 1) \frac{dP^n}{dx}(x) = n [x P^n(x) - P^{n-1}(x)] \quad \text{f.a. } n \in \mathbb{N}_0, n \geq 1, \tag{22}$$

$$(n + 1) P^{n+1}(x) = (2n + 1) x P^n(x) - n P^{n-1}(x) \quad \text{f.a. } n \in \mathbb{N}_0, n \geq 1. \tag{23}$$

Beweis: (siehe z.B. Bronstein u. a., 2001, S. 529) ■

Aus (23) folgt damit für die Basispolynome mit $n \geq 1$ die folgende Rekursionsvorschrift:

$$\begin{aligned}
 (n+1) \frac{1}{\sqrt{2n+3c^{n+1}}} P^{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{3c}}\xi\right) &= (2n+1) \frac{1}{\sqrt{2n+1c^n}} \frac{1}{\sqrt{3c}} \xi P^n\left(\frac{1}{\sqrt{3c}}\xi\right) \\
 &\quad - n \frac{1}{\sqrt{2n-1c^{n-1}}} P^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3c}}\xi\right) \\
 \implies \hat{P}^{n+1}(\xi) &= \sqrt{\frac{2n+3}{(n+1)^2}} \left[\sqrt{\frac{2n+1}{3}} \xi \hat{P}^n(\xi) - \sqrt{\frac{n^2}{2n-1}} c^2 \hat{P}^{n-1}(\xi) \right] \\
 \implies \hat{P}^n(\xi) &= \sqrt{\frac{2n+1}{n^2}} \left[\sqrt{\frac{2n-1}{3}} \xi \hat{P}^{n-1}(\xi) - \sqrt{\frac{(n-1)^2}{2n-3}} c^2 \hat{P}^{n-2}(\xi) \right] \\
 &\quad \text{f.a. } n \in \mathbb{N}_0, n \geq 2
 \end{aligned} \tag{24}$$

Da wir mit (19) und der Definition der Basispolynome sofort \hat{P}^0 und \hat{P}^1 bestimmen können, lassen sich mit (24) iterativ alle Basispolynome berechnen. Die ersten sieben sind:

$$\begin{aligned}
 \hat{P}^0(\xi) &= 1, \\
 \hat{P}^1(\xi) &= \xi, \\
 \hat{P}^2(\xi) &= \sqrt{5}c^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\xi^2}{c^2} \right), \\
 \hat{P}^3(\xi) &= \sqrt{7}c^3 \left(\frac{5}{18} \frac{\xi^3 \sqrt{3}}{c^3} - \frac{1}{2} \frac{\xi \sqrt{3}}{c} \right), \\
 \hat{P}^4(\xi) &= 3c^4 \left(\frac{3}{8} + \frac{35}{72} \frac{\xi^4}{c^4} - \frac{5}{4} \frac{\xi^2}{c^2} \right), \\
 \hat{P}^5(\xi) &= \sqrt{11}c^5 \left(\frac{7}{24} \frac{\xi^5 \sqrt{3}}{c^5} - \frac{35}{36} \frac{\xi^3 \sqrt{3}}{c^3} + \frac{5}{8} \frac{\xi \sqrt{3}}{c} \right), \\
 \hat{P}^6(\xi) &= \sqrt{13}c^6 \left(-\frac{5}{16} + \frac{77}{144} \frac{\xi^6}{c^6} - \frac{35}{16} \frac{\xi^4}{c^4} + \frac{35}{16} \frac{\xi^2}{c^2} \right), \\
 \hat{P}^7(\xi) &= \sqrt{15}c^7 \left(\frac{143}{432} \frac{\xi^7 \sqrt{3}}{c^7} - \frac{77}{48} \frac{\xi^5 \sqrt{3}}{c^5} + \frac{35}{16} \frac{\xi^3 \sqrt{3}}{c^3} - \frac{35}{48} \frac{\xi \sqrt{3}}{c} \right).
 \end{aligned}$$

Wie man mittels der Substitution $x \hat{=} g(\xi) := \frac{\xi}{\sqrt{3c}}$ sieht, erfüllen die Basispolynome dabei die Orthogonalitätseigenschaft

$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{h}{2a}}^{\frac{h}{2a}} \hat{P}^n(\xi) \hat{P}^m(\xi) d\xi &= \sqrt{2n+1} \sqrt{2m+1} c^{n+m} \sqrt{3c} \int_{-\sqrt{3c}}^{\sqrt{3c}} [(P^n(\xi) P^m(\xi)) \circ g(\xi)] g'(\xi) d\xi \\
 &= \sqrt{2n+1} \sqrt{2m+1} c^{n+m} \sqrt{3c} \int_{-1}^1 P^n(x) P^m(x) dx \\
 &\stackrel{(20)}{=} \sqrt{2n+1} \sqrt{2m+1} c^{n+m} \sqrt{3c} \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}.
 \end{aligned}$$

$$\implies \int_{-\frac{h}{2a}}^{\frac{h}{2a}} \hat{P}^n(\xi) \hat{P}^m(\xi) d\xi = \frac{h}{a} c^{2n} \delta_{nm} \quad \text{f.a. } n, m \in \mathbb{N}_0. \tag{25}$$

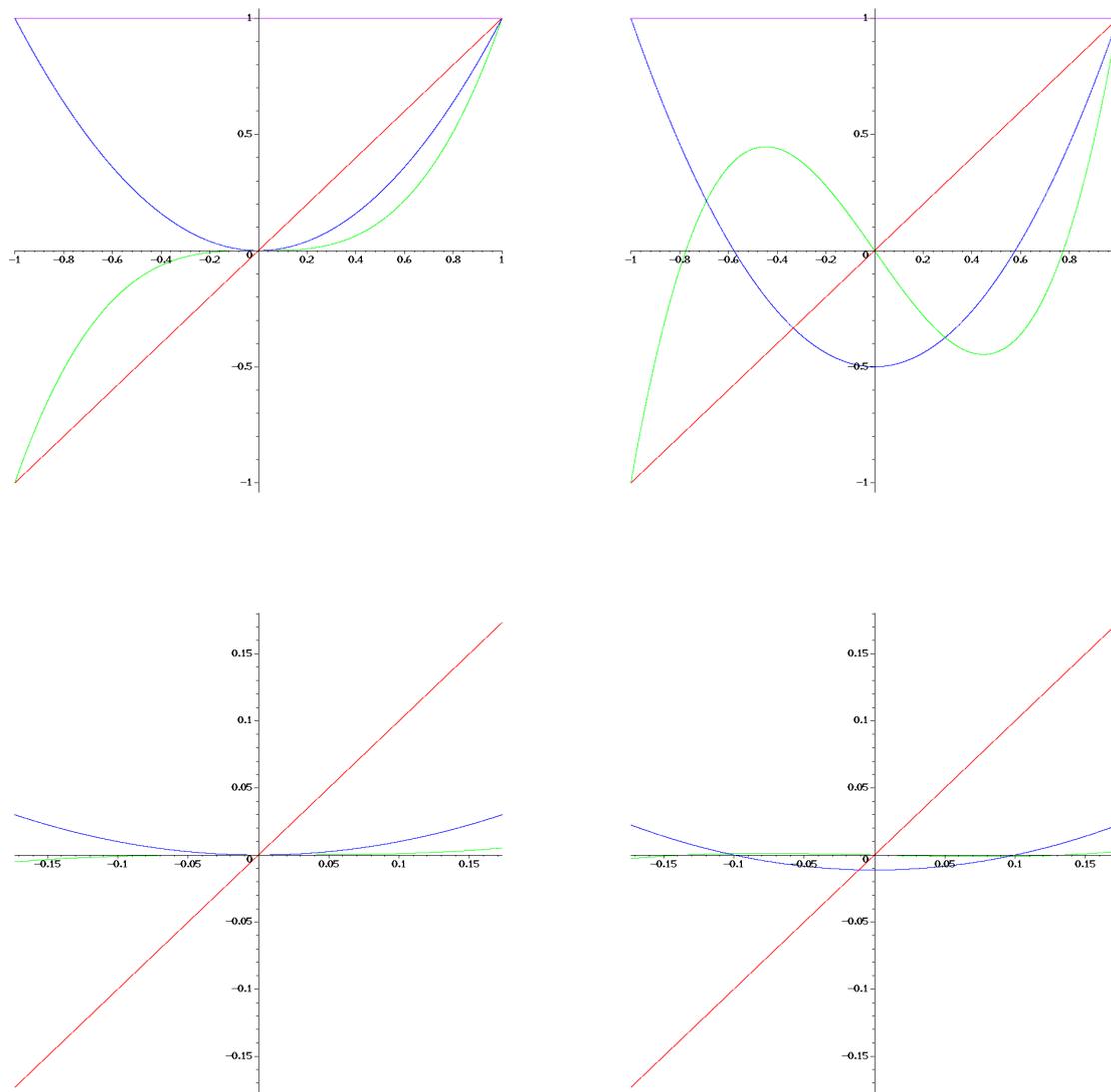


Abbildung 4: Graphen verschiedener Polynome. Oben links: Monome 1 bis x^3 ; oben rechts: Legendre-Polynome P^0 bis P^3 ; unten links: Monome x bis x^3 auf dem Intervall $(-\sqrt{3}c, \sqrt{3}c)$; unten rechts: Basispolynome \hat{P}^1 bis \hat{P}^3 auf dem Intervall $(-\sqrt{3}c, \sqrt{3}c)$. Untere Graphen für $c = 0, 1$. Zuordnung der Farben: 0: lila; 1: rot; 2: blau; 3: grün.

An (24) ist zu erkennen, dass das n -te Basispolynom ein Polynom des genauen Grades n ist. Wegen (25) sind die ersten n Basispolynome außerdem linear unabhängig und damit eine Basis für die Polynome bis zum Grad n . Somit sind die Basispolynome eine orthogonale Banachbasis für $L_2\left(\frac{-h}{2a}, \frac{h}{2a}\right)$.

Einige übrige Eigenschaften, die wir noch benötigen, fassen wir in dem folgenden Satz zusammen.

Satz 36. Eigenschaften der Basispolynome

 Für die Basispolynome \hat{P}^n gilt:

 a) $\forall n \in \mathbb{N}_0$:

$$\frac{d\hat{P}^n}{d\xi}(\xi) = \sum_{\{k \in \mathbb{N}_0 | 2k \leq n-1\}} \sqrt{\frac{(2n+1)(2n-4k-1)}{3}} c^{2k} \hat{P}^{n-2k-1}(\xi). \quad (26)$$

 b) $\forall k, l \in \mathbb{N}_0$:

$$\int_{-\frac{h}{2a}}^{\frac{h}{2a}} \frac{d\hat{P}^k}{d\xi}(\xi) \hat{P}^l(\xi) d\xi = \begin{cases} \sqrt{\frac{(2k+1)(2l+1)}{3}} c^{k+l-1} \frac{h}{a} & \text{falls } k-l-1 \geq 0 \text{ und gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

 c) $\forall k, l \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{h}{2a}}^{\frac{h}{2a}} \frac{d^2 \hat{P}^k}{d\xi^2}(\xi) \hat{P}^l(\xi) d\xi \\ &= \begin{cases} \sqrt{2k+1} \sqrt{2l+1} \frac{1}{6} (k-l)(k+l+1) c^{k+l-2} \frac{h}{a} & \text{falls } k-l-2 \geq 0 \text{ und gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

 d) $\forall k, l \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{h}{2a}}^{\frac{h}{2a}} \frac{d\hat{P}^k}{d\xi}(\xi) \frac{d\hat{P}^l}{d\xi}(\xi) d\xi \\ &= \sqrt{2k+1} \sqrt{2l+1} \frac{1}{6} c^{k+l-2} \frac{h}{a} \begin{cases} (k^2+k) & \text{falls } k \leq l \text{ und } k-l \text{ gerade} \\ (l^2+l) & \text{falls } l \leq k \text{ und } k-l \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } k-l \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

 e) $\forall n \in \mathbb{N}_0$:

$$\hat{P}^n\left(\frac{h}{2a}\right) = \sqrt{2n+1} c^n \text{ und } \hat{P}^n\left(\frac{-h}{2a}\right) = (-1)^n \sqrt{2n+1} c^n.$$

 f) $\forall n \in \mathbb{N}_0$:

$$\frac{d\hat{P}^n}{d\xi}\left(\frac{h}{2a}\right) = \sqrt{\frac{2n+1}{3}} \frac{n^2+n}{2} c^{n-1} \text{ und } \frac{d\hat{P}^n}{d\xi}\left(\frac{-h}{2a}\right) = (-1)^{n-1} \sqrt{\frac{2n+1}{3}} \frac{n^2+n}{2} c^{n-1}$$

 g) $\forall k, l \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} & -\hat{P}^k\left(\frac{h}{2a}\right) \hat{P}^l\left(\frac{h}{2a}\right) + \hat{P}^k\left(\frac{-h}{2a}\right) \hat{P}^l\left(\frac{-h}{2a}\right) \\ &= \begin{cases} -\sqrt{\frac{(2k+1)(2l+1)}{3}} c^{k+l-1} \frac{h}{a} & \text{falls } k+l \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

 h) $\forall k, l \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} & -\frac{d\hat{P}^k}{d\xi}\left(\frac{h}{2a}\right) \hat{P}^l\left(\frac{h}{2a}\right) + \frac{d\hat{P}^k}{d\xi}\left(\frac{-h}{2a}\right) \hat{P}^l\left(\frac{-h}{2a}\right) \\ &= \begin{cases} -\sqrt{2k+1} \sqrt{2l+1} \frac{1}{6} c^{k+l-2} \frac{h}{a} (k^2+k) & \text{falls } k+l \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Beweis: Zu a) bzw. (26):

$$\begin{aligned}
 P^{n+1}(x) &\stackrel{(23)}{=} \frac{2n+1}{n+1}xP^n(x) - \frac{n}{n+1}P^{n-1} \\
 &\stackrel{(22)}{=} \frac{2n+1}{n(n+1)}(x^2-1)\frac{dP^n}{dx}(x) + P^{n-1}(x) \\
 \Rightarrow \frac{dP^{n+1}}{dx}(x) &\stackrel{(21)}{=} (2n+1)P^n(x) + \frac{dP^{n-1}}{dx}(x) \quad f.a. n \geq 1 \\
 \Rightarrow \frac{dP^n}{dx}(x) &= (2n-1)P^{n-1}(x) + \frac{dP^{n-2}}{dx}(x) \quad f.a. n \in \mathbb{N}_0, n \geq 2.
 \end{aligned} \tag{27}$$

Rekursives Einsetzen führt auf

$$\frac{dP^n}{dx}(x) = \sum_{k=0}^m (2n-4k-1)P^{n-2k-1}(x) + \frac{dP^{n-2m-2}}{dx}(x),$$

wobei wir m maximal wählen wollen. Offenbar gilt dann $0 \leq n-2m-2 < 2$, denn andernfalls können wir (27) nochmal anwenden oder konnten es schon beim letzten Mal nicht anwenden. Dann gilt

$$\frac{dP^n}{dx}(x) = \sum_{\{k \in \mathbb{N}_0 | 2k \leq n-1\}} (2n-4k-1)P^{n-2k-1}(x) \tag{28}$$

durch die folgende Fallunterscheidung:

- Für $n-2m-2 = 0$ gilt

$$\frac{dP^{n-2m-2}}{dx}(x) = 0$$

und $n-2m-1 = 1 > 0$, $n-2(m+1)-1 = -1 < 0$.

- Für $n-2m-2 = 1$ gilt

$$\frac{dP^{n-2m-2}}{dx}(x) = P^0(x)$$

und $n-2m-1 = 2 \implies n-2(m+1)-1 = 0 \geq 0$, $n-2(m+2)-1 = -2 < 0$.

Damit gilt für das n -te Basispolynom:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\hat{P}^n}{d\xi}(\xi) &= \sqrt{\frac{2n+1}{3}}c^{n-1}\frac{dP^n}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{3}c}\xi\right) \\
 &\stackrel{(28)}{=} \sum_{\{k \in \mathbb{N}_0 | 2k \leq n-1\}} \sqrt{\frac{2n+1}{3}}(2n-4k-1)c^{n-1}P^{n-2k-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}c}\xi\right) \\
 &= \sum_{\{k \in \mathbb{N}_0 | 2k \leq n-1\}} \sqrt{\frac{2n+1}{3}}(2n-4k-1)c^{n-1}\hat{P}^{n-2k-1}(\xi) \frac{1}{\sqrt{2n-4k-1}c^{n-2k-1}} \\
 &= \sum_{\{k \in \mathbb{N}_0 | 2k \leq n-1\}} \sqrt{\frac{(2n+1)(2n-4k-1)}{3}}c^{2k}\hat{P}^{n-2k-1}(\xi).
 \end{aligned}$$

Zu b)

Mit (26) gilt:

$$\int_{-\frac{h}{2a}}^{\frac{h}{2a}} \frac{d\hat{P}^k}{d\xi}(\xi)\hat{P}^l(\xi) d\xi = \sum_{\{m \in \mathbb{N}_0 | 2m \leq k-1\}} \sqrt{\frac{(2k+1)(2k-4m-1)}{3}}c^{2m} \underbrace{\int_{-\frac{h}{2a}}^{\frac{h}{2a}} \hat{P}^{k-2m-1}(\xi)\hat{P}^l(\xi) d\xi}_{= (*)}.$$

(*) ist wegen (25) nur ungleich Null, falls $l = k - 2m - 1$. Auflösen ergibt $2m = k - l - 1$. Demnach erhalten wir nur einen Wert ungleich Null für (*) und damit für den gesamten Ausdruck, falls $k - l - 1$ gerade ist. Für einen Wert ungleich Null muss dann außerdem das betreffende m ein gültiger Summand sein. Es muss also $0 \leq 2m \leq k - 1$ gelten. Offenbar gilt $2m = k - l - 1 \implies 2m \leq k - 1$. $2m = k - l - 1 \geq 0$ verbleibt als Bedingung. Damit folgt b) mit formalem Einsetzen von $2m = k - l - 1$.

Zu c)

Mit (26) gilt:

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{h}{2a}}^{\frac{h}{2a}} \frac{d^2 \hat{P}^k}{d\xi^2}(\xi) \hat{P}^l(\xi) d\xi \\ &= \sum_{\{n \in \mathbb{N}_0 | 2n \leq k-1\}} \sum_{\{m \in \mathbb{N}_0 | 2m \leq k-2n-2\}} \sqrt{\frac{(2k+1)(2k-4n-1)}{3}} \sqrt{\frac{(2k-4n-1)((2k-4n-2)-4m-1)}{3}} \\ & c^{2n} c^{2m} \underbrace{\int_{-\frac{h}{2a}}^{\frac{h}{2a}} \hat{P}^{k-2n-1-2m-1}(\xi) \hat{P}^l(\xi) d\xi}_{=(*)} \end{aligned}$$

(*) ist wegen (25) nur ungleich Null, falls $l = k - 2n - 1 - 2m - 1$. Auflösen ergibt $2m = k - l - 2 - 2n \implies 2m \leq k - 2n - 2$. Demnach gilt

$$= \sum_{\{n \in \mathbb{N}_0 | 2n \leq k-1\}} \sqrt{2k+1} \sqrt{2l+1} \frac{2k-4n-1}{3} c^{2n} c^{k-l-2-2n} \frac{h}{a} c^{2l} \delta_{B_1},$$

wobei δ_{B_1} nur 1 ist, falls $k - l - 2 - 2n \geq 0$ und $k - l - 2 - 2n$ gerade ist und 0 sonst. Damit erhalten wir einen Summanden in der verbleibenden Summe, falls $0 \leq 2n \leq k - l - 2 (\leq k - 1)$ und $k - l - 2$ gerade ist. Somit gilt

$$= \delta_{B_2} \sqrt{2k+1} \sqrt{2l+1} c^{k+l-2} \frac{h}{a} \sum_{n=0}^{(k-l-2)/2} \frac{2k-4n-1}{3},$$

wobei δ_{B_2} nur 1 ist, falls $k - l - 2 \geq 0$ und $k - l - 2$ gerade ist und 0 sonst. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{(k-l-2)/2} \frac{2k-4n-1}{3} &= \left(\frac{k-l-2}{2} + 1 \right) \left(\frac{2k-1}{3} \right) - \frac{4}{3} \underbrace{\sum_{n=0}^{(k-l-2)/2} n}_{\left(\frac{k-l-2}{2} + 1 \right) \left(\frac{k-l-2}{4} \right)} \\ &= \frac{1}{6} (k-l)(k+l+1). \end{aligned}$$

Zu d)

Mit (26) gilt:

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{h}{2a}}^{\frac{h}{2a}} \frac{d \hat{P}^k}{d\xi}(\xi) \frac{d \hat{P}^l}{d\xi}(\xi) d\xi \\ &= \sum_{\{n \in \mathbb{N}_0 | 2n \leq k-1\}} \sum_{\{m \in \mathbb{N}_0 | 2m \leq l-1\}} \sqrt{\frac{2k+1}{3}} \sqrt{2k-4n-1} c^{2n} \sqrt{\frac{2l+1}{3}} \sqrt{2l-4m-1} c^{2m} \\ & \underbrace{\int_{-\frac{h}{2a}}^{\frac{h}{2a}} \hat{P}^{k-2n-1}(\xi) \hat{P}^{l-2m-1}(\xi) d\xi}_{=(*)} \end{aligned}$$

(*) ist wegen (25) nur ungleich Null, falls $k - 2n - 1 = l - 2m - 1$. Auflösen ergibt $2m = l - k + 2n$. Wir erhalten also nur einen Wert ungleich Null, falls $l - k$ gerade ist. Weiter muss ein gültiger Summand $0 \leq 2m \leq l - 1$ erfüllen. Wegen der äußeren Summe gilt $2n \leq k - 1$, was $2m = l - k + 2n \leq l - 1$ impliziert. Weiter gilt $2m = l - k + 2n \geq 0 \iff 2n \geq k - l$, was wegen der äußeren Summe erfüllt ist, falls $k - l \geq 0$. Sei also o.B.d.A. $k - l \geq 0$ (ansonsten vertausche man k und l). Weiter sei $l - k$ gerade ($\iff k - l$ gerade). Dann gilt

$$= \frac{1}{3} \sqrt{2k+1} \sqrt{2l+1} \frac{h}{a} c^{k+l-2} \underbrace{\sum_{\{n \in \mathbb{N}_0 | 2n \leq k-1\}} (2k - 4n - 1)}_{= \frac{k^2+k}{2}},$$

wobei die obige Summenformel noch zu zeigen ist. Sei also k gerade:

$$\sum_{n=0}^{(k-1)/2} (2k-1) - 4 \sum_{n=0}^{(k-1)/2} n = (2k-1) \left(\frac{k-1}{2} + 1 \right) - 4 \left(\frac{k-1}{4} \left(\frac{k-1}{2} + 1 \right) \right) = \frac{k^2+k}{2}.$$

Sei k ungerade:

$$\sum_{n=0}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} (2k-1) - 4 \sum_{n=0}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} n = (2k-1) \left(\frac{k-1}{2} - \frac{1}{2} + 1 \right) - 4 \left(\frac{k-2}{4} \left(\frac{k-1}{2} - \frac{1}{2} + 1 \right) \right) = \frac{k^2+k}{2}.$$

Hierbei bedeutet die Notation $\lfloor \bullet \rfloor$, dass auf die nächst kleinere ganze Zahl abzurunden ist.

Zu e)

Für die Legendre-Polynome gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : P^n(1) = 1.$$

Für P^0 und P^1 gilt die Aussage offensichtlich. Für alle weiteren n folgt sie mittels vollständiger Induktion sofort aus Formel (23). Mit derselben Argumentation und Formel (23) bzw. (24) gilt auch, dass P^n bzw. \hat{P}^n für gerades n ein gerades Polynom und für ungerades n ein ungerades Polynom sind, dass also

$$P^n(-x) = (-1)^n P^n(x), \text{ bzw. } \hat{P}^n(-\xi) = (-1)^n \hat{P}^n(\xi)$$

gilt. Damit gilt mittels der Definition der Basispolynome:

$$\hat{P}^n \left(\frac{h}{2a} \right) = \hat{P}^n(\sqrt{3}c) = \sqrt{2n+1} c^n \text{ und } \hat{P}^n \left(\frac{-h}{2a} \right) = (-1)^n \sqrt{2n+1} c^n.$$

Zu f)

Mittels (26) und e) gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{P}^n}{d\xi}(-\sqrt{3}c) &= \sum_{\{k \in \mathbb{N}_0 | 2k \leq n-1\}} \sqrt{\frac{(2n+1)(2n-4k-1)}{3}} c^{2k} \underbrace{\hat{P}^{n-2k-1}(-\sqrt{3}c)}_{=(-1)^{n-1} \sqrt{2n-4k-1} c^{n-2k-1}} \\ &= (-1)^{n-1} \sqrt{\frac{2n+1}{3}} c^{n-1} \underbrace{\sum_{\{k \in \mathbb{N}_0 | 2k \leq n-1\}} (2n-4k-1)}_{= \frac{n^2+n}{2}}, \end{aligned}$$

wobei wir die Summenformel schon in d) bewiesen hatten. Mit analoger Argumentation gilt natürlich auch

$$\frac{d\hat{P}^n}{d\xi}(\sqrt{3}c) = \sqrt{\frac{2n+1}{3}} \frac{n^2+n}{2} c^{n-1}.$$

Zu g)

Einsetzen von e).

Zu h)

Einsetzen der Formeln e) und f) liefert schließlich h). ■

4.3 Fourierreihen von L_2 -Funktionen

In diesem Abschnitt werden wir die Existenz von Reihenentwicklungen bezüglich der Dickenrichtung der Platte nachweisen.

Satz 37. Orthogonalprojektion auf Hilberträumen

Sei H ein Hilbertraum und $S \subset H$ ein ONS, dann gilt:

- a) Für alle $x \in H$ konvergiert die Reihe $\sum_{e \in S} (x, e)_H e$ unbedingt, d.h.: die Reihe konvergiert gegen einen Grenzwert, der unabhängig von der Summationsreihenfolge ist. (Daher die Notation: $\sum_{e \in S}$.)
- b) $P : x \mapsto \sum_{e \in S} (x, e)_H e$ ist die Orthogonalprojektion auf $\overline{\text{lin } S}$.

Beweis: (siehe Werner, 2007, Satz V.4.8) ■

Für eine Hilbertbasis $S \subset H$ ($H = \overline{\text{lin } S}$, vergleiche Abschnitt 4.1) folgt sofort das folgende Korollar.

Korollar 38. Fourierreihen

Sei H ein Hilbertraum und S eine Hilbertbasis, dann gilt, dass jedes $x \in H$ eine Darstellung der Form

$$x = \sum_{e \in S} (x, e)_H e$$

hat. In diesen Zusammenhang nennen wir die obige Reihe die Fourierreihe von x .

Satz 39. Fourierreihe in Dickenrichtung der Platte

Sei $g \in H^m(\Omega)$, wobei $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$, dann hat g eine Darstellung der Form

$$g(x, y, z) = a \sum_{n \in \mathbb{N}_0} g^n(x, y) \hat{P}^n(z),$$

wobei

$$g^n(x, y) := \frac{1}{hc^{2n}} \int_{-h/2a}^{h/2a} g(x, y, z) \hat{P}^n(z) dz.$$

Hierbei ist die obige Reihe unbedingt konvergent.

Beweis: $g \in H^m(\Omega)$ ist nach Änderung auf einer Nullmenge stetig auf $\overline{\Omega}$ (siehe Satz 17). Daher macht es Sinn, g für ein festes $(x, y) \in A$ zu betrachten. Dann gilt insbesondere $g \in L_2(-h/2a, h/2a)$. Weiter sind die Polynome $b^n := \hat{P}^n / \|\hat{P}^n\|_{L_2}$ eine Hilbertbasis für $L_2(-h/2a, h/2a)$, und es gilt

$$g = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} (g, b^n) b^n \stackrel{(25)}{=} a \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{(g, \hat{P}^n)}{hc^{2n}} \hat{P}^n. \quad \blacksquare$$

Wir werden im Folgenden die g^n als die Fourier-Koeffizienten von g bezeichnen. Man beachte: Ist g die Komponente einer Verschiebung in den dimensionslosen Koordinaten x , so hat g die physikalische Einheit Länge. In diesem Fall sind die Fourier-Koeffizienten (sowie natürlich auch die Basispolynome) aufgrund der vorgezogenen Bezugslänge a in der Reihendarstellung dimensionslos. Falls wir Funktionen mit einer anderen physikalischen Einheit als der Länge in Fourierreihen entwickeln wollen, so bieten sich andere Definitionen der Fourier-Koeffizienten an.

Offenbar sind die Fourier-Koeffizienten Funktionen auf der Mittelebene A . Bis jetzt haben wir die Fourier-Koeffizienten jedoch nur punktweise betrachtet. Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, dass sie als Funktionen auf A betrachtet dieselbe Regularität wie die Ursprungsfunktion g haben.

4.4 Regularität der Fourier-Koeffizienten

Um die Frage nach der Regularität der Fourier-Koeffizienten zu klären, benötigen wir zunächst noch zwei Hilfssätze.

Satz 40. Differenzierbarkeit von Parameterintegralen

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : T \times U \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle:

- $f(\bullet, y)$ integrierbar f.a. $y \in U$;
- $f(t, \bullet) \in C^m(U)$ f.f.a. $t \in T$;
- Es existieren integrierbare Funktionen $g_\alpha : T \rightarrow \mathbb{R}$ mit $|D_y^\alpha f(t, y)| \leq g_\alpha(t)$ f.a. $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ Multiindizes mit $1 \leq |\alpha| \leq m$, f.a. $(t, y) \in T \times U$.

Dann gilt:

$$F(y) := \int_T f(t, y) dt$$

ist m mal stetig differenzierbar ($F \in C^m(U)$), und die Ableitungen sind gegeben durch

$$D_y^\alpha F(y) = \int_T D_y^\alpha f(t, y) dt.$$

Beweis: Wir wenden m mal Theorem 3.18 aus Amann und Escher (2001) an. Die erste Voraussetzung an f ist nur für f selbst zu fordern und nicht für die Ableitungen, da deren Integrierbarkeit aus der jeweils vorherigen Anwendung von Theorem 3.18 folgt. ■

Satz 41. Vertauschbarkeit von Grenzwert und Integral

Sei G ein beschränktes Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Es gebe eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so dass $f_n : G \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar ist für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ in $L_2(G)$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G f_n dV = \int_G \lim_{n \rightarrow \infty} f_n dV,$$

wobei alle Integrale und Limites existieren.

Beweis: Aufgrund der Beschränktheit des Gebietes G ist die Einbettung $L_2(G) \subseteq L_1(G)$ stetig. (Folgt sofort aus der Hölder-Ungleichung (siehe z.B. Klenke, 2008, Satz 7.16) indem man für eine der Funktionen die Funktion welche konstant 1 ist einsetzt.) Damit konvergiert die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch in $L_1(G)$ (Man spricht dann auch von Konvergenz im Mittel) gegen f . Dies ist äquivalent zu $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert lokal stochastisch gegen f , und ist gleichgradig integrierbar (siehe Klenke, 2008, Satz 6.25). Die lokal

stochastische Konvergenz gegen f ist wiederum äquivalent zu: Jede Teilfolge von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt eine fast sicher gegen f konvergente Teilfolge (siehe Klenke, 2008, Korollar 6.13). Nach Übergang zu einer Teilfolge konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ also punktweise fast überall gegen f .

Die gleichgradige Integrierbarkeit von $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ impliziert die \emptyset -Stetigkeit der Integrale (engl. equicontinuity)

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 : \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_A |f_n| dV \leq \epsilon \text{ für alle } A \subset G \text{ mit } \text{Maß} < \delta(\epsilon).$$

(siehe Klenke, 2008, Satz 6.24)

Somit sind wegen der Beschränktheit des Gebietes alle Voraussetzungen für das Konvergenztheorem von Vitali (siehe Zeidler, 1990b, Anhang A2(21)) erfüllt, mit welchem die Aussage des Satzes folgt. ■

Satz 42. Regularität der Fourier-Koeffizienten

Sei $g \in H^m(\Omega)$, dann gilt für die Fourier-Koeffizienten $g^l : A \rightarrow \mathbb{R}$

$$g^l(x, y) := \frac{1}{hc^{2l}} \int_{-h/2a}^{h/2a} g(x, y, z) \widehat{P}^l(z) dz,$$

dass $g^l \in H^m(A)$, und die schwachen Ableitungen sind gegeben durch

$$D_{x,y}^{(\alpha)} g^l(x, y) = \frac{1}{hc^{2l}} \int_{-h/2a}^{h/2a} D_{x,y}^{(\alpha)} g(x, y, z) \widehat{P}^l(z) dz.$$

Beweis: Da $g \in H^m(\Omega)$ ist, existiert nach Satz 15 eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $g_n \in C^m(\overline{\Omega})$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g$. Sei $l \in \mathbb{N}_0$ beliebig aber fest gewählt. Wir setzen für alle $n \in \mathbb{N}$ $f_n : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x, y, z) := \frac{1}{hc^{2l}} g_n(x, y, z) \widehat{P}^l(z).$$

Da $\widehat{P}^l \in C^\infty(\mathbb{R})$ ist, gilt $f_n \in C^m(\overline{\Omega})$ f.a. $n \in \mathbb{N}$. f_n und partielle Ableitungen von f_n bis zur Ordnung m sind stetige Funktion auf kompaktem Träger und daher beschränkt. Somit erfüllt f_n die Voraussetzungen von Satz 40 und es gilt:

$$F_n(x, y) := \int_{-h/2a}^{h/2a} f_n(x, y, z) dz$$

ist auf A m -mal stetig differenzierbar mit

$$D_{x,y}^\alpha F_n(x, y) = \int_{-h/2a}^{h/2a} D_{x,y}^\alpha f_n(x, y, z) dz.$$

Sei nun $\phi \in C_0^\infty(A)$ beliebig. Wir multiplizieren die obige Gleichung mit ϕ und integrieren über A :

$$\int_A D_{x,y}^\alpha F_n(x, y) \phi(x, y) dA = \int_A \int_{-h/2a}^{h/2a} D_{x,y}^\alpha f_n(x, y, z) dz \phi(x, y) dA$$

Beide Integrale (linkes und rechtes) existieren dabei auch unabhängig von ihrer Gleichheit, da der Integrand jeweils eine stetige Funktion auf kompaktem Träger und somit beschränkt ist (siehe Zeidler, 1990a, Anhang A1(16)). Nach dem Satz von Fubini (siehe Zeidler, 1990a, Anhang A1(23)) sind zudem die zwei Integrale der rechten Seite vertauschbar. Wir wenden auf beiden Seiten partielle Integration an und erhalten:

$$\int_A F_n(x, y) D_{x,y}^\alpha \phi(x, y) dA = \int_{-h/2a}^{h/2a} \int_A f_n(x, y, z) D_{x,y}^\alpha \phi(x, y) dA dz$$

Nun gehen wir zum Grenzwert über.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A F_n(x, y) D_{x,y}^\alpha \phi(x, y) dA = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-h/2a}^{h/2a} \int_A f_n(x, y, z) D_{x,y}^\alpha \phi(x, y) dA dz$$

Den rechten Grenzwert können wir wegen Satz 41 ins Integral (über Ω ; also in beide Integrale) ziehen, da wir schon wissen, dass der Grenzwert des rechten Integranden existiert und integrierbar ist. Weiter können wir die Integrale rechts vertauschen und mit der selben Argumentation den rechten Limes vor das Integral über die z -Koordinate schreiben, womit wir gezeigt haben, dass wir den linken Grenzwert ins Integral ziehen können. Daher gilt

$$\int_A \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x, y)}_{=: F(x, y)} D_{x,y}^\alpha \phi(x, y) dA = \int_{-h/2a}^{h/2a} \int_A \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, y, z)}_{=: \frac{1}{hc^{2l}} g(x, y, z) \hat{P}^l(z)} D_{x,y}^\alpha \phi(x, y) dA dz.$$

Da F_n m -mal stetig differenzierbar ist, gilt $F \in H^m(A)$ (siehe Satz 15: $\|F_n\|_{H^m(A)} < \infty$ gilt wegen $f_n \in C^m(\bar{\Omega})$). Dass $F = g^l$ gilt, folgt mit dem Hauptsatz der Variationsrechnung nach Vertauschen der Integrale rechts. Weiter folgt mit der Definition der schwachen Ableitung

$$\int_A g^l(x, y) D_{x,y}^\alpha \phi(x, y) dA = (-1)^{|\alpha|} \int_A \left[\frac{1}{hc^{2l}} \int_{-h/2a}^{h/2a} D_{x,y}^{(\alpha)} g(x, y, z) \hat{P}^l(z) dz \right] \phi(x, y) dA,$$

womit wiederum per Definition der schwachen Ableitung also

$$D_{x,y}^{(\alpha)} g^l(x, y) = \frac{1}{hc^{2l}} \int_{-h/2a}^{h/2a} D_{x,y}^{(\alpha)} g(x, y, z) \hat{P}^l(z) dz$$

gilt. ■

5 Die exakte 2D-Darstellung

Ziel dieses Kapitels ist es, mittels der Fourierreihenentwicklung des letzten Kapitels das schwache Problem der Elastostatik in eine zweidimensionale Formulierung zu überführen. Dies wird uns bereits mit Satz 43 gelingen. In Abschnitt 5.2 werden wir sehen, dass wir die zweidimensionalen Feldgleichung des Satzes 43 auch in den dort eingeführten Schnittgrößen schreiben können. Es gibt damit die Möglichkeiten, unser 2D-Problem in Verschiebungen u_i und in Spannungen bzw. Schnittgrößen m_{ij}^l zu formulieren. In Abschnitt 5.5 werden wir dann zu dem wichtigen Spezialfall eines homogenen Materials übergehen.

5.1 Das äquivalente 2D-Problem

Sei $u := \tilde{u} + \tilde{u}_0$ die Lösung des schwachen Problems der linearen Elastostatik aus Satz 28, und sei $u \in [H^2]^3(\Omega)$ (diese Annahme haben wir bereits am Ende von Kapitel 3 diskutiert). Für u gilt also

$$\forall v \in X_0 : B(\tilde{u} + \tilde{u}_0, v) = f(v). \quad (29)$$

Die schwache Formulierung (29) ist äquivalent zur schwachen Formulierung, in der nur Testfunktionen aus $[H^2]^3(\Omega) \cap X_0$ zugelassen sind. Denn für den Test mit einer Funktion in X_0 , welche nicht im Schnitt $[H^2]^3(\Omega) \cap X_0$ ist, können wir eine approximierende Folge in $[C^\infty]^3(\bar{\Omega}) \cap X_0$ finden.

$[C^\infty]^3(\bar{\Omega}) \cap X_0$ ist dabei offenbar in $[H^2]^3(\Omega) \cap X_0$ enthalten, und außerdem ist $[C^\infty]^3(\bar{\Omega})$ dicht in $[H^1]^3(\Omega)$ (siehe Zeidler, 1990a, Korollar 21.15 a)), so dass eine approximierende Folge existiert. Die Schwache Formulierung gilt dann für alle Folgenglieder und wegen Satz 41 ebenfalls für den Grenzwert. Demnach würde es sogar genügen, nur $[C^\infty]^3(\bar{\Omega}) \cap X_0$ Testfunktionen zuzulassen.

Die schwache Formulierung gilt dabei für eine beliebige Parametrisierung von Ω . Wir wollen hier zunächst von einer Parametrisierung in ξ -Koordinaten (Ω_ξ) ausgehen und dann auf die dimensionslosen x -Koordinaten transformieren (Ω_x), um letztendlich die üblichen dimensionslosen Kennzahlen der Plattentheorie zu erhalten. Es gilt mittels partieller Integration

$$\begin{aligned} B(u, v) &= \int_{\Omega_\xi} E_{ijrs} u_{r|s} v_{i|j} dV_\xi = a \int_{\Omega_x} E_{ijrs} u_{r,s} v_{i,j} dV_x \\ &= -a \int_{\Omega_x} (E_{ijrs} u_{r,s})_{,j} v_i dV_x + a \int_{\partial\Omega_{xN}} E_{ijrs} u_{r,s} n_j v_i dA_x \\ &= a^3 \int_{\Omega_x} f_i v_i dV_x + a^2 \int_{\partial\Omega_{xN}} g_i v_i dA_x. \end{aligned}$$

Nun setzen wir für v , welches wir nach obigen Überlegungen in $[H^2]^3(\Omega)$ annehmen können, die Fourierreihe

$$v_i(x, y, z) = a \sum_{l=0}^{\infty} v_i^l(x, y) \hat{P}^l(z)$$

gemäß Satz 39 ein. Unter Ausnutzung der Geometrie der Platte erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \int_A \sum_{l=0}^{\infty} v_i^l \left[a^2 \int_{-h/2a}^{h/2a} (E_{ijrs} u_{r,s})_{,j} \hat{P}^l dz + a^4 \int_{-h/2a}^{h/2a} f_i \hat{P}^l dz \right] dA \\ &+ \int_{\Gamma_N} \sum_{l=0}^{\infty} v_i^l \left[-a^2 \int_{-h/2a}^{h/2a} E_{ijrs} u_{r,s} n_j \hat{P}^l dz + a^3 \int_{-h/2a}^{h/2a} g_i \hat{P}^l dz \right] ds \\ &+ \int_A \sum_{l=0}^{\infty} v_i^l \left[- \left[a^2 E_{ijrs} u_{r,s} n_j \hat{P}^l \right] \left(x, y, \frac{h}{2a} \right) - \left[a^2 E_{ijrs} u_{r,s} n_j \hat{P}^l \right] \left(x, y, \frac{-h}{2a} \right) \right] dA \\ &+ \int_A \sum_{l=0}^{\infty} v_i^l \left[a^3 \left(\left[g_i \hat{P}^l \right] \left(x, y, \frac{h}{2a} \right) + \left[g_i \hat{P}^l \right] \left(x, y, \frac{-h}{2a} \right) \right) \right] dA, \end{aligned} \quad (30)$$

wobei für alle Integrationsgebiete (A, Γ_N) die Parametrisierungen in x -Koordinaten gemeint sind. Der Übersichtlichkeit halber lassen wir diese Indizierung ab jetzt weg. Die Reihen (als Grenzwerte ihrer Partialsummen betrachtet) dürfen mit dem Integral über z aufgrund von Satz 41 vertauscht werden, da für jeden Punkt in \bar{A} die Fourierreihe $L_2(-h/2a, h/2a)$ konvergent ist. Weiter sind die Basispolynome offenbar und der Grenzwert per Voraussetzung integrierbar.

Obige Gleichung gilt dabei für alle $v \in [H^2]^3(\Omega) \cap X_0$. Sei nun $t \in C_0^\infty(A)$ beliebig gewählt und v konkret $v(x, y, z) = at(x, y)e_i \hat{P}^l(z)$ für ein festes $i \in \{1, 2, 3\}$ und ein festes $l \in \mathbb{N}_0$, wobei e_i der i -te Einheitsvektor des x -Koordinatensystems sei. Offenbar ist $v \in [C^\infty]^3$ und erfüllt aufgrund des kompakten Trägers von t die homogenen Randbedingungen auf $\partial\Omega_0$, womit v in $[H^2]^3(\Omega) \cap X_0$ und damit eine gültige Testfunktion ist. Weiter ist v seine eigene Fourierreihe, denn

$$v^k(x, y) = \frac{1}{hc^{2k}} \int_{-h/2a}^{h/2a} v(x, y, z) \hat{P}^k(z) dz = \frac{a}{hc^{2k}} t(x, y) e_i \int_{-h/2a}^{h/2a} \hat{P}^l \hat{P}^k dz \stackrel{(25)}{=} t(x, y) e_i \delta_{lk}.$$

Damit erhalten wir konkret

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_A t \left[a^2 \int_{-h/2a}^{h/2a} (E_{ijrs}u_{r,s})_{,j} \widehat{P}^l dz + a^4 \int_{-h/2a}^{h/2a} f_i \widehat{P}^l dz \right] dA \\
 &+ \int_A t \left[- \left[a^2 E_{ijrs}u_{r,s} n_j \widehat{P}^l \right] \left(x, y, \frac{h}{2a} \right) - \left[a^2 E_{ijrs}u_{r,s} n_j \widehat{P}^l \right] \left(x, y, \frac{-h}{2a} \right) \right] dA \\
 &+ \int_A t \left[a^3 \left(\left[g_i \widehat{P}^l \right] \left(x, y, \frac{h}{2a} \right) + \left[g_i \widehat{P}^l \right] \left(x, y, \frac{-h}{2a} \right) \right) \right] dA,
 \end{aligned}$$

wobei zu beachten ist, dass i hier immer noch fest gewählt und daher auch nicht durch die Summenkonvention gebunden ist. Mit dem Hauptsatz der Variationsrechnung folgt dann insgesamt das Differentialgleichungssystem

$$\forall i \in \{1, 2, 3\} \forall l \in \mathbb{N}_0 \text{ f.f.a. } (x, y) \in A :$$

$$\begin{aligned}
 0 &= a^2 \left[\int_{-h/2a}^{h/2a} (E_{ijrs}u_{r,s})_{,j} \widehat{P}^l dz \right. \\
 &\quad \left. - \left[E_{ijrs}u_{r,s} n_j \widehat{P}^l \right] \left(x, y, \frac{h}{2a} \right) - \left[E_{ijrs}u_{r,s} n_j \widehat{P}^l \right] \left(x, y, \frac{-h}{2a} \right) \right] \\
 &+ a^3 \left(\left[g_i \widehat{P}^l \right] \left(x, y, \frac{h}{2a} \right) + \left[g_i \widehat{P}^l \right] \left(x, y, \frac{-h}{2a} \right) \right) + a^4 \int_{-h/2a}^{h/2a} f_i \widehat{P}^l dz, \tag{31} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{15em}}_{=: a^3 c^l P_i^l}
 \end{aligned}$$

denn i und l waren beliebig gewählt. Wir fassen dabei alle als gegeben vorausgesetzten Lastgrößen in den Lastresultanten P_i^l zusammen. Wir diskutieren diese Definition später in Abschnitt 5.3. Nun setzen wir (31) in (30) ein, womit nur das Integral über den Rand Γ_N stehen bleibt. Weiter sei $t \in C_0^\infty(\Gamma_N)$ beliebig gewählt und v konkret $v(x, y, z) = at(x, y)e_i \widehat{P}^l(z)$ für ein festes $i \in \{1, 2, 3\}$ und ein festes $l \in \mathbb{N}_0$. Mit der gleichen Argumentation wie oben erhalten wir mit Anwendung des Hauptsatzes der Variationsrechnung mit $G = \Gamma_N$ die sogenannten Krastrandbedingungen

$$\forall i \in \{1, 2, 3\} \forall l \in \mathbb{N}_0 \text{ f.f.a. } (x, y) \in \Gamma_N :$$

$$a^{2-l} m_{ij}^l n_j = a^2 \int_{-h/2a}^{h/2a} E_{ijrs}u_{r,s} n_j \widehat{P}^l dz = a^3 \int_{-h/2a}^{h/2a} g_i \widehat{P}^l dz. \tag{32}$$

Die Schnittgrößen m_{ij}^l führen wir erst im nächsten Abschnitt ein. Wir betrachten die linke Seite der obigen Gleichung bis dahin schlicht als eine abkürzende Schreibweise für den Term in der Mitte. (31) lässt sich mit Einsetzen von

$$n \left(\frac{h}{2a} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad n \left(\frac{-h}{2a} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

umschreiben zu

$$\forall i \in \{1, 2, 3\} \forall l \in \mathbb{N}_0 \text{ f.f.a. } (x, y) \in A :$$

$$\begin{aligned}
 &a^2 \left[\int_{-h/2a}^{h/2a} (E_{iars}u_{r,s})_{,\alpha} \widehat{P}^l dz + \int_{-h/2a}^{h/2a} (E_{i3rs}u_{r,s})_{,3} \widehat{P}^l dz \right. \\
 &\quad \left. - \left[E_{ijrs}u_{r,s} n_j \widehat{P}^l \right] \left(x, y, \frac{h}{2a} \right) - \left[E_{ijrs}u_{r,s} n_j \widehat{P}^l \right] \left(x, y, \frac{-h}{2a} \right) \right] \\
 &= -a^3 c^l P_i^l. \tag{33}
 \end{aligned}$$

Nun können wir erneut partielle Integration anwenden und erhalten

$$\forall i \in \{1, 2, 3\} \forall l \in \mathbb{N}_0 \text{ f.f.a. } (x, y) \in A : \quad (34)$$

$$a^2 \left[\int_{-h/2a}^{h/2a} (E_{i\alpha r s} u_{r,s})_{,\alpha} \widehat{P}^l dz - \int_{-h/2a}^{h/2a} E_{i3rs} u_{r,s} \widehat{P}_{,3}^l dz \right] = -a^3 c^l P_i^l.$$

Man beachte, dass sich aus (34) und (32) wieder (30) folgern lässt. Hierzu formen wir (34) zunächst wieder in (31) um. Dann multiplizieren wir (31) und (32) mit den Fourier-Koeffizienten einer beliebigen Testfunktion, um diese zu den entsprechenden Reihen in (30) aufzuaddieren, von denen wir schon wissen (Satz 41), dass es sich um absolut konvergente Fourier-Reihen handelt. Letztlich sind noch die Integrale zu bilden und die Anteile von (31) und (32) zu addieren. Somit sind (34) und (32) auch äquivalent zu (29).

Wir fassen unsere bisherigen Überlegungen in dem folgenden Satz zusammen:

Satz 43. Äquivalentes 2D-Problem

Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 28 gelte $u \in [H^2]^3(\Omega)$. Dann gilt:

Die Probleme: Finde $u \in X$ mit

$$(II) \begin{cases} \forall v \in X_0 : B(u, v) = f(v) \\ Su(x) = u_0(x) \text{ für fast alle } x \in \partial\Omega_0 \end{cases}$$

$$(III) \begin{cases} \forall i \in \{1, 2, 3\} \forall l \in \mathbb{N}_0 : \\ \text{f.f.a. } (x, y) \in A : \\ a^2 \left[\int_{-h/2a}^{h/2a} (E_{i\alpha r s} u_{r,s})_{,\alpha} \widehat{P}^l dz \right. \\ \left. - \int_{-h/2a}^{h/2a} E_{i3rs} u_{r,s} \widehat{P}_{,3}^l dz \right] = -a^3 c^l P_i^l \\ \text{f.f.a. } (x, y, z) \in \partial\Omega_0 : Su(x, y, z) = u_0(x, y, z) \\ \text{f.f.a. } (x, y) \in \Gamma_N : a^{2-l} m_{ij}^l n_j = a^3 \int_{-h/2a}^{h/2a} g_i \widehat{P}^l dz \end{cases}$$

sind äquivalent und es existiert genau eine gemeinsame Lösung.

Natürlich ist auch Problem (I) aus Satz 28 weiter äquivalent zu (II) und damit auch zu (III).

5.2 Die Schnittgrößen

Wir definieren die Schnittgrößen als

$$m_{ij}^l(x, y) := a^l \int_{\frac{-h}{2a}}^{\frac{h}{2a}} \sigma_{ij}(u)(x, y, z) \widehat{P}^l(z) dz. \quad (35)$$

Man beachte, dass wegen der Grundgleichungen und der Symmetrien des Tensors E

$$\sigma_{ij}(u) = E_{ijrs} \varepsilon_{rs}(u) = E_{ijrs} u_{r,s}$$

gilt. Damit gilt dann auch

$$a^{2-l} m_{ij}^l n_j = a^2 \int_{-h/2a}^{h/2a} E_{ijrs} u_{r,s} n_j \widehat{P}^l dz,$$

was wir schon in (32) benutzt hatten. Hat u sogar die Regularität $[H^3]^3$ und E die Regularität $[H^2]^{3^4}$, so hat $\sigma_{ij}(u)$ die Regularität $[H^2]^{3 \times 3}$, und es gilt:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x, y, z) &\stackrel{\text{Satz 39}}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sigma_{ij}(x, y, z), \frac{\hat{P}^l(z)}{\|\hat{P}^l\|} \right)_{L_2(-h/2a, h/2a)} \frac{\hat{P}^l(z)}{\|\hat{P}^l\|} \\ &\stackrel{(25)}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{a^{l-1} h c^{2l}} m_{ij}^l(x, y) \hat{P}^l(z). \end{aligned}$$

Bei den Schnittgrößen handelt es sich also im Wesentlichen um die Fourier-Koeffizienten des Spannungstensors. Somit ist die physikalische Interpretation der Schnittgrößen (oder auch Spannungsergebnanten) geklärt: Die Schnittgrößen beschreiben Normal- und Querkräfte(-Flächendichten) bzw. „Momente“ bezüglich der Basispolynome, die durch die Spannungsverteilung bei Schnitten durch den Körper entstehen. Die Größe m_{13}^0 beispielsweise ist der Querkraft-Flächen-Dichte-Anteil in x_3 -Koordinatenrichtung, der bei einem Schnitt mit äußerem Normaleneinheitsvektor e_1 entsteht. (D.h. die Schnittebene steht auf dem Vektor e_1 senkrecht, und e_1 zeigt vom Körper weg. In der Terminologie der TM spricht man dann vom „positiven Schnittufer“.) Aufgrund der Symmetrie von σ kann man in der obigen Interpretation auch x_3 durch x_1 ersetzen, wenn man ebenfalls e_1 durch e_3 ersetzt. Die Größen m_{ij}^1 beschreiben die klassischen Schnittmomente der Plattentheorie. Die „Momente höherer Ordnung“ m_{ij}^l mit $l > 1$ hingegen weichen von der klassischen Definition in der TM ab, welche sich auf eine Basis aus Monomen beziehen.

Der Vorfaktor a^l in der Definition der Schnittgrößen hat hier die Aufgabe, die Kompatibilität zu diesen Plattentheorien sicherzustellen. Man beachte, dass man in (35) für \hat{P}^l auch eine beliebige andere (Banach)-Basis von $L_2(-h/2a, h/2a)$ (in der entdimensionierten Koordinate z) einsetzen kann; zum Beispiel die Monome, für die dann

$$\begin{aligned} m_{ij}^l(x, y) &= a^l \int_{-\frac{h}{2a}}^{\frac{h}{2a}} \sigma_{ij}(x, y, z) z^l dz = a^l \int_{-\frac{h}{2a}}^{\frac{h}{2a}} E_{ijrs} u_{r,s} z^l dz \\ &\stackrel{(2),(1)}{=} a^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_{ijrs} u_{r|s} \left(\frac{\xi_3}{a} \right)^l d\xi_3 = a^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \left(\frac{\xi_3}{a} \right)^l d\xi_3 \\ m_{ij}^l(\xi_1, \xi_2) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \xi_3^l d\xi_3 \end{aligned}$$

gilt. Diese Formel entspricht der in der Ingenieurliteratur üblichen Definition für die Schnittgrößen, da hier stets Reihenentwicklungen bezüglich einer Basis aus Monomen verwendet werden. Somit ist (35) eine konsequente Verallgemeinerung der üblichen Definition für beliebige (Banach-)Basen von $L_2(-h/2a, h/2a)$ in der dimensionslosen Koordinate z . Man beachte, dass man für nicht orthogonale Basen (wie die Monome) aber natürlich andere Argumente als die unseren benötigt, um die Existenz einer Reihenentwicklung der Testfunktionen nachzuweisen.

Mit der Definition der Schnittgrößen und

$$\frac{d\hat{P}^n}{dz}(z) = \sum_{\{k \in \mathbb{N}_0 \mid 2k \leq n-1\}} \sqrt{\frac{(2n+1)(2n-4k-1)}{3}} c^{2k} \hat{P}^{n-2k-1}(z)$$

(siehe (26)) können wir (34) auch nur in den Schnittgrößen schreiben:

$$a^3 \left[\frac{1}{a^{l+1}} m_{j\alpha, \alpha}^l - \sum_{\{k \in \mathbb{N}_0 | 2k \leq l+1\}} \sqrt{\frac{2l+1}{3}} \sqrt{(2l-4k-1)} c^{2k} \frac{1}{a^{l-2k}} m_{3j}^{l-2k-1} \right] = -a^3 c^l P_j^l \quad (36)$$

f.a. $l \in \mathbb{N}_0$, $j \in \{1, 2, 3\}$, f.f.a. $x \in A$.

Dass wir die schwachen Ableitungen nach x und y mit dem Integral vertauschen dürfen, hatten wir bereits in Satz 42 gezeigt. Hier zwar konkret für die Definition der Fourier-Koeffizienten von Verschiebungskomponenten, doch die Umskalierung mittels Konstanten beeinflusst die Aussage des Satzes natürlich nicht. Man beachte, dass $\sigma \in [H^1]^{3 \times 3}$ gilt. Dies reicht jedoch aus, da wir ja auch nur schwache Ableitungen der Ordnung 1 mit dem Integral vertauschen. Man beachte auch, dass Satz 42 nicht an die Existenz der Fourier-Reihe gebunden ist. Weiter ist die Summe aus (26) endlich und darf daher auch mit dem Integral vertauscht werden.

Satz 44. Äquivalentes 2D-Problem in Schnittgrößen

Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 28 gelte $u \in [H^2]^3(\Omega)$. Dann gilt:

Die Probleme: Finde $u \in X$ mit (I), (II) und

$$(III) \left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \{1, 2, 3\} \forall l \in \mathbb{N}_0 : \\ \text{f.f.a. } (x, y) \in A : \\ a^2 \left[\int_{-h/2a}^{h/2a} (E_{i\alpha r s} u_{r,s})_{,\alpha} \widehat{P}^l dz \right. \\ \left. - \int_{-h/2a}^{h/2a} E_{i3rs} u_{r,s} \widehat{P}_{,3}^l dz \right] = -a^3 c^l P_i^l \\ \text{f.f.a. } (x, y, z) \in \partial\Omega_0 : Su(x, y, z) = u_0(x, y, z) \\ \text{f.f.a. } (x, y) \in \Gamma_N : a^{2-l} m_{ij}^l n_j = a^3 \int_{-h/2a}^{h/2a} g_i \widehat{P}^l dz \end{array} \right.$$

$$(IV) \left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \{1, 2, 3\} \forall l \in \mathbb{N}_0 : \\ \text{f.f.a. } (x, y) \in A : \\ a^3 \left[\frac{1}{a^{l+1}} m_{i\alpha, \alpha}^l - \sum_{\{k \in \mathbb{N}_0 | 2k \leq l+1\}} \sqrt{\frac{2l+1}{3}} \sqrt{(2l-4k-1)} c^{2k} \frac{1}{a^{l-2k}} m_{3i}^{l-2k-1} \right] = -a^3 c^l P_i^l \\ \text{f.f.a. } (x, y, z) \in \partial\Omega_0 : Su(x, y, z) = u_0(x, y, z) \\ \text{f.f.a. } (x, y) \in \Gamma_N : a^{2-l} m_{ij}^l n_j = a^3 \int_{-h/2a}^{h/2a} g_i \widehat{P}^l dz \end{array} \right.$$

sind äquivalent und es existiert genau eine gemeinsame Lösung.

Bemerkung

Man beachte, dass wir, um zu (36) zu gelangen, nur (26) als konkrete Eigenschaft der Basis \widehat{P}^n benutzt haben. Somit lässt sich das Gleichungssystem (29) für jede beliebige Polynombasis in den gemäß (35) definierten Schnittgrößen schreiben, wenn man in (35) die entsprechenden Basispolynome einsetzt. Eine Formel wie (26) muss für jede Polynombasis von $L_2(-h/2a, h/2a)$ existieren, da Ableitungen von Polynomen wieder Polynome sind. Nur die konkrete Form des zweiten Summanden in (36) hängt von der Basis ab.

Für Monome beispielsweise erhalten wir aus der Taylor-Reihenentwicklung die Existenz einer Reihendarstellung der Testfunktionen, wenn wir diese in $[C^\infty]^3(\overline{\Omega}) \cap X_0$ annehmen. Dass diese Annahme der Regularität der Testfunktionen erlaubt ist, hatten wir uns bereits am Anfang des Kapitels 5 überlegt. Wegen

$$\frac{dz^n}{dz} = n z^{n-1}$$

ist damit schon bewiesen, dass

$$a^3 \left[\frac{1}{a^{l+1}} m_{j\alpha, \alpha}^l - \frac{l}{a^l} m_{3j}^{l-1} \right] = -a^3 c^l P_j^l$$

f.a. $l \in \mathbb{N}_0$, $j \in \{1, 2, 3\}$, f.f.a. $x \in A$.

gilt, wenn wir die Vereinbarung $m_{ij}^{-1} := 0$ treffen. Dies ist eine allgemeine Formel für alle in (Bose, 2004, Formel 3.44) zitierten Spezialfälle.

5.3 Die Lastresultanten

Die Lastresultanten hatten wir bereits mittels

$$a^3 c^l P_i^l := a^3 \left(g_i \widehat{P}^l \left(\frac{h}{2a} \right) + g_i \widehat{P}^l \left(\frac{-h}{2a} \right) \right) + a^4 \int_{-h/2a}^{h/2a} f_i \widehat{P}^l dz \quad (37)$$

definiert. Dabei war bis jetzt unklar, wieso das c^l auf der linken Seite sinnvoll ist. Falls f die Regularität $[H^2]^3$ besitzt, so gilt

$$\begin{aligned} f_i(x, y, z) &\stackrel{\text{Satz 39}}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \left(f_i(x, y, z), \frac{\widehat{P}^l(z)}{\|\widehat{P}^l\|} \right)_{L_2(-h/2a, h/2a)} \frac{\widehat{P}^l(z)}{\|\widehat{P}^l\|} \\ &\stackrel{(25)}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \underbrace{\frac{a}{hc^{2l}} \left(f_i(x, y, z), \widehat{P}^l(z) \right)_{L_2(-h/2a, h/2a)}}_{=: f_i^l(x, y)} \widehat{P}^l(z). \end{aligned}$$

Zusammen mit Satz 36 e) gilt dann

$$\begin{aligned} a^3 c^l P_i^l &= a^3 \left(g_i \widehat{P}^l \left(\frac{h}{2a} \right) + g_i \widehat{P}^l \left(\frac{-h}{2a} \right) \right) + a^4 \int_{-h/2a}^{h/2a} f_i \widehat{P}^l dz \\ &= a^3 \sqrt{2l+1} c^l \left(g_i \left(x, y, \frac{h}{2a} \right) + (-1)^l g_i \left(x, y, \frac{-h}{2a} \right) \right) + a^3 h c^{2l} f_i^l(x, y) \\ P_i^l(x, y) &= \sqrt{2l+1} \left(g_i \left(x, y, \frac{h}{2a} \right) + (-1)^l g_i \left(x, y, \frac{-h}{2a} \right) \right) + h c^l f_i^l(x, y). \end{aligned}$$

Wir hatten bereits in Satz 36 f) gezeigt, dass für die Basispolynome $\widehat{P}^n \left(\frac{h}{2a} \right) = \sqrt{2n+1} c^n$ gilt. Das n -te Basispolynom hat also die Größenordnung c^n , d.h. die Basispolynome werden mit wachsendem n schnell sehr klein. Dies sieht man auch in Abbildung 4 sehr deutlich. Bei einer Fourierreihenentwicklung einer beliebigen Funktion würde man deshalb erwarten, dass die Fourier-Koeffizienten (im selben Maße) schnell sehr groß werden. Dies deckt sich auch mit der Definition der Fourier-Koeffizienten. Aufgrund des Vorfaktors $1/c^{2l}$ ist f_i^l von der Größenordnung $1/c^l$, wenn wir annehmen, dass f die Größenordnung 1 hat. Durch das Ausklammern der Potenz c^l in der Definition der Lastresultanten P_i^l wird die Größenordnung eines P_i^l nun nur noch durch die Eigenschaften der Funktionen g und f bestimmt. $c^l P_i^l$ hingegen würde i.a. mit wachsendem l schnell sehr klein werden.

5.4 Die Verschiebungsrandbedingungen in den Fourier-Koeffizienten von u

Die Probleme (III) und (IV) sind bereits Probleme mit zweidimensionalen Feldgleichungen. Dazu passen auch die Kraftrandbedingungen, die auf dem Teil Γ_N des Randes von A formuliert sind. Die Verschiebungsrandbedingungen sind jedoch weiter auf $\partial\Omega_0$ formuliert. Um zu einer Formulierung auf Γ_0 zu gelangen, werden wir auch für u die Fourierreihen-Darstellung gemäß Satz 39 verwenden; zudem nehmen wir an, dass u_0 eine $[H^2]^3(\Omega)$ -Funktion ist. Punktweise gilt auf Ω für die stetigen Vertreter von u_i und u_i^k

$$u_i(x, y, z) = a \sum_{k=0}^{\infty} u_i^k(x, y) \widehat{P}^k(z)$$

und damit

$$u_{i|\partial\Omega_0} = a \sum_{k=0}^{\infty} u_{i|\Gamma_0}^k \widehat{P}^k.$$

Gleiches gilt für die stetigen Vertreter von u_{0i} und u_{0i}^k . Somit ist die verallgemeinerte Randbedingung $Su(x) = u(x) = u_0(x) = Su_0(x)$ f.f.a. $x \in \partial\Omega_0$, äquivalent zu $\forall i \in \{1, 2, 3\} \forall l \in \mathbb{N}_0 : u_i^k(x, y) = u_{0i}^k(x, y)$ f.f.a. $x \in \Gamma_0$, da sich beide Entwicklungen auf dieselbe Basis \widehat{P}^k beziehen. Hierbei ist mit $u(x)$ bzw. $u_0(x)$ die punktweise Auswertung des stetigen Vertreters von u bzw. u_0 gemeint, welche auf dem Rand fast überall mit der Spur der $[H^2]^3$ -Funktion u bzw. u_0 übereinstimmt. Das heißt, die verallgemeinerte Verschiebungsrandbedingung wird zu

$$\begin{aligned} & \forall i \in \{1, 2, 3\} \forall l \in \mathbb{N}_0 \text{ f.f.a. } (x, y) \in \Gamma_0 : \\ & c^{2l} u_i^l = \frac{1}{h} \int_{-h/2a}^{h/2a} u_{0i} \widehat{P}^l dz. \end{aligned} \quad (38)$$

Bemerkung

Falls sogar $\partial A \in C^{1,1}$ gilt (z.B. für eine Kreisplatte), so gilt ein Satz analog zu Satz 20, welcher $H^{3/2}(\partial A)$ als exakten Raum der Spuren von $H^2(A)$ -Funktionen ausweist (siehe Wloka, 1982, Satz 8.7 und Satz 8.8). Diese haben dann auf $\overline{\partial A}$ einen stetigen Vertreter (siehe Wloka, 1982, Satz 6.4). In diesem Fall sind dann auch starke Randbedingungen (f.a. anstelle f.f.a.) in (38) realisierbar. Doch selbst falls wir $\partial\Omega \in C^{1,1}$ annehmen, wissen wir dann aufgrund der Dimension von Ω nicht, ob $Su(x) = Su_0(x)$ f.a. $x \in \partial\Omega_0$ gilt. Außerdem ist diese Annahme nicht mit der Geometrie der Platte vereinbar.

5.5 Die 2D-Darstellung für homogenes Material

In diesem Abschnitt betrachten wir den wichtigen Spezialfall, dass E konstant ist. Man spricht dann in der Terminologie der TM von einem homogenen Material. Im folgenden Kapitel werden wir dann zusätzlich die Monotropie einsetzen. (Bis jetzt gelten alle Betrachtungen auch für Aelotropie.) Einige Kristalle sind homogene monotrope Materialien. In der Praxis tritt solch ein Materialverhalten aber auch dann auf, wenn es sich bei E um eine Elastizitätsmatrix handelt, welche Ersatzmaterialparameter enthält, welche aus einer Homogenisierungsbetrachtung gewonnen wurden. Zum Beispiel kann ein Gelege gleichgerichteter isotroper Fasern in einer isotropen Matrix oft in guter Näherung als transversal isotrop angenommen werden. Sind die Materialverhalten der einzelnen Bestandteile komplexer, so benötigt man entsprechend komplexere Werkstoffgesetze für das homogene Ersatzmaterial. Die Bestimmung der Ersatzmaterialparameter ist jedoch im allgemeinen ein komplexes Problem und ein eigenes Forschungsfeld.

Wenn wir für u die Fourier-Reihe gemäß Satz 39 einsetzen, wird (34) zu

$$\begin{aligned}
 & \forall i \in \{1, 2, 3\} \forall l \in \mathbb{N}_0 \text{ f.f.a. } (x, y) \in A : \\
 & a^3 \left[\int_{-h/2a}^{h/2a} \left(E_{i\alpha r s} \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_r^k \widehat{P}^k \right) \right)_{,s} \widehat{P}^l dz \right. \\
 & \quad \left. - \int_{-h/2a}^{h/2a} E_{i3rs} \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_r^k \widehat{P}^k \right)_{,s} \widehat{P}_{,3}^l dz \right] \\
 & = -a^3 c^l P_i^l.
 \end{aligned} \tag{39}$$

Mit der zusätzlichen Modellierungsannahme, dass E konstant ist, wird (34) zu

$$\begin{aligned}
 & \forall i \in \{1, 2, 3\} \forall l \in \mathbb{N}_0 \text{ f.f.a. } (x, y) \in A : \\
 & a^3 \sum_{k=0}^{\infty} \left[E_{i\beta r \alpha} u_{r,\alpha\beta}^k \int_{-h/2a}^{h/2a} \widehat{P}^k \widehat{P}^l dz + E_{i\alpha r 3} u_{r,\alpha}^k \int_{-h/2a}^{h/2a} \widehat{P}_{,3}^k \widehat{P}^l dz \right. \\
 & \quad \left. - E_{i3r\alpha} u_{r,\alpha}^k \int_{-h/2a}^{h/2a} \widehat{P}^k \widehat{P}_{,3}^l dz - E_{i3r3} u_r^k \int_{-h/2a}^{h/2a} \widehat{P}_{,3}^k \widehat{P}_{,3}^l dz \right] = -a^3 c^l P_i^l.
 \end{aligned} \tag{40}$$

Nun können wir die Formeln aus Satz 36 einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned}
 & \forall i \in \{1, 2, 3\} \forall l \in \mathbb{N}_0 \text{ f.f.a. } (x, y) \in A : \\
 & a^2 h \sum_{k=0}^{\infty} \left[E_{i\beta r \alpha} u_{r,\alpha\beta}^k c^{k+l} \begin{cases} 1 & \text{für } k = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \right. \\
 & \quad - \frac{1}{6} \sqrt{(2k+1)(2l+1)} E_{i3r3} u_r^k c^{k+l-2} \begin{cases} k^2 + k & \text{für } k+l \text{ gerade und } 0 \leq k \leq l \\ l^2 + l & \text{für } k+l \text{ gerade und } l < k \\ 0 & \text{für } k+l \text{ ungerade} \end{cases} \\
 & \quad \left. + \sqrt{\frac{(2k+1)(2l+1)}{3}} c^{k+l-1} \begin{cases} -E_{i3r\alpha} u_{r,\alpha}^k & \text{für } k+l \text{ ungerade und } 0 \leq k \leq l \\ E_{i\beta r 3} u_{r,\beta}^k & \text{für } k+l \text{ ungerade und } l < k \\ 0 & \text{für } k+l \text{ gerade} \end{cases} \right] \\
 & = -a^3 c^l P_i^l.
 \end{aligned} \tag{41}$$

Man beachte, dass für zwei ganze Zahlen k und l gilt: $k+l$ ungerade \iff genau eine Zahl ist gerade und eine ungerade. Daher gilt insbesondere $k \neq l$ und für festes l ist die größte Zahl, die k mit $k < l$ annehmen kann $l-1$, und die kleinste Zahl welche k annehmen kann mit $k > l$, ist $l+1$. Daher gilt

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} a & \text{für } k+l \text{ ungerade und } 0 \leq k \leq l \\ b & \text{für } k+l \text{ ungerade und } l < k \\ 0 & \text{für } k+l \text{ gerade} \end{cases} \\
 & = \begin{cases} a & \text{für } k+l \text{ ungerade und } 0 \leq k \leq l-1 \\ b & \text{für } k+l \text{ ungerade und } l+1 \leq k \\ 0 & \text{für } k+l \text{ gerade} \end{cases}
 \end{aligned}$$

(41) lässt sich natürlich auch aus einer der äquivalenten Gleichungen herleiten. Zum Beispiel lässt

sich auch (33) zu

$$\begin{aligned}
 & \forall i \in \{1, 2, 3\} \forall l \in \mathbb{N}_0 \text{ f.f.a. } (x, y) \in A : \\
 & a^3 \sum_{k=0}^{\infty} \left[E_{i\beta r\alpha} u_{r,\alpha\beta}^k \int_{-h/2a}^{h/2a} \widehat{P}^k \widehat{P}^l dz + E_{i3r\alpha} u_{r,\alpha}^k \int_{-h/2a}^{h/2a} \widehat{P}_{,3}^k \widehat{P}^l dz \right. \\
 & \quad + E_{i\beta r3} u_{r,\beta}^k \int_{-h/2a}^{h/2a} \widehat{P}_{,3}^k \widehat{P}^l dz + E_{i3r3} u_r^k \int_{-h/2a}^{h/2a} \widehat{P}_{,33}^k \widehat{P}^l dz \\
 & \quad + E_{i3r\alpha} u_{r,\alpha}^k \left(-\widehat{P}^k \widehat{P}^l \left(\frac{h}{2a} \right) + \widehat{P}^k \widehat{P}^l \left(\frac{-h}{2a} \right) \right) \\
 & \quad \left. + E_{i3r3} u_r^k \left(-\widehat{P}_{,3}^k \widehat{P}^l \left(\frac{h}{2a} \right) + \widehat{P}_{,3}^k \widehat{P}^l \left(\frac{-h}{2a} \right) \right) \right] = -a^3 c^l P_i^l \quad (42)
 \end{aligned}$$

umformen. Einsetzen der Formeln aus Satz 36 ergibt dann ebenfalls (41). (36) hingegen führt wieder direkt auf (40).

Auch die Schnittgrößen lassen sich in den Fourier-Koeffizienten von u schreiben. Wenn wir in die Definition der Schnittgrößen die Reihenentwicklung von u einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
 m_{ij}^l(x, y) &= a^l \int_{\frac{-h}{2a}}^{\frac{h}{2a}} \sigma_{ij}(u)(x, y, z) \widehat{P}^l(z) dz \\
 &= a^{l+1} \int_{\frac{-h}{2a}}^{\frac{h}{2a}} E_{ijrs} \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_r^k(x, y) \widehat{P}^k(z) \right) \widehat{P}^l(z) dz \\
 &= a^{l+1} \left[E_{ijr\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} u_{r,\alpha}^k(x, y) \int_{\frac{-h}{2a}}^{\frac{h}{2a}} \widehat{P}^k(z) \widehat{P}^l(z) dz \right. \\
 & \quad \left. + E_{ijr3} \sum_{k=0}^{\infty} u_r^k(x, y) \int_{\frac{-h}{2a}}^{\frac{h}{2a}} \widehat{P}_{,3}^k(z) \widehat{P}^l(z) dz \right],
 \end{aligned}$$

wobei wir das Integral aufgrund von Satz 41 mit der Reihe vertauschen dürfen. Mit Einsetzen der Formeln (25) und Satz 36 b) gilt dann

$$\begin{aligned}
 m_{ij}^l(x, y) &= a^l h c^{2l} \left[E_{ijr\alpha} u_{r,\alpha}^l(x, y) \right. \\
 & \quad \left. + E_{ijr3} \sqrt{\frac{2l+1}{3}} \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{2k+1} u_r^k(x, y) c^{k-l-1} \begin{cases} 1 & \text{falls } k-l-1 \geq 0 \text{ und gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \right].
 \end{aligned}$$

Da $k+l$ ungerade äquivalent dazu ist, dass genau eine der beiden Zahlen gerade und eine ungerade ist, gilt insbesondere $k=l+1 \implies k+l$ ungerade. Damit gilt dann

$$\begin{aligned}
 m_{ij}^l(x, y) &= a^l h c^{2l} \left[E_{ijr\alpha} u_{r,\alpha}^l(x, y) \right. \\
 & \quad \left. + E_{ijr3} \sqrt{\frac{2l+1}{3}} \sum_{k=l+1}^{\infty} \sqrt{2k+1} u_r^k(x, y) c^{k-l-1} \begin{cases} 1 & \text{falls } k+l \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{ij}^l(x, y) &= a^l h c^{2l} \left[E_{ijr\alpha} u_{r,\alpha}^l(x, y) \right. \\
 & \quad \left. + E_{ijr3} \sqrt{\frac{2l+1}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{2l+4n+3} c^{2n} u_r^{l+2n+1}(x, y) \right]. \quad (43)
 \end{aligned}$$

Die Krafrandbedingungen (32) ist

$$\text{f.f.a. } (x, y) \in \Gamma_N : a^{2-l} m_{ij}^l n_j = a^3 \int_{-h/2a}^{h/2a} g_i \hat{P}^l dz.$$

n ist hier der Normaleneinheitsvektor auf $\partial\Omega$, welcher auf ∂A aufgrund der Geometrie der Platte die z -Komponente Null hat und somit mit dem zweidimensionalen Normaleinheitsvektor auf ∂A identifiziert werden kann. Damit sind die Krafrandbedingungen zunächst äquivalent zu

$$\text{f.f.a. } (x, y) \in \Gamma_N : a^{2-l} m_{i\alpha}^l n_\alpha = a^3 \int_{-h/2a}^{h/2a} g_i \hat{P}^l dz,$$

und mit (43) äquivalent zu

$$\text{f.f.a. } (x, y) \in \Gamma_N : E_{i\alpha r\beta} n_\alpha c^{2l} u_{r,\beta}^l + E_{i\alpha r3} n_\alpha \sqrt{\frac{2l+1}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{2l+4n+3} c^{2l+2n} u_r^{l+2n+1} = \frac{a}{h} \int_{-h/2a}^{h/2a} g_i \hat{P}^l dz. \quad (44)$$

Schließlich können wir so Problem (III) nur in den Verschiebungskoeffizienten u_i^l schreiben:

Satz 45. Äquivalentes 2D-Problem für homogenes Material

Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 28 gelte $u \in [H^2]^3(\Omega)$, $u_0 \in [H^2]^3(\Omega)$ und E sei konstant. Dann gilt:

Die Probleme: Finde $u \in X$ mit (I), (II), (III), (IV) und

$$(V) \left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \{1, 2, 3\} \forall l \in \mathbb{N}_0 : \\ \text{f.f.a. } (x, y) \in A : \\ a^2 h \sum_{k=0}^{\infty} \left[E_{i\beta r\alpha} u_{r,\alpha\beta}^k c^{k+l} \begin{cases} 1 & \text{für } k = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \right] \\ - \frac{1}{6} \sqrt{(2k+1)(2l+1)} E_{i3r3} u_r^k c^{k+l-2} \begin{cases} k^2 + k & \text{für } k+l \text{ gerade und } 0 \leq k \leq l \\ l^2 + l & \text{für } k+l \text{ gerade und } l < k \\ 0 & \text{für } k+l \text{ ungerade} \end{cases} \\ + \sqrt{\frac{(2k+1)(2l+1)}{3}} c^{k+l-1} \begin{cases} -E_{i3r\alpha} u_{r,\alpha}^k & \text{für } k+l \text{ ungerade und } 0 \leq k \leq l \\ E_{i\beta r3} u_{r,\beta}^k & \text{für } k+l \text{ ungerade und } l < k \\ 0 & \text{für } k+l \text{ gerade} \end{cases} \\ = -a^3 c^l P_i^l. \\ \text{f.f.a. } (x, y) \in \Gamma_0 : c^{2l} u_i^l = \frac{1}{h} \int_{-h/2a}^{h/2a} u_{0i} \hat{P}^l dz \\ \text{f.f.a. } (x, y) \in \Gamma_N : \\ E_{i\alpha r\beta} n_\alpha c^{2l} u_{r,\beta}^l + E_{i\alpha r3} n_\alpha \sqrt{\frac{2l+1}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{2l+4n+3} c^{2l+2n} u_r^{l+2n+1} = \frac{a}{h} \int_{-h/2a}^{h/2a} g_i \hat{P}^l dz \end{array} \right.$$

sind äquivalent, und es existiert genau eine gemeinsame Lösung. Problem (V) ist dabei in den Fourier-Koeffizienten $u_i^k \in H^2(A)$ von u ($u_i = a \sum_{k=0}^{\infty} u_i^k \hat{P}^k$) geschrieben.

6 Das approximative 2D-Problem

(41) ist für jedes feste Paar (i, l) eine Potenzsumme in c^2 . Denn zunächst ist der erste Summand nur ungleich Null, falls $k = l$ gilt, und in diesem Fall ist c^{k+l} gerade. Der zweite Summand ist generell nur ungleich Null, falls $k+l$ gerade ist. Für $k = l = 0$ ist er außerdem Null, aufgrund der Faktoren in der

geschweiften Klammer. Somit enthalten die durch diesen Summanden entstehenden Terme ebenfalls immer einen Faktor c^{2n} mit $n \in N_0$. Der dritte Summand ist nur ungleich Null, falls $k+l$ ungerade gilt, was $k+l-1 \geq 0$ und $k+l-1$ gerade impliziert, so dass die durch diesen Summanden entstehenden Terme auch immer einen Faktor c^{2n} mit $n \in N_0$ enthalten. Auch die Krafrandbedingungen sind offenbar Potenzsummen in c^2 , und die Verschiebungsrandbedingungen enthalten stets einen Faktor c^{2l} .

Die Grundidee der konsistenten Plattentheorie besteht nun darin, zunächst anzunehmen, dass alle u_i^l in etwa die selbe Größenordnung haben. (Diese Annahme werden wir noch diskutieren.) Wenn man dann – motiviert durch die Kleinheit der Größe $c \ll 1$ – alle Summanden ignoriert, die einen Faktor einer bestimmten Potenz von c^2 enthalten, so erhält man ein endliches PDE-System zweiter Ordnung in nur endlich vielen unbekanntem Verschiebungskoeffizienten u_i^l , mit einem endlichen Satz von Randbedingungen. Obwohl dieser Ansatz intuitiv erscheint, betonen wir an dieser Stelle, dass es keine mathematische Grundlage gibt (d.h. konkret: Dem Autor ist keine rigorose mathematische Herleitung bekannt), die uns garantieren würde, dass das Vernachlässigen von Summanden mit kleinen Vorfaktoren im PDE-System auch zu kleinen Fehlern in der Lösung des Systems führt. Man beachte, dass das Vorgehen der konsistenten Plattentheorie von dem Vorgehen der Numerik partieller Differentialgleichungen (Ritz-Galerkin-Verfahren) stark abweicht, so dass die Fehlerabschätzungen aus diesem Gebiet der Mathematik hier nicht anwendbar sind. Man betrachtet dort Reihen bzw. Summen zu einer endlichen Basis von Ansatzfunktionen. Wenn wir die Fourier-Reihen abbrechen würden, würden wir in unserem Fall zwar nur endlich viele unbekannte Verschiebungskoeffizienten erhalten, doch wir hätten weiterhin eine abzählbare Menge an PDEs.

Quasi als „Ersatz“ für die formale Fehlerabschätzung werden wir aber in Abschnitt 8.2 zeigen, dass die entstehende Plattentheorie für den Spezialfall des isotropen Materials äquivalent ist zu der Theorie von R. Kienzler. Dieser zeigt in seiner Veröffentlichung Kienzler (2002), dass seine Theorie wiederum äquivalent ist zu einigen anderen sehr gebräuchlichen Plattentheorien (z.B. Reissner, Mindlin, Brod), welche sich in der Praxis bewährt haben. Dass heißt, sie erzielen in Experimenten gute Übereinstimmungen mit der Realität. Da wir die Ideen der konsistenten Plattentheorie konsequent weiterentwickeln, dürfen wir hoffen, dass auch unsere Theorie sich als praxistauglich erweisen wird. Dabei handelt es sich natürlich nur um ein Indiz für die Praxistauglichkeit der hier vorgestellten Theorie, das die formale Fehlerabschätzung sicherlich nicht ersetzen kann.

Um zu motivieren, warum man annimmt, dass die Verschiebungskoeffizienten u_i^l alle dieselbe Größenordnung haben, rufen wir uns zunächst wieder ins Gedächtnis, dass die Basispolynome \hat{P}^l die Größenordnung c^l haben. Wenn wir also annehmen, dass die u_i^l alle dieselbe Größenordnung haben, so nehmen wir an, dass die Reihenglieder $u_i^l \hat{P}^l$ für wachsendes l schnell (mit c^l) sehr klein werden. Dies entspricht auch den Erfahrungen der experimentell motivierten und erprobten klassischen Plattentheorien. Auch anschaulich kann man diese Annahme motivieren, indem man sich vorstellt, dass man einen senkrechten Strich an der Seite einer undeformierten Platte anzeichnet. Wenn man die Platte deformiert, so wird der Strich nicht mehr senkrecht sein, aber immer noch in guter Näherung durch eine lineare Funktion beschrieben werden. Anteile dritten oder gar fünften Polynomgrades würde man optisch wahrscheinlich nicht wahrnehmen. Dies motiviert die Annahme, dass $u_\alpha^1 \hat{P}^1$ absolut gesehen größer ist als $u_\alpha^3 \hat{P}^3$ oder gar $u_\alpha^5 \hat{P}^5$.

Wir werden in dieser Arbeit die Reihe (41) nach dem Summanden mit dem Faktor c^4 abbrechen. Man spricht dann von einer Plattentheorie der zweiten Ordnung. Man erkennt an (41), dass für $k > 6 - l$ nur noch Summanden generiert werden, die den Faktor c^6 enthalten, womit $k = 6 - l$ als Summationsgrenze der Summe in k ausreichend ist für eine Plattentheorie zweiter Ordnung. Für $k = l = 3$ generiert dann allerdings der erste Summand einen Term, der den Faktor c^6 enthält, welcher natürlich ebenfalls zu vernachlässigen ist. Die Reihe in (44) kann bei $n = 2 - l$ abgebrochen

werden. Für negative Summationsgrenzen vereinbaren wir dabei die Konvention, dass der Wert der Summe generell Null ist. Um uns daran zu erinnern, dass wir die Größen, die mindestens den Faktor c^6 enthalten, vernachlässigt haben, führen wir das Symbol $+O(c^6)$ ein.

Für eine voll besetzte Elastizitätsmatrix, also für Aelotropie, erhalten wir bei Vernachlässigung der Größen der Ordnung $O(c^6)$ ein Gleichungssystem der folgenden Form.

l	i	u_1^0	u_2^0	u_3^0	u_1^1	u_2^1	u_3^1	u_1^2	u_2^2	u_3^2	u_1^3	u_2^3	u_3^3	u_1^4	u_2^4	u_3^4	u_1^5	u_2^5	u_3^5
0	1	X	X	X	X	X	X				X	X	X				X	X	X
0	2	X	X	X	X	X	X				X	X	X				X	X	X
0	3	X	X	X	X	X	X				X	X	X				X	X	X
1	1	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
1	2	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
1	3	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
2	1				X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X			
2	2				X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X			
2	3				X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X			
3	1	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X						
3	2	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X						
3	3	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X						
4	1				X	X	X	X	X	X									
4	2				X	X	X	X	X	X									
4	3				X	X	X	X	X	X									
5	1	X	X	X	X	X	X												
5	2	X	X	X	X	X	X												
5	3	X	X	X	X	X	X												

Ein X bedeutet, dass (41) für das entsprechende Paar (i, l) einen Summanden enthält, der den entsprechenden Verschiebungskoeffizienten als Faktor beinhaltet, welcher nicht 0 bzw. $0 + O(c^6)$ ist. Setzen wir hingegen das Elastizitätsgesetz für Monotropie

$$\underline{\underline{E}} := \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & 0 & 0 \\ & E_{22} & E_{23} & E_{24} & 0 & 0 \\ & & E_{33} & E_{34} & 0 & 0 \\ S & & & E_{44} & 0 & 0 \\ & Y & & & E_{55} & E_{56} \\ & & M & & & E_{66} \end{bmatrix} \quad (45)$$

ein, erkennen wir, dass sich das Problem in zwei Teilprobleme entkoppelt.

l	i	u_1^0	u_2^0	u_3^0	u_1^1	u_2^1	u_3^1	u_1^2	u_2^2	u_3^2	u_1^3	u_2^3	u_3^3	u_1^4	u_2^4	u_3^4	u_1^5	u_2^5	u_3^5
0	1	X	X				X						X						X
0	2	X	X				X						X						X
0	3			X	X	X					X	X					X	X	
1	1			X	X	X				X	X	X				X	X	X	
1	2			X	X	X				X	X	X				X	X	X	
1	3	X	X				X	X	X				X	X	X				X
2	1						X	X	X				X	X	X				
2	2						X	X	X				X	X	X				
2	3				X	X				X	X	X				X			
3	1			X	X	X				X	X	X							
3	2			X	X	X				X	X	X							
3	3	X	X				X	X	X				X						
4	1						X	X	X										
4	2						X	X	X										
4	3				X	X				X									
5	1			X	X	X													
5	2			X	X	X													
5	3	X	X				X												

Die beiden Teilprobleme, namentlich das Scheiben- und das Plattenproblem, sind in den Tabellen 1 und 2 abgedruckt (vgl. auch A(2)). Aus Platzgründen verwenden wir die Matrix (45) anstatt Matrix (15) und teilen die Gleichungen in den Tabellen jeweils durch a^2h . Monotropie ist auch für den üblichen Ansatz mittels Reihenentwicklungen bezüglich einer Basis aus Monomen das allgemeinste Materialverhalten, welches zu einer Entkopplung zwischen Scheiben- und Plattenproblem führt (siehe Altenbach u. a., 1998, Abschnitt 5.1.4). Wie bereits erwähnt, ist die hier beobachtete Entkopplung der Grund für die Unterscheidung nach Belastungszuständen, hier konkret zwischen Scheibe und Platte. Die Lösung für ein gemischt belastetes ebenes Flächentragwerk kann berechnet werden, indem man die Belastung in Scheiben- und Plattenanteile zerlegt und beide Probleme getrennt voneinander löst. Die Addition beider Lösungen löst schließlich das Ursprungsproblem (Superpositionsprinzip).

Wir betrachten im Folgenden nur eines der beiden Probleme weiter: das Plattenproblem der Tabelle 2. Wie in der Plattentheorie üblich, lassen wir im Folgenden nur noch Lastresultanten zu, die in Richtung z wirken, d.h. wir nehmen an

$$P_i^l = 0 \quad \text{für } l \text{ ungerade.}$$

Wie man anhand der Definitionen der Basispolynome und der Monome erkennt, welche für ungerades l jeweils nullpunktsymmetrisch sind, beschreiben die damit auf Null gesetzten Plattenbelastungen in der Praxis weniger häufig auftretende Belastungen durch Momente. Um Missverständnissen vorzubeugen, sei an dieser Stelle noch einmal ausdrücklich erwähnt, dass es sich bei den vernachlässigten Größen tatsächlich um Plattenbelastungen handelt und nicht etwa um Scheibenbelastungen, wie man meinen könnte, da ihre Wirkungslinien in der Ebene liegen. Vielmehr wird die Klassifizierung, die besagt, dass Platten nur senkrecht zur Mittelebene belastet werden, nur dadurch richtig, dass man besagte Größen grundsätzlich aufgrund ihrer geringen Praxisrelevanz ignoriert.

Wir nehmen im Folgenden außerdem an, dass alle Lastresultanten P_i^l aufgrund ihrer Definition dieselbe Größenordnung haben. Diese Annahme hatten wir schon am Ende von Abschnitt 5.3 motiviert. Wenn wir mit den Gleichungen der Tabelle 2 nun $c^4(0, 3) + \frac{3}{\sqrt{33}} \left[\frac{\partial(5,1)}{\partial x} + \frac{\partial(5,2)}{\partial y} \right]$ bilden, folgt

$$\frac{ac^4 P_3^0}{h} = O(c^6).$$

Somit gilt dann generell

$$\forall j \in \{1, 2, 3\} \forall l \in \mathbb{N}_0 : \frac{ac^4 P_j^l}{h} = O(c^6),$$

womit insbesondere

$$\frac{ac^4 P_3^4}{h} = O(c^6)$$

in (4,3) zu vernachlässigen ist. Insgesamt führt dies auf das Gleichungssystem der Tabelle 3. Das PDE-System der Tabelle 3 stellt bereits die Feldgleichungen einer konsistenten Plattentheorie zweiter Ordnung für ein homogen monotropes Material bereit. Die Modellierung der Feldgleichungen könnte an dieser Stelle also bereits als abgeschlossen betrachtet werden. Die Angabe eines PDE-Systems vieler Unbekannter ist jedoch in der Plattentheorie sehr unüblich. Klassische Plattentheorien sind PDEs höherer Ordnung (i.d.R. Ordnung 4) in nur ein oder zwei unabhängigen Variablen. Eine Umstellung unserer Theorie zu solch einer Form ist das Thema der folgenden Kapitel.

l	i	u_1^0	u_2^0	u_3^0	u_1^1	u_2^1	u_3^1	u_1^2	u_2^2	u_3^2	u_1^4	u_2^4	u_3^4	u_1^5	RS
0	1	$E_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + E_{44} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2E_{14} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$	$E_{14} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + E_{24} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (E_{12} + E_{44}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$	$E_{13} \frac{\partial}{\partial x} + E_{34} \frac{\partial}{\partial y}$	0	0	$(E_{13} \frac{\partial}{\partial x} + E_{34} \frac{\partial}{\partial y})$	0	0	$(E_{13} \frac{\partial}{\partial x} + E_{34} \frac{\partial}{\partial y})$	$(E_{13} \frac{\partial}{\partial x} + E_{34} \frac{\partial}{\partial y})$	$-\frac{aP_0^0}{h}$			
0	2	$E_{14} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + E_{24} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (E_{12} + E_{44}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$	$E_{44} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + E_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2E_{24} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$	$E_{34} \frac{\partial}{\partial x} + E_{23} \frac{\partial}{\partial y}$	0	0	$(E_{34} \frac{\partial}{\partial x} + E_{23} \frac{\partial}{\partial y})$	0	0	$(E_{34} \frac{\partial}{\partial x} + E_{23} \frac{\partial}{\partial y})$	$(E_{34} \frac{\partial}{\partial x} + E_{23} \frac{\partial}{\partial y})$	$-\frac{aP_0^0}{h}$			
1	3	$-E_{13} \frac{\partial}{\partial x} - E_{34} \frac{\partial}{\partial y}$	$-E_{34} \frac{\partial}{\partial x} - E_{23} \frac{\partial}{\partial y}$	$c^2 E_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c^2 E_{55} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2c^2 E_{56} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - E_{33}$	$\sqrt{5c^2} (E_{66} \frac{\partial}{\partial x} + E_{56} \frac{\partial}{\partial y})$	$(E_{66} \frac{\partial}{\partial x} + E_{56} \frac{\partial}{\partial y})$	$(E_{66} \frac{\partial}{\partial x} + E_{56} \frac{\partial}{\partial y})$	$(E_{66} \frac{\partial}{\partial x} + E_{56} \frac{\partial}{\partial y})$	$(E_{66} \frac{\partial}{\partial x} + E_{56} \frac{\partial}{\partial y})$	$(E_{66} \frac{\partial}{\partial x} + E_{56} \frac{\partial}{\partial y})$	$(E_{66} \frac{\partial}{\partial x} + E_{56} \frac{\partial}{\partial y})$	$(E_{66} \frac{\partial}{\partial x} + E_{56} \frac{\partial}{\partial y})$	$(E_{66} \frac{\partial}{\partial x} + E_{56} \frac{\partial}{\partial y})$	$(E_{66} \frac{\partial}{\partial x} + E_{56} \frac{\partial}{\partial y})$	$-\frac{acP_3^1}{h}$
2	1	0	0	$(E_{66} \frac{\partial}{\partial x} + E_{56} \frac{\partial}{\partial y})$	$c^4 E_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c^4 E_{44} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2c^4 E_{14} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - 5c^2 E_{66}$	$(E_{66} \frac{\partial}{\partial x} + E_{56} \frac{\partial}{\partial y})$	0	$-\frac{ac^2 P_2^2}{h}$							
2	2	0	0	$(E_{56} \frac{\partial}{\partial x} + E_{55} \frac{\partial}{\partial y})$	$c^4 E_{14} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c^4 E_{24} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c^4 (E_{12} + E_{44}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - 5c^2 E_{56}$	$(E_{56} \frac{\partial}{\partial x} + E_{55} \frac{\partial}{\partial y})$	0	$-\frac{ac^3 P_3^3}{h}$							
3	3	$-1/3\sqrt{7}/3c^2 (E_{13} \frac{\partial}{\partial x} + E_{34} \frac{\partial}{\partial y})$	$-1/3\sqrt{7}/3c^2 (E_{34} \frac{\partial}{\partial x} + E_{23} \frac{\partial}{\partial y})$	$-1/3\sqrt{7}\sqrt{3}E_{33}c^2$	$(E_{13} \frac{\partial}{\partial x} + E_{34} \frac{\partial}{\partial y})$	$(E_{34} \frac{\partial}{\partial x} + E_{23} \frac{\partial}{\partial y})$	$(E_{13} \frac{\partial}{\partial x} + E_{34} \frac{\partial}{\partial y})$	0	0	$(E_{13} \frac{\partial}{\partial x} + E_{34} \frac{\partial}{\partial y})$	0	$-\frac{ac^4 P_4^4}{h}$			
4	1	0	0	$(E_{66} \frac{\partial}{\partial x} + E_{56} \frac{\partial}{\partial y})$	$-3c^4$	$(E_{66} \frac{\partial}{\partial x} + E_{56} \frac{\partial}{\partial y})$	0	0	$(E_{66} \frac{\partial}{\partial x} + E_{56} \frac{\partial}{\partial y})$	0	$-\frac{ac^4 P_4^4}{h}$				
4	2	0	0	$(E_{56} \frac{\partial}{\partial x} + E_{55} \frac{\partial}{\partial y})$	$-3c^4$	$(E_{56} \frac{\partial}{\partial x} + E_{55} \frac{\partial}{\partial y})$	0	0	$(E_{56} \frac{\partial}{\partial x} + E_{55} \frac{\partial}{\partial y})$	0	$-\frac{ac^4 P_4^4}{h}$				
5	3	$-1/3\sqrt{33}c^4 (E_{13} \frac{\partial}{\partial x} + E_{34} \frac{\partial}{\partial y})$	$-1/3\sqrt{33}c^4 (E_{34} \frac{\partial}{\partial x} + E_{23} \frac{\partial}{\partial y})$	$-1/3\sqrt{33}E_{33}c^4$	0	0	$(E_{13} \frac{\partial}{\partial x} + E_{34} \frac{\partial}{\partial y})$	$(E_{34} \frac{\partial}{\partial x} + E_{23} \frac{\partial}{\partial y})$	0	0	0	0	$(E_{13} \frac{\partial}{\partial x} + E_{34} \frac{\partial}{\partial y})$	0	$-\frac{ac^5 P_5^5}{h}$

Tabelle 1: Scheibenproblem

Eine Zeile der Tabelle 1 entspricht der Gleichung (41) geteilt durch $a^2 h$

$$\forall i \in \{1, 2, 3\} \forall l \in \mathbb{N}_0 \text{ f.f.a. } (x, y) \in A :$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} E_{i\beta r \alpha} u_{r, \alpha}^k c^{k+l} \begin{cases} 1 & \text{für } k = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} - \frac{1}{6} \sqrt{(2k+1)(2l+1)} E_{i\beta r 3} u_r^k c^{k+l-2} \begin{cases} k^2 + k & \text{für } k+l \text{ gerade und } 0 \leq k \leq l \\ l^2 + l & \text{für } k+l \text{ gerade und } l < k \\ 0 & \text{für } k+l \text{ ungerade} \end{cases} \\ + \sqrt{\frac{(2k+1)(2l+1)}{3}} c^{k+l-1} \begin{cases} -E_{i\beta r \alpha} u_{r, \alpha}^k & \text{für } k+l \text{ ungerade und } 0 \leq k \leq l \\ E_{i\beta r 3} u_{r, \beta}^k & \text{für } k+l \text{ ungerade und } l < k \\ 0 & \text{für } k+l \text{ gerade} \end{cases} = -\frac{ac^l P_i^l}{h}$$

für das in den ersten beiden Spalten angegebene Indextupel (l, i) , wobei wir keine Summanden berücksichtigen, die den Faktor c^6 enthalten. In den Spalten u_1^0 bis u_3^5 ist jeweils für \bullet der entsprechende Verschiebungskoeffizient (also u_1^0 bis u_3^5) einzusetzen. Die Summe der Einträge der Spalten u_1^0 bis u_3^5 ist dann in jeder Zeile gleich dem Eintrag der Spalte RS (für rechte Seite) $+O(c^6)$.

l	i	u_3^0	u_1^1	u_2^1	u_3^2	u_3^3	u_3^4	u_3^5	u_2^5	RS
0	3	$E_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + E_{55} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2E_{56} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$	$E_{66} \frac{\partial}{\partial x} + E_{56} \frac{\partial}{\partial y}$	$E_{56} \frac{\partial}{\partial x} + E_{55} \frac{\partial}{\partial y}$	0	$\frac{1}{3\sqrt{3}} \sqrt{7} c^2 \left(E_{66} \frac{\partial}{\partial x} + E_{56} \frac{\partial}{\partial y} \right)$	0	$\frac{1}{3\sqrt{3}} \sqrt{11} c^4 \left(E_{66} \frac{\partial}{\partial x} + E_{56} \frac{\partial}{\partial y} \right)$	$\frac{1}{3\sqrt{3}} \sqrt{11} c^4 \left(E_{56} \frac{\partial}{\partial x} + E_{55} \frac{\partial}{\partial y} \right)$	$-\frac{aF_3^0}{h}$
1	1	$c^2 E_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c^2 E_{44} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2c^2 E_{14} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - E_{66}$	$c^2 E_{14} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c^2 E_{24} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c^2 (E_{12} + E_{44}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - E_{56}$	$c^2 E_{14} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c^2 E_{24} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2c^2 (E_{12} + E_{44}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - E_{56}$	$\sqrt{5} c^2 \left(E_{13} \frac{\partial}{\partial x} + E_{34} \frac{\partial}{\partial y} \right)$	$-\frac{1}{3\sqrt{3}} \sqrt{7} E_{66} c^2$	$3c^4 \left(E_{13} \frac{\partial}{\partial x} + E_{34} \frac{\partial}{\partial y} \right)$	$-\frac{1}{3\sqrt{3}} \sqrt{11} E_{66} c^4$	$-\frac{1}{3\sqrt{3}} \sqrt{11} E_{56} c^4$	$-\frac{acP_1^1}{h}$
1	2	$-E_{56} \frac{\partial}{\partial x} - E_{55} \frac{\partial}{\partial y}$	$c^2 E_{44} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c^2 E_{24} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2c^2 E_{14} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - E_{56}$	$c^2 E_{44} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c^2 E_{24} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2c^2 E_{14} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - E_{55}$	$\sqrt{5} c^2 \left(E_{34} \frac{\partial}{\partial x} + E_{23} \frac{\partial}{\partial y} \right)$	$-\frac{1}{3\sqrt{3}} \sqrt{7} E_{56} c^2$	$3c^4 \left(E_{34} \frac{\partial}{\partial x} + E_{23} \frac{\partial}{\partial y} \right)$	$-\frac{1}{3\sqrt{3}} \sqrt{11} E_{56} c^4$	$-\frac{1}{3\sqrt{3}} \sqrt{11} E_{55} c^4$	$-\frac{acP_2^1}{h}$
2	3	0	$-\sqrt{5} c^2 \left(E_{13} \frac{\partial}{\partial x} + E_{34} \frac{\partial}{\partial y} \right)$	$-\sqrt{5} c^2 \left(E_{34} \frac{\partial}{\partial x} + E_{23} \frac{\partial}{\partial y} \right)$	$c^4 E_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c^4 E_{55} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2c^4 E_{56} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - c^2 E_{56} c^2$	$\frac{1}{3\sqrt{5}} \sqrt{3} \sqrt{7} c^4 \left(E_{66} \frac{\partial}{\partial x} + E_{56} \frac{\partial}{\partial y} \right)$	$-3\sqrt{5} E_{33} c^4$	0	0	$-\frac{ac^2 P_3^2}{h}$
3	1	$-\frac{1}{3\sqrt{3}} \sqrt{7} c^2 \left(E_{66} \frac{\partial}{\partial x} + E_{56} \frac{\partial}{\partial y} \right)$	$-\frac{1}{3\sqrt{3}} \sqrt{7} E_{66} c^2$	$-\frac{1}{3\sqrt{3}} \sqrt{7} E_{56} c^2$	$-\frac{1}{3\sqrt{3}} \sqrt{5} \sqrt{7} c^4 \left(E_{66} \frac{\partial}{\partial x} + E_{56} \frac{\partial}{\partial y} \right)$	$-14 E_{66} c^4$	0	0	0	$-\frac{ac^3 P_3^3}{h}$
3	2	$-\frac{1}{3\sqrt{3}} \sqrt{7} c^2 \left(E_{56} \frac{\partial}{\partial x} + E_{55} \frac{\partial}{\partial y} \right)$	$-\frac{1}{3\sqrt{3}} \sqrt{7} E_{56} c^2$	$-\frac{1}{3\sqrt{3}} \sqrt{7} E_{55} c^2$	$-\frac{1}{3\sqrt{3}} \sqrt{7} \sqrt{5} c^4 \left(E_{56} \frac{\partial}{\partial x} + E_{55} \frac{\partial}{\partial y} \right)$	$-14 E_{56} c^4$	0	0	0	$-\frac{ac^3 P_3^3}{h}$
4	3	0	$-\frac{1}{3\sqrt{3}} \sqrt{7} c^4 \left(E_{13} \frac{\partial}{\partial x} + E_{34} \frac{\partial}{\partial y} \right)$	$-\frac{1}{3\sqrt{3}} \sqrt{7} c^4 \left(E_{34} \frac{\partial}{\partial x} + E_{23} \frac{\partial}{\partial y} \right)$	$-3\sqrt{5} E_{33} c^4$	0	0	0	0	$-\frac{ac^4 P_3^4}{h}$
5	1	$-\frac{1}{3\sqrt{3}} \sqrt{33} c^4 \left(E_{66} \frac{\partial}{\partial x} + E_{56} \frac{\partial}{\partial y} \right)$	$-\frac{1}{3\sqrt{3}} \sqrt{33} c^4 E_{66}$	$-\frac{1}{3\sqrt{3}} \sqrt{33} c^4 E_{56}$	0	0	0	0	0	$-\frac{ac^5 P_3^5}{h}$
5	2	$-\frac{1}{3\sqrt{3}} \sqrt{33} c^4 \left(E_{56} \frac{\partial}{\partial x} + E_{55} \frac{\partial}{\partial y} \right)$	$-\frac{1}{3\sqrt{3}} \sqrt{33} c^4 E_{56}$	$-\frac{1}{3\sqrt{3}} \sqrt{33} c^4 E_{55}$	0	0	0	0	0	$-\frac{ac^5 P_3^5}{h}$

Tabelle 2: Plattenproblem

Eine Zeile der Tabelle 2 entspricht ebenfalls der Gleichung (41) geteilt durch $a^2 h$ (siehe Erläuterungen unter Tabelle 1). Es sind jedoch die Gleichungen zu den Indextupeln (l, i) dargestellt, die zum Plattenproblem gehören (vgl. hierzu auch die Tabelle, welche die Kopplung für Monotropie darstellt S. 52).

1	i	u_3^0	u_1^1	u_2^1	u_3^2	u_3^3	u_3^4	u_3^5	u_2^5	RS
0	3	$E_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + E_{55} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2E_{56} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$	$E_{66} \frac{\partial}{\partial x} + E_{55} \frac{\partial}{\partial y}$	$E_{56} \frac{\partial}{\partial x} + E_{55} \frac{\partial}{\partial y}$	0	$\frac{1}{3} \sqrt{3} \sqrt{7} c^2 \left(E_{66} \frac{\partial}{\partial x} + E_{56} \frac{\partial}{\partial y} \right)$	0	$\frac{1}{3} \sqrt{3} \sqrt{11} c^4 \left(E_{66} \frac{\partial}{\partial x} + E_{56} \frac{\partial}{\partial y} \right)$	$\frac{1}{3} \sqrt{3} \sqrt{11} c^4 \left(E_{56} \frac{\partial}{\partial x} + E_{55} \frac{\partial}{\partial y} \right)$	$-\frac{a^2 \rho}{h}$
1	1	$c^2 E_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c^2 E_{44} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2c^2 E_{14} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - E_{66}$	$c^2 E_{14} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c^2 E_{24} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c^2 (E_{12} + E_{44}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - E_{56}$	$c^2 E_{14} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c^2 E_{24} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2c^2 (E_{12} + E_{44}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - E_{56}$	$\sqrt{5} c^2 \left(E_{13} \frac{\partial}{\partial x} + E_{34} \frac{\partial}{\partial y} \right)$	$-1/3 \sqrt{3} \sqrt{7} E_{66} c^2$	$-1/3 \sqrt{3} \sqrt{7} E_{66} c^2$	$-1/3 \sqrt{3} \sqrt{11} E_{66} c^4$	$-1/3 \sqrt{3} \sqrt{11} E_{56} c^4$	0
1	2	$c^2 E_{14} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c^2 E_{24} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c^2 (E_{12} + E_{44}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - E_{56}$	$c^2 E_{44} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c^2 E_{24} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2c^2 E_{24} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - E_{55}$	$c^2 E_{44} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c^2 E_{24} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2c^2 E_{24} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - E_{55}$	$\sqrt{5} c^2 \left(E_{34} \frac{\partial}{\partial x} + E_{23} \frac{\partial}{\partial y} \right)$	$-1/3 \sqrt{3} \sqrt{7} E_{56} c^2$	$-1/3 \sqrt{3} \sqrt{7} E_{56} c^2$	$-1/3 \sqrt{3} \sqrt{11} E_{56} c^4$	$-1/3 \sqrt{3} \sqrt{11} E_{55} c^4$	0
2	3	0	$- \sqrt{5} c^2 \left(E_{13} \frac{\partial}{\partial x} + E_{23} \frac{\partial}{\partial y} \right)$	$- \sqrt{5} c^2 \left(E_{34} \frac{\partial}{\partial x} + E_{23} \frac{\partial}{\partial y} \right)$	$c^4 E_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c^4 E_{55} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2c^4 E_{56} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - c^2 E_{56} \frac{\partial}{\partial y}$	$\frac{1}{3} \sqrt{5} \sqrt{3} \sqrt{7} c^4 \left(E_{66} \frac{\partial}{\partial x} + E_{56} \frac{\partial}{\partial y} \right)$	$-3\sqrt{5} E_{33} c^4$	0	0	$-\frac{a^2 \rho}{h}$
3	1	$-1/3 \sqrt{3} \sqrt{7} c^2 \left(E_{66} \frac{\partial}{\partial x} + E_{56} \frac{\partial}{\partial y} \right)$	$-1/3 \sqrt{3} \sqrt{7} E_{66} c^2$	$-1/3 \sqrt{3} \sqrt{7} E_{56} c^2$	$-1/3 \sqrt{5} \sqrt{3} \sqrt{7} c^4 \left(E_{66} \frac{\partial}{\partial x} + E_{56} \frac{\partial}{\partial y} \right)$	$-14 E_{66} c^4$	0	0	0	0
3	2	$-1/3 \sqrt{3} \sqrt{7} c^2 \left(E_{56} \frac{\partial}{\partial x} + E_{55} \frac{\partial}{\partial y} \right)$	$-1/3 \sqrt{3} \sqrt{7} E_{56} c^2$	$-1/3 \sqrt{3} \sqrt{7} E_{55} c^2$	$-1/3 \sqrt{3} \sqrt{7} \sqrt{5} c^4 \left(E_{56} \frac{\partial}{\partial x} + E_{55} \frac{\partial}{\partial y} \right)$	$-14 E_{56} c^4$	0	0	0	0
4	3	0	$-3c^4 \left(E_{13} \frac{\partial}{\partial x} + E_{34} \frac{\partial}{\partial y} \right)$	$-3c^4 \left(E_{34} \frac{\partial}{\partial x} + E_{23} \frac{\partial}{\partial y} \right)$	$-3\sqrt{5} E_{33} c^4$	0	0	0	0	0
5	1	$-1/3 \sqrt{33} c^4 \left(E_{66} \frac{\partial}{\partial x} + E_{56} \frac{\partial}{\partial y} \right)$	$-1/3 \sqrt{33} c^4 E_{66}$	$-1/3 \sqrt{33} c^4 E_{56}$	0	0	0	0	0	0
5	2	$-1/3 \sqrt{33} c^4 \left(E_{56} \frac{\partial}{\partial x} + E_{55} \frac{\partial}{\partial y} \right)$	$-1/3 \sqrt{33} c^4 E_{56}$	$-1/3 \sqrt{33} c^4 E_{55}$	0	0	0	0	0	0

Tabelle 3: Angepasstes Plattenproblem

Tabelle 3 ist eine modifizierte Version von Tabelle 2. (Man vergleiche hierzu die Erläuterungen auf S. 52.)

7 Das approximative 2D-Problem in w

7.1 Die Reduktion des approximativen 2D-Problems

Die klassische Kirchhoffsche Plattentheorie ist modelliert als eine Differentialgleichung vierter Ordnung in nur einer skalaren Variablen w ,

$$K\Delta\Delta w = a^3 P_3^0.$$

w ist dabei die verzerrungsfreie Absenkung eines Plattenquerschnittes in z -Richtung und entspricht daher unserem u_3^0 . Die Dreiecksstruktur des PDE-Systems der Tabelle 3 legt nahe, dass es möglich ist, durch sukzessives Einsetzen der Gleichungen ineinander auch unser System auf eine einzige Differentialgleichung in u_3^0 zu reduzieren. Genauer gesagt handelt es sich dabei um eine sogenannte Pseudoreduktion, da erst das System der einen Differentialgleichung in w mit allen Gleichungen, die bei der Reduktion entstehen, welche die Verschiebungskoeffizienten in $w = u_3^0$ ausdrücken, wieder äquivalent zum Ursprungssystem ist. Bei der Reduktion wollen wir die Approximationsgenauigkeit des Differentialgleichungssystems beibehalten ($+O(c^6)$), so dass eine Plattentheorie zweiter Ordnung in nur einer Variablen entsteht.

Natürlich werden wir, um die Reduktion durchführen zu können, höhere Regularitäten der Verschiebungskoeffizienten benötigen als $H^2(A)$. Generell nehmen wir in diesem Abschnitt an, dass alle Verschiebungskoeffizienten so regulär wie nötig, also $C^\infty(A)$ sind. Des weiteren nehmen wir an, dass beim Differenzieren einer Gleichung die Größenordnung einer Gleichung erhalten bleibt, dass also insbesondere gilt:

$$f = O(c^6) \xrightarrow{!} \frac{\partial f}{\partial x_i} = O(c^6). \quad (46)$$

Diese Annahme ist aus technischer Sicht notwendig, um überhaupt eine Reduktion der gewünschten Form durchführen zu können. Die Frage, ob sie gerechtfertigt ist, wird uns in Kapitel 8 noch zu einer Einschränkung der Annahme auf bestimmte Größen bewegen.

Zunächst betrachten wir das Gleichungssystem aus den Gleichungen (5,1) und (5,2). Dividieren wir durch den Vorfaktor $\sqrt{33}/3$, können wir das System als lineares Gleichungssystem für die Unbekannten $c^4 u_1^1 + c^4 \frac{\partial u_3^0}{\partial x}$ und $c^4 u_2^1 + c^4 \frac{\partial u_3^0}{\partial y}$ auffassen:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} E_{66} & E_{56} \\ E_{56} & E_{55} \end{bmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} c^4 u_1^1 + c^4 \frac{\partial u_3^0}{\partial x} \\ c^4 u_2^1 + c^4 \frac{\partial u_3^0}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(c^6) \\ O(c^6) \end{pmatrix}$$

Die Matrix \underline{E} aus (45) ist symmetrisch positiv definit, womit insbesondere $\det(\underline{E}) \neq 0$ gilt. Da sie die Struktur einer Blockdiagonalmatrix hat, womit ihre Determinante das Produkt der Determinanten der Blockmatrizen ist, gilt auch $\det(A) \neq 0$. Somit können wir das System durch Vormultiplikation mit der Matrix A^{-1} lösen und erhalten

$$c^4 u_1^1 = -c^4 \frac{\partial u_3^0}{\partial x} + O(c^6), \quad c^4 u_2^1 = -c^4 \frac{\partial u_3^0}{\partial y} + O(c^6). \quad (47)$$

Die Invertierbarkeit der Matrix A werden wir in diesem Abschnitt noch oft in analoger Weise benutzen, ohne jedes mal explizit die Gleichungen in Matrix-Vektor-Form anzugeben. Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass eine Division durch Potenzen von c an dieser Stelle natürlich nicht zweckdienlich ist, da der Fehlerterm in der Differentialgleichung letztendlich die Ordnung $O(c^6)$ haben soll. (47) können wir nicht durch c^2 teilen, da der Fehlerterm die Ordnung $O(c^4)$ hätte. Somit können wir (47) z.B. auch

nicht zum Einsetzen in (3,1) verwenden, da diese Gleichung $c^2 u_1^1$ und $c^2 u_2^1$ enthält. Somit behandeln wir die Produkte unterschiedlicher Potenzen von c mit derselben Variable formell wie unabhängige Variablen. Anders herum ist es aber natürlich zulässig, eine Gleichung mit c^2 zu multiplizieren, wenn man die dabei evtl. entstehenden Summanden der Ordnung $O(c^6)$ vernachlässigt. (47) könnten wir also theoretisch in $c^2(3,1)$ einsetzen, was uns jedoch keinen Nutzen bringt, da $c^2(3,1)$ offensichtlich äquivalent ist zu (5,1).

Einsetzen der Gleichungen (47) in (4,3) liefert

$$c^4 u_2^2 = \frac{1}{\sqrt{5}E_{33}} \left(E_{13}c^4 \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x^2} + 2 E_{34}c^4 \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x \partial y} + E_{23}c^4 \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial y^2} \right) + O(c^6). \quad (48)$$

Die Division durch E_{33} ist dabei zulässig, da E als symmetrisch positiv definite Matrix nur positive Diagonalelemente haben kann. Dies folgt unmittelbar aus der Definition der positiven Definitheit für die Einheitsvektoren: $\forall i \in \{1, 2, \dots, 6\} : e_i^t E e_i = E_{ii} > 0$. Durch Vormultiplikation von A^{-1} vor das Gleichungssystem aus (3,1) und (3,2) und Einsetzen von (48) erhalten wir

$$c^2 \frac{\partial u_3^0}{\partial x} + c^2 u_1^1 + 2 \sqrt{3} \sqrt{7} c^4 u_1^3 = - \frac{E_{13}c^4 \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x^3}}{E_{33}} - 2 \frac{E_{34}c^4 \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x^2 \partial y}}{E_{33}} - \frac{E_{23}c^4 \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x \partial y^2}}{E_{33}} + O(c^6), \quad (49)$$

$$c^2 \frac{\partial u_3^0}{\partial y} + c^2 u_2^1 + 2 \sqrt{3} \sqrt{7} c^4 u_2^3 = - \frac{E_{13}c^4 \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x^2 \partial y}}{E_{33}} - 2 \frac{E_{34}c^4 \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x \partial y^2}}{E_{33}} - \frac{E_{23}c^4 \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial y^3}}{E_{33}} + O(c^6). \quad (50)$$

Das System $c^2(1,1)$ und $c^2(1,2)$ lässt sich, bei Vernachlässigung der Größen der Ordnung $O(c^6)$, als lineares inhomogenes Gleichungssystem in den Variablen $-c^2 \frac{\partial u_3^0}{\partial x} - c^2 u_1^1 - 1/3 \sqrt{3} \sqrt{7} c^4 u_1^3$ und $-c^2 \frac{\partial u_3^0}{\partial y} - c^2 u_2^1 - 1/3 \sqrt{3} \sqrt{7} c^4 u_2^3$ auffassen. Multiplikation mit der Inversen A^{-1} ergibt nach Einsetzen von (47) und (48)

$$\begin{aligned} -c^2 \frac{\partial u_3^0}{\partial x} - c^2 u_1^1 - 1/3 \sqrt{3} \sqrt{7} c^4 u_1^3 &= c^4 \left(((E_{12} + 2 E_{44}) E_{33} - E_{13} E_{23} - 2 E_{34}^2) E_{55} - 3 E_{56} (-E_{23} E_{34} \right. \\ &+ E_{24} E_{33}) \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x \partial y^2} + ((3 E_{14} E_{33} - 3 E_{13} E_{34}) E_{55} - ((E_{12} + 2 E_{44}) E_{33} - E_{13} E_{23} - 2 E_{34}^2) E_{56}) \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x^2 \partial y} \\ &+ ((E_{11} E_{33} - E_{13}^2) E_{55} - E_{56} (E_{14} E_{33} - E_{13} E_{34})) \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x^3} + ((-E_{23} E_{34} + E_{24} E_{33}) E_{55} - E_{56} (-E_{23}^2 \\ &+ E_{22} E_{33})) \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial y^3} \Big) / ((-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) E_{33}) + O(c^6), \quad (51) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -c^2 \frac{\partial u_3^0}{\partial y} - c^2 u_2^1 - 1/3 \sqrt{3} \sqrt{7} c^4 u_2^3 &= -2 c^4 \left(((3/2 E_{24} E_{33} - 3/2 E_{23} E_{34}) E_{66} + ((-1/2 E_{12} - E_{44}) E_{33} \right. \\ &+ E_{34}^2 + 1/2 E_{13} E_{23}) E_{56}) \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x \partial y^2} + (((E_{44} + 1/2 E_{12}) E_{33} - 1/2 E_{13} E_{23} - E_{34}^2) E_{66} + 3/2 E_{56} \\ &(-E_{14} E_{33} + E_{34} E_{13})) \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x^2 \partial y} + ((1/2 E_{22} E_{33} - 1/2 E_{23}^2) E_{66} + 1/2 E_{56} (E_{23} E_{34} - E_{24} E_{33})) \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial y^3} \\ &- 1/2 \left(\frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x^3} \right) ((-E_{14} E_{33} + E_{34} E_{13}) E_{66} + E_{56} (E_{11} E_{33} - E_{13}^2)) \Big) / (E_{33} (E_{56}^2 - E_{55} E_{66})) + O(c^6). \quad (52) \end{aligned}$$

Mit (49) und (51) stehen nun zwei Gleichungen für $c^2 u_1^1$ und $c^4 u_1^3$ zur Verfügung. Ebenso liefern (50) und (52) zwei Gleichungen für $c^2 u_2^1$ und $c^4 u_2^3$. Auflösen der Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned}
 c^2 u_1^1 = & -6/5 \left(c^2 \left(-c^2 \left((2 E_{44} + E_{12}) E_{33} - 2 E_{34}^2 - E_{23} (E_{13} + 1/6 E_{66}) \right) E_{55} \right. \right. \\
 & - 3 \left(-1/18 E_{23} E_{56} + E_{24} E_{33} - E_{23} E_{34} \right) E_{56} \left. \right) \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x \partial y^2} \\
 & - 3 c^2 \left((E_{14} E_{33} - (1/9 E_{66} + E_{13}) E_{34}) E_{55} \right. \\
 & \left. - 1/3 E_{56} \left(-1/3 E_{34} E_{56} + (2 E_{44} + E_{12}) E_{33} - 2 E_{34}^2 - E_{23} E_{13} \right) \right) \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x^2 \partial y} \\
 & + c^2 \left((-E_{11} E_{33} + E_{13} (E_{13} + 1/6 E_{66})) E_{55} + (-1/6 E_{13} E_{56} + E_{14} E_{33} - E_{34} E_{13}) E_{56} \right) \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x^3} \\
 & - c^2 \left((E_{24} E_{33} - E_{23} E_{34}) E_{55} - E_{56} (-E_{23}^2 + E_{22} E_{33}) \right) \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial y^3} \\
 & \left. + 5/6 E_{33} \left(\frac{\partial u_3^0}{\partial x} \right) (E_{56}^2 - E_{55} E_{66}) \right) / (E_{33} (E_{56}^2 - E_{55} E_{66})) + O(c^6),
 \end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}
 c^2 u_2^1 = & 2/5 \left(c^2 \left(c^2 \left(-E_{56}^2 E_{34} + ((6 E_{44} + 3 E_{12}) E_{33} - 6 E_{34}^2 - 3 E_{23} E_{13}) E_{56} \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + E_{66} (-9 E_{24} E_{33} + E_{34} (9 E_{23} + E_{55})) \right) \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x \partial y^2} \right. \\
 & \left. + 1/2 c^2 \left(-E_{56}^2 E_{13} + (18 E_{14} E_{33} - 18 E_{34} E_{13}) E_{56} \right. \right. \\
 & \left. \left. + E_{66} ((-6 E_{12} - 12 E_{44}) E_{33} + 12 E_{34}^2 + E_{13} (6 E_{23} + E_{55})) \right) \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x^2 \partial y} \right. \\
 & \left. + 1/2 c^2 \left(-E_{56}^2 E_{23} + (-6 E_{23} E_{34} + 6 E_{24} E_{33}) E_{56} + E_{66} (-6 E_{22} E_{33} + E_{23} (6 E_{23} + E_{55})) \right) \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial y^3} \right. \\
 & \left. + 3 c^2 \left((-E_{13}^2 + E_{11} E_{33}) E_{56} - E_{66} (E_{14} E_{33} - E_{34} E_{13}) \right) \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x^3} \right. \\
 & \left. - 5/2 \left(\frac{\partial u_3^0}{\partial y} \right) E_{33} (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \right) / (E_{33} (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66})) + O(c^6),
 \end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned}
 c^4 u_1^3 = & \frac{3}{35} \left(\sqrt{3} \sqrt{7} c^4 \left(((2/3 E_{44} + 1/3 E_{12}) E_{33} - 2/3 E_{34}^2 - 1/3 E_{23} (E_{66} + E_{13})) E_{55} \right. \right. \\
 & \left. \left. - E_{56} (-1/3 E_{56} E_{23} + E_{24} E_{33} - E_{34} E_{23}) \right) \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x \partial y^2} \right. \\
 & \left. + ((E_{14} E_{33} - (2/3 E_{66} + E_{13}) E_{34}) E_{55} \right. \\
 & \left. - 1/3 E_{56} (-2 E_{56} E_{34} + (E_{12} + 2 E_{44}) E_{33} - E_{13} E_{23} - 2 E_{34}^2) \right) \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x^2 \partial y} \\
 & + ((1/3 E_{11} E_{33} - 1/3 E_{13} (E_{66} + E_{13})) E_{55} - 1/3 E_{56} (-E_{13} E_{56} - E_{13} E_{34} + E_{14} E_{33})) \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x^3} \\
 & \left. + 1/3 \left((-E_{34} E_{23} + E_{24} E_{33}) E_{55} \right. \right. \\
 & \left. \left. - E_{56} (-E_{23}^2 + E_{22} E_{33}) \right) \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial y^3} \right) / ((-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) E_{33}) + O(c^6),
 \end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned}
 c^4 u_2^3 = & 1/35 \left(\sqrt{3}\sqrt{7}c^4 \left((-3 E_{24}E_{33} + 3 (2/3 E_{55} + E_{23}) E_{34}) E_{66} \right. \right. \\
 & + E_{56} (-2 E_{56}E_{34} + (E_{12} + 2 E_{44}) E_{33} - E_{13}E_{23} - 2 E_{34}^2) \left. \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x \partial y^2} \right. \\
 & + \left((-E_{12} - 2 E_{44}) E_{33} + 2 E_{34}^2 + E_{13} (E_{23} + E_{55}) \right) E_{66} \\
 & - E_{56}^2 E_{13} + (-3 E_{13}E_{34} + 3 E_{14}E_{33}) E_{56} \left. \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x^2 \partial y} \right. \\
 & + \left((-E_{22}E_{33} + E_{23} (E_{23} + E_{55})) E_{66} + E_{56} (-E_{56}E_{23} + E_{24}E_{33} - E_{34}E_{23}) \right) \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial y^3} \\
 & \left. + \left((E_{13}E_{34} - E_{14}E_{33}) E_{66} + E_{56} (E_{11}E_{33} - E_{13}^2) \right) \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x^3} \right) / (E_{33} (E_{56}^2 - E_{55}E_{66})) + O(c^6).
 \end{aligned} \tag{56}$$

Nach Einsetzen von (48), (53), (54), (55) und (56) lässt sich nun Gleichung (2,3) zu

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{5}c^2 u_3^2 + 3 c^4 u_3^4 \\
 = & 1/25 \left(\left((-20 E_{44} - 10 E_{12}) E_{56}^2 + (-120 E_{44} - 60 E_{12}) E_{34} - 90 E_{13}E_{24} - 90 E_{23}E_{14} \right) E_{56} \right. \\
 & + (90 E_{14}E_{55} + 90 E_{24}E_{66}) E_{34} + 30 (2 E_{44} + E_{12}) (E_{55} (E_{13} + 1/3 E_{66}) + E_{23}E_{66}) E_{33} \\
 & + (40 E_{34}^2 + 20 E_{13}E_{23}) E_{56}^2 + 240 (1/2 E_{34}^2 + E_{13}E_{23}) E_{34}E_{56} \\
 & + ((-40 E_{66} - 150 E_{13}) E_{55} - 150 E_{23}E_{66}) E_{34}^2 \\
 & - 30 E_{23} (E_{55} (E_{13} + 2/3 E_{66}) + E_{23}E_{66}) E_{13} \left. c^4 \frac{\partial^4 u_3^0}{\partial x^2 \partial y^2} \right. \\
 & + ((-20 E_{56}^2 E_{14} + (-120 E_{34}E_{14} + (-60 E_{44} - 30 E_{12}) E_{13} - 30 E_{11}E_{23}) E_{56} \\
 & + (30 E_{55}E_{11} + 30 E_{66} (2 E_{44} + E_{12})) E_{34} + 90 E_{14} ((E_{13} + 2/9 E_{66}) E_{55} + 1/3 E_{23}E_{66})) E_{33} \\
 & + 40 E_{13}E_{34}E_{56}^2 + 60 (E_{13}E_{23} + 3 E_{34}^2) E_{13}E_{56} \\
 & - 120 (1/2 E_{34}^2 E_{66} + (E_{55} (E_{13} + 1/3 E_{66}) + 1/2 E_{23}E_{66}) E_{13}) E_{34} \left. c^4 \frac{\partial^4 u_3^0}{\partial x^3 \partial y} \right. \\
 & + ((-20 E_{24}E_{56}^2 + (-120 E_{24}E_{34} - 30 E_{22}E_{13} - 30 E_{23} (2 E_{44} + E_{12})) E_{56} \\
 & + ((60 E_{44} + 30 E_{12}) E_{55} + 30 E_{22}E_{66}) E_{34} + 30 E_{24} (E_{55} (E_{13} + 2/3 E_{66}) + 3 E_{23}E_{66})) E_{33} \\
 & + 40 E_{23}E_{34}E_{56}^2 + 60 E_{23} (E_{13}E_{23} + 3 E_{34}^2) E_{56} \\
 & - 60 (E_{34}^2 E_{55} + E_{23} (E_{55} (E_{13} + 2/3 E_{66}) + 2 E_{23}E_{66})) E_{34} \left. c^4 \frac{\partial^4 u_3^0}{\partial x \partial y^3} \right. \\
 & + ((-5 E_{56}^2 E_{11} + (-30 E_{11}E_{34} - 30 E_{14}E_{13}) E_{56} + 30 E_{34}E_{14}E_{66} + 30 E_{55} (E_{13} + 1/6 E_{66}) E_{11}) E_{33} \\
 & - 30 (-1/3 E_{13}E_{56}^2 - 2 E_{13}E_{56}E_{34} + E_{34}^2 E_{66} + E_{55} (E_{13} + 1/3 E_{66}) E_{13}) E_{13} \left. c^4 \frac{\partial^4 u_3^0}{\partial x^4} \right. \\
 & + ((-5 E_{56}^2 E_{22} + (-30 E_{34}E_{22} - 30 E_{23}E_{24}) E_{56} + 30 E_{34}E_{24}E_{55} + 5 E_{66}E_{22} (6 E_{23} + E_{55})) E_{33} \\
 & - 10 E_{23} (-E_{23}E_{56}^2 - 6 E_{23}E_{56}E_{34} + 3 E_{34}^2 E_{55} + E_{66}E_{23} (3 E_{23} + E_{55})) \left. c^4 \frac{\partial^4 u_3^0}{\partial y^4} \right. \\
 & + 5 \sqrt{5} E_{33} \left(\sqrt{5} E_{13} c^2 \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x^2} + 2 \sqrt{5} E_{34} c^2 \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x \partial y} + \sqrt{5} E_{23} c^2 \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial y^2} + \frac{c^2 a P_3^2}{h} \right) (E_{55} E_{66} \\
 & - E_{56}^2) \left. \right) / (E_{33}^2 (E_{55} E_{66} - E_{56}^2)) + O(c^6)
 \end{aligned} \tag{57}$$

umschreiben. Die Gleichungen (1,1) und (1,2) lassen sich als inhomogenes Differentialgleichungssystem für die Variablen $\frac{\partial u_3^0}{\partial x} + u_1^1 + 1/3 \sqrt{3}\sqrt{7}c^2u_1^3 + 1/3 \sqrt{3}\sqrt{11}c^4u_1^5$ und $\frac{\partial u_3^0}{\partial y} + u_2^1 + 1/3 \sqrt{3}\sqrt{7}c^2u_2^3 + 1/3 \sqrt{3}\sqrt{11}c^4u_2^5$ auffassen. Durch Vormultiplikation von A^{-1} und Einsetzen von (57), (53) und (54) (entsprechend differenziert) erhalten wir Gleichungen der Form

$$\frac{\partial u_3^0}{\partial x} + u_1^1 + 1/3 \sqrt{3}\sqrt{7}c^2u_1^3 + 1/3 \sqrt{3}\sqrt{11}c^4u_1^5 = D^5 (c^4u_3^0) + D^3 (c^2u_3^0) + D^1 \left(c^2 \frac{aP_3^2}{h} \right) + O(c^6), \quad (58)$$

$$\frac{\partial u_3^0}{\partial y} + u_2^1 + 1/3 \sqrt{3}\sqrt{7}c^2u_2^3 + 1/3 \sqrt{3}\sqrt{11}c^4u_2^5 = D^5 (c^4u_3^0) + D^3 (c^2u_3^0) + D^1 \left(c^2 \frac{aP_3^2}{h} \right) + O(c^6), \quad (59)$$

wobei D^n jeweils einen (in (58) und (59) unterschiedlichen) linearen Differentialoperator der genauen Ordnung n bezeichne, dessen Koeffizienten nur von Konstanten ($\in \mathbb{R}$) sowie den Einträgen von \underline{E} abhängen. Das Aufführen der Gleichungen halten wir an dieser Stelle nicht mehr für sinnvoll, da sie sehr komplex und somit ohnehin kaum von Hand nachvollziehbar sind und kein wichtiges Endergebnis darstellen. Bei Bedarf kann man die Gleichungen der angehängten Mapledatei entnehmen (siehe A(3), Gleichungen `su_g1_11` und `su_g1_12`).

Einsetzen der (entsprechend differenzierten) Formeln (58) und (59) in (0.3) ergibt schließlich eine Differentialgleichung sechster Ordnung in $w := w_0^3$ und den als bekannt vorausgesetzten Belastungsgrößen P_0^3 und P_2^3 :

$$\begin{aligned}
& c^4 \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} \left((-12 E_{14} E_{11} E_{56} + 6 E_{11}^2 E_{55} + 6 E_{14}^2 E_{66}) E_{33}^2 - 2 \left((6 E_{66} E_{14} - 6 E_{11} E_{56}) E_{34} - E_{11} E_{56}^2 - 6 E_{56} E_{13} E_{14} + E_{11} E_{55} (6 E_{13} + E_{66}) \right) E_{13} E_{33} + 2 \left(3 E_{34}^2 E_{66} - 6 E_{13} E_{34} E_{56} + (-E_{36}^2 + E_{55} (3 E_{13} + E_{66})) E_{13} \right) E_{13} \right) E_{13} \\
& + c^4 \frac{\partial^6 w}{\partial x^3 \partial y^3} \left((-24 E_{44} E_{11} - 12 E_{12} E_{11} - 36 E_{14}^2) E_{56} + 12 E_{14} (3 E_{11} E_{55} + E_{66} (2 E_{44} + E_{12})) E_{33}^2 + ((24 E_{11} E_{56} - 24 E_{66} E_{14}) E_{34}^2 + (4 E_{11} E_{56}^2 + 72 E_{56} E_{13} E_{14} + (-36 E_{11} E_{55} - 12 E_{66} (2 E_{44} + E_{12})) E_{13} - 4 E_{11} E_{55} E_{56}) E_{34} \right. \\
& \quad \left. - 8 (-E_{56}^2 E_{14} + (-3/2 E_{11} E_{23} - 3/2 E_{13} (2 E_{44} + E_{12})) E_{56} + E_{14} (3/2 E_{23} E_{66} + (E_{66} + 9/2 E_{13}) E_{55})) E_{13} \right) E_{33} + 12 \left(2 E_{34}^3 E_{66} - 5 E_{13} E_{56} E_{34}^2 + (-E_{56}^2 + E_{23} E_{66} + E_{55} (3 E_{13} + E_{66})) E_{13} E_{34} - E_{13}^2 E_{23} E_{56} \right) E_{13} \\
& + c^4 \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2} \left(((-36 E_{24} E_{11} - 48 E_{14} (2 E_{44} + E_{12})) E_{56} + (54 E_{14}^2 + 24 E_{14} E_{11} + 12 E_{12} E_{11}) E_{55} + 36 E_{66} (E_{24} E_{14} + 1/6 (2 E_{44} + E_{12})^2)) E_{33}^2 + ((96 E_{56} E_{14} - 24 E_{11} E_{55} - 24 E_{66} (2 E_{44} + E_{12})) E_{34}^2 + (16 E_{56}^2 E_{14} + (36 E_{11} E_{23} \right. \\
& \quad \left. + 48 E_{13} (2 E_{44} + E_{12})) E_{56} - 36 E_{23} E_{66} E_{14} + (-36 E_{24} E_{66} - 108 E_{14} E_{55}) E_{13} - 16 E_{14} E_{55} E_{66}) E_{34} + (2 E_{11} E_{23} + 4 E_{13} (2 E_{44} + E_{12})) E_{56}^2 + (48 E_{14} E_{23} E_{13} + 36 E_{13}^2 E_{24}) E_{56} + ((-12 E_{11} E_{55} - 12 E_{66} (2 E_{44} + E_{12})) \right. \\
& \quad \left. E_{13} - 2 E_{11} E_{55} E_{66}) E_{23} - 4 E_{55} E_{13} (2 E_{44} + E_{12}) (3 E_{13} + E_{66})) E_{33} + 24 E_{34}^4 E_{66} - 96 E_{13} E_{34}^3 E_{36} + 24 \left(-E_{56}^2 + 5/2 E_{23} E_{66} + \left(\frac{13}{4} E_{13} + E_{66} \right) E_{55} \right) E_{13} E_{34}^2 - 84 E_{13}^2 E_{34} E_{23} E_{56} + 6 E_{23} (-E_{36}^2 + E_{23} E_{66} + \\
& \quad E_{55} (2 E_{13} + E_{66})) E_{13} \right) \\
& + c^4 \frac{\partial^6 w}{\partial x^3 \partial y^3} \left((-48 E_{12} E_{44} - 12 E_{22} E_{11} - 120 E_{24} E_{14} - 48 E_{44}^2 - 12 E_{12}^2) E_{56} + (12 E_{24} E_{11} + 36 E_{14} (2 E_{44} + E_{12})) E_{55} + 12 E_{66} ((3 E_{12} + 6 E_{44}) E_{24} + E_{22} E_{14}) E_{33}^2 + ((48 E_{12} + 96 E_{44}) E_{56} - 72 E_{24} E_{66} - 72 E_{14} E_{55}) E_{34}^2 \right. \\
& \quad \left. + (8 E_{12} + 16 E_{44}) E_{56}^2 + (120 E_{14} E_{23} + 120 E_{24} E_{13}) E_{56} + (-12 E_{11} E_{55} - 36 E_{66} (2 E_{44} + E_{12})) E_{23} + ((-36 E_{12} - 72 E_{44}) E_{55} - 12 E_{66} E_{22}) E_{13} - 8 E_{66} E_{55} (2 E_{44} + E_{12}) E_{34} + (8 E_{14} E_{23} + 8 E_{24} E_{13}) E_{56}^2 \right. \\
& \quad \left. + (12 E_{11} E_{23}^2 + 24 E_{13} (2 E_{44} + E_{12}) E_{23} + 12 E_{13}^2 E_{22}) E_{56} - 12 E_{14} E_{66} E_{23}^2 + ((-36 E_{24} E_{66} - 36 E_{14} E_{55}) E_{13} - 8 E_{14} E_{55} E_{66}) E_{23} - 8 E_{24} (3/2 E_{13} + E_{66}) E_{55} E_{13} \right) E_{33} - 48 E_{34}^4 E_{56} + (-16 E_{56}^2 + 72 E_{23} E_{66} \\
& \quad + 16 (E_{66} + 9/2 E_{13}) E_{55}) E_{34}^3 - 168 E_{34}^2 E_{13} E_{23} E_{56} + 24 E_{23} (-E_{56}^2 + 2 E_{23} E_{66} + E_{55} (2 E_{13} + E_{66})) E_{13} E_{34} - 24 E_{13}^2 E_{23}^2 E_{56} \\
& + c^4 \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial y^4} \left(((-96 E_{44} - 48 E_{12}) E_{24} - 36 E_{22} E_{14}) E_{56} + (36 E_{24} E_{14} + 6 (2 E_{44} + E_{12})^2) E_{55} + 12 E_{66} (9/2 E_{24} + E_{12}) E_{33}^2 + ((96 E_{24} E_{56} + (-24 E_{12} - 48 E_{44}) E_{55} - 24 E_{66} E_{22}) E_{34}^2 + (16 E_{36}^2 E_{24} \right. \\
& \quad \left. + ((48 E_{12} + 96 E_{44}) E_{23} + 36 E_{13} E_{22}) E_{56} + (-36 E_{14} E_{55} - 108 E_{24} E_{66}) E_{23} - 16 E_{24} (9/4 E_{13} + E_{66}) E_{55}) E_{34} + ((8 E_{44} + 4 E_{12}) E_{23} + 2 E_{13} E_{22}) E_{56}^2 + (48 E_{24} E_{23} E_{13} + 36 E_{14} E_{23}^2) E_{56} - 12 E_{66} (2 E_{44} + E_{12}) E_{23}^2 \right. \\
& \quad \left. + (((-12 E_{12} - 24 E_{44}) E_{55} - 12 E_{66} E_{22}) E_{13} - 4 E_{66} E_{55} (2 E_{44} + E_{12})) E_{23} - 2 E_{22} E_{55} E_{66} E_{13}) E_{33} + 24 E_{34}^4 E_{55} - 96 E_{34}^3 E_{23} E_{56} + 24 \left(-E_{56}^2 + \frac{13}{4} E_{23} E_{66} + (E_{66} + 5/2 E_{13}) E_{55} \right) E_{23} E_{34}^2 - 84 E_{34} E_{13} E_{23}^2 E_{56} + \\
& \quad 6 (-E_{56}^2 + 2 E_{23} E_{66} + E_{55} (E_{13} + E_{66})) E_{23}^2 E_{13} \right) \\
& + c^4 \frac{\partial^6 w}{\partial x \partial y^5} \left(((-36 E_{24}^2 - 12 E_{22} (2 E_{44} + E_{12})) E_{66} + 36 E_{24} ((1/3 E_{12} + 2/3 E_{44}) E_{55} + E_{66} E_{22})) E_{33}^2 + ((24 E_{56} E_{22} - 24 E_{24} E_{55}) E_{34}^2 + (4 E_{22} E_{56}^2 + 72 E_{56} E_{23} E_{24} + ((-12 E_{12} - 24 E_{44}) E_{55} - 36 E_{66} E_{22}) E_{23} - 4 E_{22} E_{55} E_{66}) \right. \\
& \quad \left. E_{34} + 12 (2/3 E_{56}^2 E_{24} + ((2 E_{44} + E_{12}) E_{23} + E_{13} E_{22}) E_{56} - 2/3 (9/2 E_{23} E_{66} + (3/2 E_{13} + E_{66}) E_{55}) E_{24}) E_{23} \right) E_{33} + 12 (2 E_{55} E_{34}^3 - 5 E_{23} E_{36} E_{34}^2 + (-E_{36}^2 + 3 E_{23} E_{66} + E_{55} (E_{13} + E_{66})) E_{23} E_{34} - E_{13} E_{23}^2 E_{56}) E_{23} \\
& + c^4 \frac{\partial^6 w}{\partial y^6} \left((E_{24}^2 E_{55} + E_{22}^2 E_{66} - 2 E_{24} E_{22} E_{56}) E_{33}^2 - 1/3 E_{23} ((-6 E_{36} E_{22} + 6 E_{24} E_{55}) E_{34} - E_{22} E_{56}^2 - 6 E_{56} E_{23} E_{24} + E_{66} E_{22} (6 E_{23} + E_{55})) E_{33} + 1/3 E_{23}^2 (3 E_{34}^2 E_{55} - 6 E_{56} E_{23} E_{34} + (-E_{56}^2 + E_{66} (3 E_{23} + E_{55})) E_{23}) \right. \\
& \quad \left. + E_{33} (E_{55} E_{66} - E_{36}^2) \left[(5 E_{11} E_{33} - 5 E_{13}^2) c^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (-20 E_{13} E_{34} + 20 E_{14} E_{33}) c^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + ((20 E_{44} + 10 E_{12}) E_{33} - 20 E_{34}^2 - 10 E_{23} E_{13}) c^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + (-20 E_{23} E_{34} + 20 E_{24} E_{33}) c^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + (-5 E_{23}^2 + 5 E_{22} E_{33}) c^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] \right. \\
& \quad \left. = -\frac{a P_0^3}{h} 5 E_{33}^2 (E_{56}^2 - E_{55} E_{66}) - E_{33} (E_{56}^2 - E_{55} E_{66}) \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{a c^2 P_2^3}{h} \sqrt{5} E_{13} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{a c^2 P_2^3}{h} \sqrt{5} E_{34} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{a c^2 P_2^3}{h} \sqrt{5} E_{23} \right] + O(c^6) \right)
\end{aligned}$$

Unser ursprüngliches Differentialgleichungssystem lag in Tensor-Schreibweise vor, daher liegt die Vermutung nahe, dass sich auch die Differentialgleichung in w wiederum in tensorieller Form angeben lässt, welche stets den Vorteil hat, dass Koordinatentransformationen einfach durchzuführen sind. Dazu gehen wir wieder von Matrix (45) zu Matrix (15) über. In der Mapledatei A(4) liefern wir den Nachweis, dass die Differentialgleichung die Darstellung

$$\begin{aligned} & 5c^2 E_{3333} (E_{2323} E_{1313} - E_{2313}^2) (E_{\alpha\beta\gamma\delta} E_{3333} - E_{\alpha\beta 33} E_{\gamma\delta 33}) \left(w - \frac{2}{5} c^2 \frac{E_{\eta\iota 33}}{E_{3333}} w_{,\eta\iota} \right)_{,\alpha\beta\gamma\delta} \\ & + 6c^4 \varepsilon_{3\alpha\beta} \varepsilon_{3\gamma\delta} E_{\alpha 3\gamma 3} (E_{\beta\eta\iota\kappa} E_{3333} - E_{\beta\eta 33} E_{\iota\kappa 33}) (E_{\delta\mu\nu\vartheta} E_{3333} - E_{\delta\mu 33} E_{\nu\vartheta 33}) w_{,\eta\iota\kappa\mu\nu\vartheta} \\ & = 5E_{3333} (E_{2323} E_{1313} - E_{2313}^2) \frac{a}{h} \left(E_{3333} P_3^0 + \frac{1}{\sqrt{5}} c^2 E_{\alpha\beta 33} P_{3,\alpha\beta}^2 \right) + O(c^6) \end{aligned} \quad (60)$$

hat. Dabei ist ε_{ijk} der Levi-Cevita-Tensor, welcher für gerade Permutationen von $(1, 2, 3)$ 1 ist, für ungerade Permutationen -1 und 0 , falls mindestens zwei Indizes gleich sind. Also konkret

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für } (i, j, k) \in \{(1, 2, 3), (3, 1, 2), (2, 3, 1)\} \\ -1 & \text{für } (i, j, k) \in \{(1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3)\} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Multiplikation der obigen Gleichung mit c^2 ergibt

$$c^4 (E_{\alpha\beta\gamma\delta} E_{3333} - E_{\alpha\beta 33} E_{\gamma\delta 33}) w_{,\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{a}{h} E_{3333} c^2 P_3^0 + O(c^6). \quad (61)$$

Durch entsprechende Differentiation dieser Gleichung lässt sich einer der Summanden sechster Ordnung in w zu einem Summanden zweiter Ordnung in P_3^0 umschreiben.

$$\begin{aligned} & 5c^2 E_{3333} (E_{2323} E_{1313} - E_{2313}^2) (E_{\alpha\beta\gamma\delta} E_{3333} - E_{\alpha\beta 33} E_{\gamma\delta 33}) w_{,\alpha\beta\gamma\delta} \\ & + 6c^4 \varepsilon_{3\alpha\beta} \varepsilon_{3\gamma\delta} E_{\alpha 3\gamma 3} (E_{\beta\eta\iota\kappa} E_{3333} - E_{\beta\eta 33} E_{\iota\kappa 33}) (E_{\delta\mu\nu\vartheta} E_{3333} - E_{\delta\mu 33} E_{\nu\vartheta 33}) w_{,\eta\iota\kappa\mu\nu\vartheta} \\ & = 5E_{3333} (E_{2323} E_{1313} - E_{2313}^2) \frac{a}{h} \left(E_{3333} P_3^0 + c^2 E_{\alpha\beta 33} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} P_3^2 + \frac{2}{5} P_3^0 \right)_{,\alpha\beta} \right) + O(c^6). \end{aligned} \quad (62)$$

Man beachte, dass es sich bei dieser Umformung um eine Äquivalenzumformung handelte, da aus $c^2(62)$ ebenfalls wieder (61) folgt (vgl. hierzu auch A(7)).

Auch die Randbedingungen können wir in w formulieren. Die Verschiebungsrandbedingungen des Plattenproblems (38) der Ordnung zwei sind:

$$\begin{aligned} u_3^0 &= \frac{1}{h} \int_{-h/2a}^{h/2a} u_{03} \widehat{P}^0 dz, \\ c^2 u_\alpha^1 &= \frac{1}{h} \int_{-h/2a}^{h/2a} u_{0\alpha} \widehat{P}^1 dz, \\ c^4 u_3^2 &= \frac{1}{h} \int_{-h/2a}^{h/2a} u_{03} \widehat{P}^2 dz. \end{aligned}$$

Alle weiteren Verschiebungsrandbedingungen beziehen sich auf Größen der Ordnung c^6 oder gehören zum Scheibenproblem. Die Größen $w = u_3^0$, $c^2 u_\alpha^1$, $c^2 u_2^1$ und $c^4 u_3^2$ haben wir bereits während der Reduktion in w ausgedrückt. Somit kennen wir die Verschiebungsrandbedingungen in w ausgedrückt schon und verzichten aus Platzgründen auf eine erneute Angabe.

Wegen (43) gilt

$$\forall l \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } l \geq 3 : m_{ij}^l = O(c^6) \text{ f.a. } i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Das Plattenproblem in Schnittgrößen (36) lautet damit:

$$\begin{aligned} (0, 3) : & -m_{3\alpha, \alpha}^0 = aP_3^0 + O(c^6), \\ (1, \beta) : & -\frac{1}{a}m_{\beta\alpha, \alpha}^1 + m_{3\beta}^0 = 0 + O(c^6), \\ (2, 3) : & -\frac{1}{a^2}m_{3\alpha, \alpha}^2 + \sqrt{5}\frac{1}{a}m_{33}^1 = ac^2P_3^2 + O(c^6), \\ (3, \beta) : & \sqrt{5}\frac{1}{a^2}m_{3\beta}^2 + c^2m_{3\beta}^0 = 0 + O(c^6), \\ (4, 3) : & c^2m_{33}^1 = 0 + O(c^6), \\ (5, \beta) : & \sqrt{5}\frac{1}{a^2}c^2m_{3\beta}^2 + c^4m_{3\beta}^0 = 0 + O(c^6), \end{aligned}$$

wobei vor jeder Gleichung das zugehörige (l, i) Indextupel angegeben wurde. Somit wissen wir, welche Schnittgrößen zum Plattenproblem gehören. Wegen

$$-\frac{1}{a^2}m_{3\alpha, \alpha}^2 + O(c^6) \stackrel{(3, \beta)}{=} \frac{1}{\sqrt{5}}c^2m_{3\alpha, \alpha}^0 + O(c^6) \stackrel{(0, 3)}{=} -\frac{1}{\sqrt{5}}c^2aP_3^0 + O(c^6)$$

folgt aus (2,3) sofort

$$\frac{1}{a}m_{33}^1 = ac^2 \left[\frac{1}{\sqrt{5}}P_3^2 + \frac{1}{5}P_3^0 \right] + O(c^6).$$

Die übrigen Schnittgrößen lassen sich zunächst mit (43) für eingesetzte Monotropie in den Verschiebungskoeffizienten ausdrücken. Konkret ist die Darstellung der übrigen Schnittgrößen des Plattenproblems, die nicht von der Ordnung $O(c^6)$ sind:

$$\begin{aligned} m_{3\alpha}^0 &= hE_{\alpha 3\beta 3} \left(u_{3, \beta}^0 + u_{\beta}^1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{7}c^2u_{\beta}^3 + \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{11}c^4u_{\beta}^5 \right) + O(c^6), \\ m_{3\alpha}^2 &= ha^2c^4E_{\alpha 3\beta 3} \left(u_{3, \beta}^2 + \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{5}\sqrt{7}u_{\beta}^3 \right) + O(c^6), \\ m_{ij}^1 &= hac^2 \left(E_{ij\alpha\beta}u_{\alpha, \beta}^1 + E_{ij33} \left[\sqrt{5}u_3^2 + 3c^2u_3^4 \right] \right) + O(c^6) \text{ für } (i, j) \in \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}. \end{aligned}$$

Achtung: Die Darstellung von m_{ij}^1 gilt tatsächlich auch nur für die angegebenen Indizes. Für Aelotropie gilt ja nach (43)

$$m_{ij}^1 = hac^2 \left(E_{ijr\beta}u_{r, \beta}^1 + E_{ijr3} \left[\sqrt{5}u_r^2 + 3c^2u_r^4 \right] \right) + O(c^6),$$

daraus folgt nur die oben angegebene Formel für Monotropie, falls (i, j) ein Indextupel mit einer geraden Anzahl an Indizes gleich drei ist, also nur für die oben angegebenen Indextupel. Für genau diese Indextupel gehört m_{ij}^1 auch zum Plattenproblem. $m_{23}^1 = m_{32}^1$ und $m_{31}^1 = m_{13}^1$ sind Scheibengrößen.

Ein Abgleich der obigen Darstellung der Schnittgrößen mit den Gleichungen aus dem Reduktionsprozess des Differentialgleichungssystems offenbart, dass wir bereits alle Gleichungen zur Verfügung gestellt haben, welche benötigt werden, um die Schnittgrößen in w auszudrücken. Konkret kann $m_{3\alpha}^0$ mittels Einsetzen von (58) und (59); $m_{3\alpha}^2$ mittels Differentiation und Einsetzen von (48) und Einsetzen von (55) und (56) und die Plattengrößen m_{ij}^1 mittels Differentiation und Einsetzen von (53) und

(54) und Einsetzen von (57) in w ausgedrückt werden. Wiederum verzichten wir aufgrund der Komplexität der Ausdrücke auf eine exakte Angabe der Gleichungen und verweisen auf die Mapledatei A(5). Die entstehenden Gleichungen haben die Form

$$\begin{aligned} m_{3\alpha}^0 &= c^2 D^3(w) + c^4 D^5(w) + c^2 D^1(P_3^2) + O(c^6), \\ m_{\beta\alpha}^1 &= c^2 D^2(w) + c^4 D^4(w) + c^2 D^0(P_3^2) + O(c^6), \\ m_{33}^1 &= -\frac{1}{5} a^2 (\sqrt{5} c^2 P_3^2 + c^2 P_3^0) + O(c^6), \\ m_{3\alpha}^2 &= c^4 D^3(w) + O(c^6), \end{aligned}$$

wobei D^n jeweils wieder einen (bei jedem Vorkommen unterschiedlichen) linearen Differentialoperator der genauen Ordnung n bezeichne. Mit diesen Gleichungen lassen sich schließlich die Krafrandbedingungen des Plattenproblems (32) zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} m_{3\alpha}^0 n_\alpha &= a \int_{-h/2a}^{h/2a} g_3 \widehat{P}^0 dz \\ \frac{1}{a} m_{\beta\alpha}^1 n_\alpha &= a \int_{-h/2a}^{h/2a} g_\beta \widehat{P}^1 dz \\ \frac{1}{a^2} m_{3\alpha}^2 n_\alpha &= a \int_{-h/2a}^{h/2a} g_3 \widehat{P}^2 dz \end{aligned}$$

in w schreiben.

Setzen wir die Verschiebungskoeffizienten dargestellt in w wieder in das Differentialgleichungssystem der Tabelle 3 ein, so sind alle Gleichungen identisch erfüllt oder führen auf Gleichungen, die (62) impliziert. Dasselbe gilt, wenn wir die Schnittgrößen in w wieder in das Plattenproblem in den Schnittgrößen einsetzen. (Die Nachweise erbringen wir in der Mapledatei A(6).) Somit haben wir eine Modellierung des Plattenproblems zweiter Ordnung in nur einer PDE in der skalaren Größe w gefunden. Im weiteren werden wir jedoch sehen, dass diese Modellierung unphysikalisch ist.

7.2 Die Ordnung der PDE in w

Für Monotropie ist (62) eine PDE sechster Ordnung. Man sieht schon an der Struktur des verbleibenden Terms sechster Ordnung, dass dieser sich nicht mittels (61) in den Lastresultanten P_3^l schreiben lässt. Für ein einfacheres Materialverhalten kann dies aber durchaus anders sein. (62) ist eine PDE der Form

$$c^2 D^4 w + c^4 D^6 w = \frac{a}{h} (k_0 P_3^0 + c^2 D^2 P_3^2 + c^2 D^2 P_3^0) + O(c^6),$$

und (61) ist von der Form

$$k_1 c^4 D^4 w = \frac{a}{h} c^2 k_2 P_3^0 + O(c^6),$$

wobei k_0 bis k_2 Konstanten sind und D^4 in beiden Gleichungen identisch ist. $c^4 D^6 w$ kann also dann in Ableitungen von P_3^l geschrieben werden, wenn ein linearer Differentialoperator zweiter Ordnung D^2 existiert, für den $D^2 D^4 = D^6$ gilt. Dann gilt $c^4 D^6 w = D^2 c^4 D^4 w = \frac{a}{h} \frac{k_2}{k_1} c^2 D^2 P_3^0 + O(c^6)$. D^2

existiert genau dann, wenn das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} a_4 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_6 \\ b_5 \\ b_4 \\ b_3 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

eine Lösung hat, wobei

$$D^4 = \sum_{i=0}^4 a_i \frac{\partial^4}{\partial x^i \partial y^{4-i}}, \quad D^6 = \sum_{i=0}^6 b_i \frac{\partial^6}{\partial x^i \partial y^{6-i}}, \quad D^2 = \sum_{i=0}^2 c_i \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial y^{2-i}}$$

gelten soll. Falls $a_4 \neq 0$ gilt, so hat die obere 3×3 -Abschnittsmatrix vollen Rang, und der Vektor der c -Konstanten, welcher das obere Teilsystem löst, kann eindeutig mittels Vorwärtseinsetzen bestimmt werden. In diesem Fall existiert genau dann eine Lösung des Gesamtsystems, wenn dieser Vektor auch die übrigen vier Gleichungen löst. In der Mapledatei A(8) zeigen wir, dass dieses System für Isotropie und transversal Isotropie eine Lösung hat. In diesem Fall ist $D^2 = k\Delta$ für eine Konstante k . Somit kann (62) dann als PDE vierter Ordnung in w geschrieben werden.

7.3 Vergleich mit anderen isotropen Plattentheorien

Für den Spezialfall isotropen Materials sollte unsere Plattentheorie mit den existenten Plattentheorien übereinstimmen. Wenn wir Isotropie (in E und ν) in (62) einsetzen und alle Terme der Ordnung c^4 vernachlässigen, erhalten wir

$$\frac{Ec^2}{-1 + \nu^2} \Delta \Delta w = -\frac{a}{h} P_3^0 + O(c^6)$$

(vgl. A(8)). Um zu einer kompakteren Darstellung in Tabelle 3 zu gelangen, hatten wir alle Gleichungen durch $a^2 h$ geteilt. Wenn wir dies nun rückgängig machen und zudem die obige Gleichung mit -1 multiplizieren, also insgesamt die obige Gleichung mit $-a^2 h$ multiplizieren, erhalten wir

$$\frac{Eha^2 c^2}{1 - \nu^2} \Delta \Delta w = a^3 P_3^0 + O(c^6).$$

Mit der Definition von c gilt

$$K := \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} = \frac{Eha^2 c^2}{1 - \nu^2},$$

wobei K die Plattenkonstante aus der klassischen Plattentheorie von Kirchhoff ist. Die hier auftretende 12 erklärt nun auch die etwas unintuitive Definition von c . Als Theorie erster Ordnung stimmt unsere Differentialgleichung also mit der der klassischen Kirchhoff-Theorie überein.

Als Vergleichstheorie zweiter Ordnung wählen wir die Plattentheorie von R. Kienzler. Diese wird durch die zwei Differentialgleichungen

$$K \Delta \Delta \tilde{w} = a^3 \left[\tilde{P}_3^0 + \frac{c^2}{10(1 - \nu)} \left(5\nu \Delta \tilde{P}_3^2 - 6(4 + \nu) \Delta \tilde{P}_3^0 \right) \right] + O(c^6) \quad (63)$$

$$c^2 \left(\tilde{\psi} - \frac{3}{2} c^2 \Delta \tilde{\psi} \right) = 0 + O(c^6) \quad (64)$$

beschrieben. Für den Spezialfall der Isotropie wird (62) zu

$$K\Delta\Delta w = a^3 \left(P_3^0 + \frac{c^2}{1-\nu} \left[\frac{2}{5}(\nu-6)\Delta P_3^0 + \frac{\nu}{\sqrt{5}}\Delta P_3^2 \right] \right) + O(c^6) \quad (65)$$

(vgl. A(8)). (65) und (63) sehen auffällig ähnlich aus. Dass sie exakt übereinstimmen, kann man aufgrund der unterschiedlichen Modellierungsansätze (Reihen in Monomen) nicht erwarten. Tatsächlich werden wir in Abschnitt 8.2 zeigen, dass (65) und (63) sogar äquivalent sind. Unsere Theorie unterscheidet sich von der von R. Kienzler also durch das Fehlen der zweiten Gleichung.

Wenn wir ψ analog zu der Theorie von R. Kienzler als

$$\psi := u_{2,1}^1 - u_{1,2}^1$$

definieren, erhalten wir für unsere Theorie für den Spezialfall der Isotropie mit den Gleichungen (53) und (54)

$$c^2\psi = 0 + O(c^6) \implies c^4\psi = 0 + O(c^6) \implies c^4\Delta\psi = 0 + O(c^6).$$

$c^2\psi = 0$ (vgl. auch A(8)) entspricht der Annahme der Schubstarrheit der klassischen Plattentheorien. Es ist bekannt, dass nur sehr dünne Platten in guter Näherung als schubstarr modelliert werden können. Plattentheorien zweiter Ordnung werden hingegen in der Regel dann angewendet, wenn die Dicke der Platte zu groß für eine schubstarre Modellierung ist. Eine Plattentheorie zweiter Ordnung, welche $c^2\psi = 0$ impliziert, muss daher als unphysikalisch betrachtet werden.

Es sei an dieser Stelle noch einmal ausdrücklich erwähnt, dass wir eine zulässige Modellierung in nur einer Variablen hergeleitet haben. Keine unserer Modellierungsannahmen wurde verletzt, und durch Rückeinsetzen der Gleichungen haben wir gezeigt, dass die ursprünglichen Differentialgleichungssysteme gelöst werden. Auch wenn man in den Arbeiten von R. Kienzler die zweite Gleichung ignoriert, d.h. durch $c^2\tilde{\psi} = 0 + O(c^6)$ ersetzt, erhält man in diesem Sinne eine zulässige Modellierung.

Dies zeigt leider, dass die mathematisch gesehen naheliegendsten (da einfachsten) konsistente Modellierungen einer Plattentheorie zweiter Ordnung generell unphysikalisch zu sein scheinen. Wir werden nur zu einer physikalischen Modellierung gelangen, in dem wir unser Modell durch eine zusätzliche Annahme verkomplizieren. Dies ist sehr bedauerlich, da die zusätzlich benötigt Annahme zudem ganz klar eine experimentell motivierte a-priori Annahme darstellt, welche die konsistenten Plattentheorien eigentlich zu vermeiden suchen. Tatsächlich ist es ja auch möglich gewesen, die klassische Kirchhoff-Theorie ohne eine einzige der klassischen drei Modellierungsannahmen der Plattentheorien herzuleiten. Diesem Anspruch kann man jedoch für die Herleitung einer Plattentheorie zweiter Ordnung nicht mehr genügen.

8 Die schubweiche Modellierung

8.1 Die Reduktion mit ψ -Anteilen

Da sich unsere bestehende Modellierung als unphysikalisch erwies, suchen wir nun nach einer Modellierung in den zwei unabhängigen Variablen w und ψ . Die neue Modellierung muss dabei natürlich zulässig bleiben, d.h. die Ursprungs-PDE-Systeme müssen von der Lösung der vorgestellten Theorie weiterhin gelöst werden. Weiter sollte die neue Modellierung möglichst wenig von der bestehenden Modellierung abweichen und für den Spezialfall der Isotropie mit der Theorie von R. Kienzler übereinstimmen, was insbesondere heißt, dass wir nach einer schubweichen Plattentheorie zweiter Ordnung suchen. Wir werden dabei die vorgenommenen Änderungen durch eine a-priori-Annahme motivieren, welche wir aus bestehenden Plattentheorien ableiten. Konkret beziehen wir uns stets auf

die Plattentheorie von R. Kienzler, doch eine zu (64) äquivalente Gleichung findet sich auch in anderen klassisch hergeleiteten Plattentheorien des Reissner-Typs. In der Mapledatei A(12) werden wir schließlich zeigen, dass es sich bei unserer modifizierten Plattentheorie um eine zulässige Modellierung handelt. Die Äquivalenz zur Theorie von R. Kienzler zeigen wir dann im nächsten Abschnitt.

Die erwähnte a-proiori-Annahme ist eine Annahme an die Struktur der ψ -Anteile. Man weiß, dass die Lösungen der ψ -PDE Randeffekte der Platte beschreiben, welche exponentiell abklingen. Eine Lösung von (64) wäre ja z.B.

$$e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{c}x} + e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{c}y}.$$

An der Gleichung ist zu erkennen, dass z.B. die zweite Ableitung nach x dieselbe Größenordnung hat wie die Lösung multipliziert mit c^2 . (64) impliziert auch direkt das $c^2\Delta\psi$ dieselbe Größenordnung wie ψ hat, ohne dass man etwas über die Struktur einer konkreten Lösung wissen muss. Wir nehmen daher im Folgenden an, dass zweite Ableitungen von ψ sehr viel größer sind als ψ selbst, dass also

$$D^2\psi \gg \psi$$

gilt. Diese Annahme verletzt natürlich die bisherige Modellierungsannahme, dass beim Differenzieren einer Gleichung die Größenordnung der Gleichung erhalten bleibt (46), welche wir zunächst treffen mussten, um das PDE-System überhaupt reduzieren zu können. Wir werden also im Folgenden die ψ -Anteile grundlegend anders behandeln müssen als andere Anteile.

Aus (47) kann zwar unmittelbar

$$c^4\psi = O(c^6)$$

gefolgert werden. Mit der neuen Modellierungsannahme impliziert das jedoch **nicht**, dass $c^4\Delta\psi$ auch zu vernachlässigen ist. ($c^4\tilde{\psi} = O(c^6)$ gilt übrigens auch in der Plattentheorie von R. Kienzler.) Um eine Formel analog zu (64) zu erhalten, müssen deshalb nur die Reduktionsgleichungen (53) und (54) verändert werden. Diese müssen passende erste Ableitungen in $c^4\psi$ enthalten, damit eine Formel der Struktur von (64) entsteht. (53) und (54) hatten wir aus dem System von $c^2(1,1)$, $c^2(1,2)$, (3,1) und (3,2) gewonnen. Die Differenziation der Definition von ψ ergibt

$$\psi_{,1} = u_{2,11}^1 - u_{1,12}^1 \tag{66}$$

$$\psi_{,2} = u_{2,12}^1 - u_{1,22}^1. \tag{67}$$

Somit können wir ψ -Ableitungen erster Ordnung in den Gleichungen $c^2(1,1)$ und $c^2(1,2)$ erzeugen, indem wir die folgenden Gleichungen einsetzen.

$$c^4 \frac{\partial^2 u_1^1}{\partial y^2} = -c^4 \frac{\partial \psi}{\partial y} + c^4 \frac{\partial^2 u_2^1}{\partial x \partial y} \iff c^4 \frac{\partial^2 u_2^1}{\partial x \partial y} = c^4 \frac{\partial \psi}{\partial y} + c^4 \frac{\partial^2 u_1^1}{\partial y^2}, \tag{68}$$

$$c^4 \frac{\partial^2 u_2^1}{\partial x^2} = c^4 \frac{\partial \psi}{\partial x} + c^4 \frac{\partial^2 u_1^1}{\partial x \partial y} \iff c^4 \frac{\partial^2 u_1^1}{\partial x \partial y} = -c^4 \frac{\partial \psi}{\partial x} + c^4 \frac{\partial^2 u_2^1}{\partial x^2}. \tag{69}$$

Man beachte, dass wegen (47) jede der Gleichungen (68) und (69) auch ohne den Summanden in ψ gilt. Erste Ableitungen in ψ werden nach wie vor vernachlässigt (als $O(c^6)$ angenommen); aber welche Anteile wir in den Gleichungen $c^2(1,1)$ und $c^2(1,2)$ generieren, legt den nicht zu vernachlässigenden $c^4 D^2\psi$ Anteil in (64) bzw. der analogen Gleichung in unserer Theorie fest. Konsequenterweise werden wir dieselbe Manipulation, welche wir an den Gleichungen $c^2(1,1)$ und $c^2(1,2)$ durchführen auch an den Gleichungen (1,1) bzw (1,2) durchführen, wozu wir die Gleichungen (68) und (69) mit den Vorfaktoren c^2 benutzen. Anders gesagt manipulieren wir eigentlich die Gleichungen (1,1) und (1,2) und bilden aus den manipulierten Gleichungen dann $c^2(1,1)$ und $c^2(1,2)$, welche den viel größeren

l	i	u_1^1	u_2^1
1	1	$c^2 E_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bullet + c^2 E_{44} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \bullet$ $+ 2c^2 E_{14} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \bullet - E_{66} \bullet$	$c^2 E_{14} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bullet + c^2 E_{24} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \bullet$ $+ c^2 (E_{12} + E_{44}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \bullet - E_{56} \bullet$
1	2	$c^2 E_{14} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bullet + c^2 E_{24} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \bullet$ $+ c^2 (E_{44} + E_{12}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \bullet - E_{56} \bullet$	$c^2 E_{44} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bullet + c^2 E_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \bullet$ $+ 2c^2 E_{24} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \bullet - E_{55} \bullet$

Tabelle 4: Ausschnitt aus Tabelle 3

Einfluss auf den Reduktionsprozess haben. Den Reduktionsprozess führen wir mit den geänderten Gleichungen vollkommen analog zum Abschnitt 7.1 durch.

In den Arbeiten von R. Kienzler wird neben ψ (Rotation) noch die Größe $\phi = u_{1,1}^1 + u_{2,2}^1$ (Divergenz) eingeführt. Außerdem führt man die entsprechenden Größen höherer Ordnung ein. Dies ist jedoch nur für Isotropie zweckmäßig, da man in den Gleichungen, die der Tabelle 3 entsprechen, die Anteile der Gleichungen in den Verschiebungskoeffizienten, die nicht den unteren Index drei haben, recht gut in ϕ und ψ Anteile zerlegen kann. So zerlegt man beispielsweise auch den u_1^1 - und u_2^1 -Anteil in $c^2(1,1)$ und $c^2(1,2)$ in einen ϕ - und einen ψ -Anteil. Den ψ -Anteil behandelt man dann mit der obigen Argumentation als unabhängige Variable, während man für den ψ -Anteil einsetzt. Für Monotropie ist dieses Vorgehen nicht möglich.

$$\begin{array}{ccccc}
 u_{2,22}^l & \xleftarrow{\phi_{,2}^l} & u_{1,12}^l & \xleftarrow{-\psi_{,1}^l} & -u_{2,11}^l \\
 u_{1,11}^l & \xleftarrow{\phi_{,1}^l} & u_{2,12}^l & \xleftarrow{\psi_{,2}^l} & -u_{1,22}^l
 \end{array}$$

Das Diagramm soll folgendes illustrieren: Zur Generierung eines $\phi_{,2}^l$ Anteils benötigt man einen $u_{2,22}^l$ und einen passenden $u_{1,12}^l$ Anteil, was bedeutet, dass beide denselben Vorfaktor haben müssen. Anders formuliert, ein $u_{2,22}^l$ Anteil kann in $u_{1,12}^l$ geschrieben werden durch Subtraktion eines $\phi_{,2}^l$ Anteils, wobei die zwei Ersatzanteile den Vorfaktor des ursprünglichen Anteils haben. Wenn die drei Größen $u_{2,22}^l$, $u_{1,12}^l$ und $-u_{2,11}^l$ also in einer Gleichung auftreten und nicht denselben Vorfaktor haben, so besteht keine Chance, die Gleichung nur in $\phi_{,2}^l$ und $-\psi_{,1}^l$ zu schreiben. Auch für Isotropie gelingt die Zerlegung nicht vollständig, doch die entstehenden Gleichungen legen bei R. Kienzlers Theorie im Folgenden nahe, wie eine generelle Entkopplung zwischen ϕ - und ψ -Anteilen zu erzielen ist (siehe Bose, 2004, Tabelle 2). Bei Monotropie ist solch ein Vorgehen aufgrund der 13 unabhängigen Materialkonstanten, zwischen denen auch keine algebraischen Beziehungen bestehen, nicht durchführbar.

Wir haben daher zunächst keinen Anhaltspunkt, welche ψ -Anteile wir mittels (68) und (69) in $c^2(1,1)$ und $c^2(1,2)$ bzw. (1,1) und (1,2) erzeugen sollen. Am naheliegendsten erscheint es, mittels (68) und (69) die orange bzw. blau markierten Anteile entweder komplett in u_1^1 oder u_2^1 auszudrücken, oder sie wie gehabt beizubehalten ohne Substitutionen vorzunehmen, was bereits $3^4 = 81$ Möglichkeiten ergibt. Natürlich könnte man für die farblich markierten Terme in einer Gleichung auch beide Substitutionen durchführen, was aufgrund der unterschiedlichen Vorfaktoren von u_2^1 und u_1^1 auch zu ψ -Anteilen führen würde, obwohl die eingesetzten Substitutionen invers zueinander sind. Auch anteilige Substitutionen (man überführt beispielsweise nur αu_1^1 mit $\alpha \in [0, 1]$) wären denkbar. Die hier betrachteten naheliegendsten Möglichkeiten liefern jedoch schon einen geeigneten Kandidaten für eine monotrope Plattentheorie.

Die Untersuchungen in der Mapledatei A(9) zeigen, dass wir nur eine Modellierung erhalten, die für Isotropie mit der Modellierung von R. Kienzler übereinstimmt, falls wir den orangenen Term (vgl. Tabelle 4) in Gleichung $c^2(1,1)$ in $c^4 u_2^1$ ausdrücken und den blauen Term in Gleichung $c^2(1,2)$ in $c^4 u_1^1$

ausdrücken. Somit ist klar, wie mit diesen Termen zu verfahren ist. Auch die oben erwähnten anteiligen oder doppelten Substitutionen für diese zwei Terme würden nicht auf Modellierungen führen, welche für Isotropie mit der Theorie von R. Kienzler übereinstimmen. (Man beachte dazu, dass jede Substitution einen additiven ψ -Anteil zu den Gleichungen des Abschnittes 7.1 generiert, welcher denselben Vorfaktor wie der substituierte Term hat.) Der blaue Term in der Gleichung $c^2(1,1)$ bzw. (1,1) und der orange Term in Gleichung $c^2(1,2)$ bzw. (1,2) erzeugen jedoch aufgrund der Vorfaktoren jeweils additive ψ -Anteile, welche bereits für Orthotropie und somit insbesondere für Isotropie Null sind. Daher liefern alle bestehenden Plattentheorien (die höchstens orthotropes Material modellieren) keinerlei Anhaltspunkte, welche Substitutionen durchzuführen sind. Bemerkenswert ist jedoch, dass für alle Substitutionen, die diese Terme betreffen, der Differentialoperator $c^4 D^4 \psi$ in (70) ungleich dem Differentialoperator $c^4 D^4 w$ in (71) ist. Diese Kopplungssymmetrie halten bestehende Plattentheorien ein. Falls sich die Symmetrie aus einem physikalischen Grundsatz ableiten lässt, so wäre daher klar, dass für diese Terme keine Substitutionen durchzuführen sind. Es wäre jedoch auch vorstellbar, dass diese Symmetrie eben nur für Materialverhalten bis zur Orthotropie gilt. Wir entscheiden uns an dieser Stelle dazu, für die betreffenden Terme keine Substitutionen durchzuführen, um die naheliegendste, da einfachste Theorie zu erhalten. Dass dies keine physikalisch korrekte Modellierung erzeugen muss, haben wir bereits im vorherigen Abschnitt gesehen. Die physikalische Korrektheit kann nur experimentell nachgewiesen werden, was im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich ist. Stellt man physikalisch unkorrektes Verhalten für die hier vorgestellte Theorie für einen monotropen Werkstoff fest, so muss die Theorie mittels der nicht betrachteten Substitutionsmöglichkeiten erweitert werden.

Bei einem Reduktionsprozess analog zu dem des Abschnittes 7.1 entstehen die folgenden additiven ψ -Anteile:

$$\begin{aligned}
 c^2 u_1^1 &= [c^2 u_1^1]_{alt} - 6c^4 \frac{E_{44} \left(E_{55} \frac{\partial}{\partial y} \psi + E_{56} \frac{\partial}{\partial x} \psi \right)}{5 E_{55} E_{66} - 5 E_{56}^2} \\
 c^2 u_2^1 &= [c^2 u_2^1]_{alt} + 6c^4 \frac{E_{44} \left(E_{56} \frac{\partial}{\partial y} \psi + \left(\frac{\partial}{\partial x} \psi \right) E_{66} \right)}{5 E_{55} E_{66} - 5 E_{56}^2} \\
 c^4 u_1^3 &= [c^4 u_1^3]_{alt} + \frac{\sqrt{3} \sqrt{7} E_{44} c^4 \left(E_{55} \frac{\partial}{\partial y} \psi + E_{56} \frac{\partial}{\partial x} \psi \right)}{-35 E_{56}^2 + 35 E_{55} E_{66}} \\
 c^4 u_2^3 &= [c^4 u_2^3]_{alt} - \frac{\sqrt{3} \sqrt{7} E_{44} c^4 \left(E_{56} \frac{\partial}{\partial y} \psi + \left(\frac{\partial}{\partial x} \psi \right) E_{66} \right)}{-35 E_{56}^2 + 35 E_{55} E_{66}} \\
 \sqrt{5} c^2 u_3^2 + 3 c^4 u_3^4 &= \left[\sqrt{5} c^2 u_3^2 + 3 c^4 u_3^4 \right]_{alt} + \frac{6c^4 E_{44}}{5 E_{33} (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66})} \left((-E_{56} E_{13} + E_{66} E_{34}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi \right. \\
 &\quad \left. + (-E_{55} E_{13} + E_{66} E_{23}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \psi + (E_{23} E_{56} - E_{55} E_{34}) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi \right)
 \end{aligned}$$

Die Gleichungen für $\frac{\partial u_3^0}{\partial x} + u_1^1 + 1/3 \sqrt{3} \sqrt{7} c^2 u_1^3 + 1/3 \sqrt{3} \sqrt{11} c^4 u_1^5$ und $\frac{\partial u_3^0}{\partial y} + u_2^1 + 1/3 \sqrt{3} \sqrt{7} c^2 u_2^3 + 1/3 \sqrt{3} \sqrt{11} c^4 u_2^5$ ändern sich aufgrund der Substitution in den Gleichungen (1,1) und (1,2) auch im

$c^4 D^5 u_3^0$ Anteil. Die entstehenden additiven Anteile sind von der Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_3^0}{\partial x} + u_1^1 + 1/3 \sqrt{3} \sqrt{7} c^2 u_1^3 + 1/3 \sqrt{3} \sqrt{11} c^4 u_1^5 &= \left[\frac{\partial u_3^0}{\partial x} + u_1^1 + 1/3 \sqrt{3} \sqrt{7} c^2 u_1^3 + 1/3 \sqrt{3} \sqrt{11} c^4 u_1^5 \right]_{alt} \\ &\quad + c^4 D^5 u_3^0 + c^4 D^3 \psi + c^2 D^1 \psi, \\ \frac{\partial u_3^0}{\partial y} + u_2^1 + 1/3 \sqrt{3} \sqrt{7} c^2 u_2^3 + 1/3 \sqrt{3} \sqrt{11} c^4 u_2^5 &= \left[\frac{\partial u_3^0}{\partial y} + u_2^1 + 1/3 \sqrt{3} \sqrt{7} c^2 u_2^3 + 1/3 \sqrt{3} \sqrt{11} c^4 u_2^5 \right]_{alt} \\ &= c^4 D^5 u_3^0 + c^4 D^3 \psi + c^2 D^1 \psi. \end{aligned}$$

Wir verweisen aufgrund der Komplexität der Gleichungen an dieser Stelle abermals auf die Mapledatei A(9). Die geänderten $c^4 D^5 u_3^0$ -Anteile oben beeinflussen beim Einsetzen in (0,3) jedoch nicht die Differentialoperatoren in $u_3^0 = w$ in der Hauptdifferentialgleichung, wohl aber die Differentialoperatoren in w in den Schnittgrößen $m_{3\alpha}^0$. Es ergibt sich somit eine Modellierung in den zwei gekoppelten Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} &5c^2 E_{3333} (E_{2323} E_{1313} - E_{2313}^2) (E_{\alpha\beta\gamma\delta} E_{3333} - E_{\alpha\beta 33} E_{\gamma\delta 33}) w_{,\alpha\beta\gamma\delta} \\ &+ 6c^4 \varepsilon_{3\alpha\beta} \varepsilon_{3\gamma\delta} E_{\alpha 3\gamma 3} (E_{\beta\eta\kappa} E_{3333} - E_{\beta\eta 33} E_{\kappa 33}) (E_{\delta\mu\nu\vartheta} E_{3333} - E_{\delta\mu 33} E_{\nu\vartheta 33}) w_{,\eta\kappa\mu\nu\vartheta} \\ &- 6c^4 E_{1212} E_{3333} \varepsilon_{3\alpha\beta} E_{\alpha 3\gamma 3} (E_{\delta\eta\mu\beta} E_{3333} - E_{\delta\eta 33} E_{\mu\beta 33}) \psi_{,\delta\eta\mu\gamma} \\ &= 5E_{3333} (E_{2323} E_{1313} - E_{2313}^2) \frac{a}{h} \left(E_{3333} P_3^0 + c^2 E_{\alpha\beta 33} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} P_3^2 + \frac{2}{5} P_3^0 \right)_{,\alpha\beta} \right) + O(c^6), \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} &5c^2 E_{3333} (E_{2323} E_{1313} - E_{2313}^2) \psi \\ &+ 6c^4 \varepsilon_{3\alpha\beta} E_{\alpha 3\gamma 3} (E_{\delta\eta\mu\beta} E_{3333} - E_{\delta\eta 33} E_{\mu\beta 33}) w_{,\delta\eta\mu\gamma} \\ &- 6c^4 E_{1212} E_{3333} E_{\alpha 3\beta 3} \psi_{,\alpha\beta} \\ &= 0 + O(c^6) \end{aligned} \quad (71)$$

(vgl. A(10)). Der Kopplungsdifferentialoperator ist für Isotropie und transversal Isotropie identisch Null. Das Testen der Lösung sowie die Angabe der Schnittgrößen in w und ψ , welche insbesondere auch für die Formulierung der Randbedingungen erforderlich sind, erfolgt aufgrund der Komplexität nur in der Mapledatei A(11) und A(12). Die entstehenden Schnittgrößen sind von der Form

$$\begin{aligned} m_{3\alpha}^0 &= c^2 D^3(w) + c^2 D^1(\psi) + c^4 D^5(w) + c^4 D^3(\psi) + c^2 D^1(P_3^2) + O(c^6), \\ m_{\beta\alpha}^1 &= c^2 D^2(w) + c^4 D^4(w) + c^4 D^2(\psi) + c^2 D^0(P_3^2) + O(c^6), \\ m_{33}^1 &= -\frac{1}{5} a^2 (\sqrt{5} c^2 P_3^2 + c^2 P_3^0) + O(c^6), \\ m_{3\alpha}^2 &= c^4 D^3(w) + O(c^6). \end{aligned}$$

Man beachte dabei, das $m_{3\alpha}^2$ auch einen $c^4 D^1(\psi)$ Anteil enthält, welcher von der Ordnung $O(c^6)$ ist, aber bei Differenziation der Schnittgröße beachtet werden muss.

8.2 Die Äquivalenz zu bestehenden Plattentheorien für Isotropie

In diesem Abschnitt wollen wir die Äquivalenz unserer Plattentheorie für den Spezialfall der Isotropie zur Plattentheorie von R. Kienzler nachweisen. Die Größen der Theorie von R. Kienzler wollen wir dabei grundsätzlich mit einer Schlangenlinie kennzeichnen. Das Vorgehen wird dabei wie folgt sein:

Wir werden nur aus den Definitionen der Größen beider Plattentheorien Beziehungen herleiten, mit denen wir die Größen w , ψ , P_3^0 und P_3^2 unserer Plattentheorie und damit auch die zwei Differentialgleichungen unserer Theorie in den Größen der Plattentheorie von R. Kienzler schreiben können. Diese Größen werden dabei jedoch auch solche sein, welche in der Plattentheorie von R. Kienzler durch den Reduktionsprozess eliminiert worden sind, so dass innerhalb der Plattentheorie von R. Kienzler nachzuweisen ist, dass die Gleichungen äquivalent zu den finalen zwei Differentialgleichungen dieser Plattentheorie sind.

In den Arbeiten von R. Kienzler werden Reihendarstellungen bezüglich einer Basis aus Monomen benutzt.

$$u_i(x, y, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{u}_i^l(x, y) z^l \quad (72)$$

(siehe Bose, 2004, Gleichung 3.2). Damit gilt generell für ein $r \in N_0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} (u_i, z^r)_{L_2(-h/2a, h/2a)} &= \frac{a}{h} \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{u}_i^l \int_{-h/2a}^{h/2a} z^{l+r} dz \\ &= \frac{a}{h} \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{u}_i^l \begin{cases} \frac{2}{l+r+1} (\sqrt{3}c)^{l+r+1} & \text{für } l+r \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{u}_i^l \begin{cases} \frac{1}{l+r+1} (\sqrt{3}c)^{l+r} & \text{für } l+r \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned} \quad (73)$$

und da $\hat{P}^0 = z^0 = 1$ gilt, folgt für $r = 0$

$$w = u_3^0 \stackrel{\text{Satz 39}}{=} \frac{1}{h} (u_3, 1)_{L_2(-h/2a, h/2a)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{3^m}{2m+1} c^{2m} \tilde{u}_3^{2m}. \quad (74)$$

Nach (Bose, 2004, Gleichung 3.50) gilt in R. Kienzlers Theorie

$$c^4 \tilde{u}_3^2 = c^4 \frac{\nu}{2(1-\nu)} \Delta \tilde{w} + O(c^6).$$

Somit gilt mit (74)

$$c^2 w = c^2 \tilde{w} + c^4 \frac{\nu}{2(1-\nu)} \Delta \tilde{w} + O(c^6). \quad (75)$$

Die Lastresultanten werden in R. Kienzlers Theorie zweischrittig mittels

$$\begin{aligned} \forall l \in N_0 : \tilde{p}_3^l &:= \int_{-h/2}^{h/2} \xi_3^l f_3(\xi) d\xi_3 + \left(\frac{h}{2}\right)^l g_3\left(\frac{h}{2}\right) + \left(\frac{-h}{2}\right)^l g_3\left(\frac{-h}{2}\right) \\ &= a \int_{-h/2a}^{h/2a} a^l z^l f_3(x) dz + a^l \left(\frac{h}{2a}\right)^l g_3\left(\frac{h}{2a}\right) + a^l \left(\frac{-h}{2a}\right)^l g_3\left(\frac{-h}{2a}\right) \\ &= a^l \left[a \int_{-h/2a}^{h/2a} z^l f_3(x) dz + \left(\frac{h}{2a}\right)^l g_3\left(\frac{h}{2a}\right) + \left(\frac{-h}{2a}\right)^l g_3\left(\frac{-h}{2a}\right) \right], \end{aligned}$$

und

$$\forall l \in N_0 : \tilde{P}_3^l := \frac{l+1}{\sqrt{3}^l} \frac{\tilde{p}_3^l}{a^l c^l}$$

eingeführt (vgl. Bose, 2004, Gleichung 3.35 und 3.36). Jedes unserer Basispolynome hat eine Darstellung bezüglich der Basis aus Monomen. Da weiter das l -te Basispolynom gerade den Grad l hat, gilt

$$\forall l \in N_0 : \widehat{P}_3^l = \sum_{k=0}^l \alpha_k^l z^k$$

für jeweils eindeutig bestimmte $l+1$ Koeffizienten $\alpha_k^l \in \mathbb{R}$. Mit unserer Definition der Lastresultanten (37) gilt daher

$$\begin{aligned} \forall l \in N_0 : P_3^l &= \frac{1}{c^l} \left[\left(g_3 \widehat{P}^l \left(\frac{h}{2a} \right) + g_3 \widehat{P}^l \left(\frac{-h}{2a} \right) \right) + a \int_{-h/2a}^{h/2a} f_3 \widehat{P}^l dz \right] \\ &= \frac{1}{c^l} \sum_{k=0}^l \alpha_k^l \left[g_3 \left(\frac{h}{2a} \right) \left(\frac{h}{2a} \right)^k + g_3 \left(\frac{-h}{2a} \right) \left(\frac{-h}{2a} \right)^k + a \int_{-h/2a}^{h/2a} f_3 z^k dz \right] \\ &= \frac{1}{c^l} \sum_{k=0}^l \alpha_k^l \frac{\tilde{P}_3^k}{a^k} = \sum_{k=0}^l \alpha_k^l c^{k-l} \frac{\sqrt{3}^k}{k+1} \tilde{P}_3^k. \end{aligned}$$

Konkret gilt wegen

$$\alpha_0^0 = 1, \quad \alpha_0^2 = \frac{-\sqrt{5}}{2} c^2, \quad \alpha_1^2 = 0, \quad \alpha_2^2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

(vergleiche Seite 30) zum Beispiel

$$P_3^0 = \tilde{P}_3^0, \quad P_3^2 = \frac{\sqrt{5}}{2} \left(\tilde{P}_3^2 - \tilde{P}_3^0 \right). \quad (76)$$

Unsere Theorie liefert für Isotropie die Differentialgleichung

$$K \Delta \Delta w = a^3 \left(P_3^0 + \frac{c^2}{1-\nu} \left[\frac{2}{5} (\nu-6) \Delta P_3^0 + \frac{\nu}{\sqrt{5}} \Delta P_3^2 \right] \right) + O(c^6). \quad (77)$$

Multiplikation mit c^2 liefert

$$c^2 K \Delta \Delta w = a^3 c^2 P_3^0 + O(c^6).$$

Dies impliziert mit (75) und (76)

$$c^2 K \Delta \Delta \tilde{w} = a^3 c^2 \tilde{P}_3^0 + O(c^6)$$

(vgl. auch Bose, 2004, Gleichung 3.59) / (auch (79) impliziert diese Gleichung), was wiederum

$$c^2 K \Delta \Delta \Delta \tilde{w} = a^3 c^2 \Delta \tilde{P}_3^0 + O(c^6) \quad (78)$$

impliziert. Man beachte hierbei, dass beide Theorien die Modellierungsannahme (46) für alle Größen außer ψ (bzw. ψ^l s.u.) benutzen. Wenn wir beachten, dass K einen Faktor c^2 enthält, gilt somit

$$\begin{aligned} K \Delta \Delta w &\stackrel{(75)}{=} K \left[\Delta \Delta \tilde{w} + c^2 \frac{\nu}{2(1-\nu)} \Delta \Delta \Delta \tilde{w} \right] + O(c^6) \\ &\stackrel{(78)}{=} K \Delta \Delta \tilde{w} + a^3 c^2 \frac{\nu}{2(1-\nu)} \Delta \tilde{P}_3^0 + O(c^6) \\ &\stackrel{(77)}{=} a^3 \left(P_3^0 + \frac{c^2}{1-\nu} \left[\frac{2}{5} (\nu-6) \Delta P_3^0 + \frac{\nu}{\sqrt{5}} \Delta P_3^2 \right] \right) + O(c^6) \\ &\stackrel{(76)}{=} a^3 \left(\tilde{P}_3^0 + \frac{c^2}{1-\nu} \left[\frac{2}{5} (\nu-6) \Delta \tilde{P}_3^0 + \frac{\nu}{\sqrt{5}} \Delta \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \left(\tilde{P}_3^2 - \tilde{P}_3^0 \right) \right) \right] \right) + O(c^6). \end{aligned}$$

Auflösen nach \tilde{w} ergibt dann

$$K\Delta\Delta\tilde{w} = a^3 \left[\tilde{P}_3^0 + \frac{c^2}{10(1-\nu)} \left(5\nu\Delta\tilde{P}_3^2 - 6(4+\nu)\Delta\tilde{P}_3^0 \right) \right] + O(c^6), \quad (79)$$

welches die entsprechende Differentialgleichung der Plattentheorie von R. Kienzler ist (vgl. Bose, 2004, Gleichung 3.60). Wir haben somit gezeigt, dass die Differentialgleichung (77) äquivalent zu (79) ist.

Da $\hat{P}^1 = z^1 = z$ gilt, folgt mit (73) für $r = 1$

$$\begin{aligned} u_i^1 &\stackrel{\text{Satz 39}}{=} \frac{1}{c^2 h} (u_i, z)_{L_2(-h/2a, h/2a)} = \frac{1}{c^2} \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{u}_i^l \begin{cases} \frac{1}{l+2} (\sqrt{3}c)^{l+1} & \text{für } l \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{3^{m+1}}{2m+3} c^{2m} \tilde{u}_i^{2m+1}. \end{aligned} \quad (80)$$

Mit den Definitionen $\psi^k := -u_{1,2}^k + u_{2,1}^k$ bzw. $\tilde{\psi}^k := -\tilde{u}_{1,2}^k + \tilde{u}_{2,1}^k$ gilt (nach Bose, 2004, Formel 3.64)

$$c^4 \tilde{\psi}^3 = -\frac{1}{9} c^2 \tilde{\psi}^1 + O(c^6), \quad (81)$$

und damit mit Differenziation von (80) (Die Gleichung gilt exakt.)

$$c^2 \psi = c^2 \psi^1 = c^2 \tilde{\psi}^1 + \frac{9}{5} c^4 \tilde{\psi}^3 + O(c^6) = \frac{4}{5} c^2 \tilde{\psi}^1 + O(c^6). \quad (82)$$

Nach (Bose, 2004, Tabelle (IV)(a) mit c^2 multipliziert) gilt

$$c^2 \tilde{\psi} - c^4 \Delta \tilde{\psi} + 3c^4 \tilde{\psi}^3 - \frac{9}{5} c^6 \Delta \tilde{\psi}^3 = 0 + O(c^6).$$

Mittels Einsetzen von (81) und (84) folgt daraus

$$c^6 \Delta \tilde{\psi}^3 = O(c^6),$$

was uns zeigt, dass diese Größe in der Theorie von R. Kienzler zu vernachlässigen ist. Aus Differenziation von (80) folgt damit sofort

$$c^4 \Delta \psi^1 = c^4 \Delta \tilde{\psi}^1 + O(c^6). \quad (83)$$

Man beachte, dass (83) nicht durch Multiplikation mit c^2 und Anwenden des Δ -Operators auf (82) gefolgert werden kann, da für ψ die Modellierungsannahme (46) nicht gilt. Wegen (82) und (83) sind daher unsere zweite Differentialgleichung für den Spezialfall der Isotropie

$$c^2 \left(\psi - \frac{6}{5} c^2 \Delta \psi \right) = 0 + O(c^6)$$

und die zweite Differentialgleichung der Theorie von R. Kienzler (vgl. Bose, 2004, Gleichung 3.65)

$$c^2 \left(\tilde{\psi} - \frac{3}{2} c^2 \Delta \tilde{\psi} \right) = 0 + O(c^6) \quad (84)$$

äquivalent.

9 Vergleich eines isotropen und eines orthotropen Materials

Besonders aus ingenieurwissenschaftlicher Sicht stellt sich die Frage, wie sehr Berechnungen mittels der hier vorgestellten Theorie von den wesentlich einfacher durchzuführenden Berechnungen mittels einer isotropen Theorie abweichen. Leider blieb im Rahmen der Diplomarbeit keine Zeit mehr für eine Beispielrechnung. Wir wollen jedoch zumindest für drei Materialien (ein orthotropes und zwei isotrope Vergleichsmaterialien) die entstehenden Koeffizienten der Differentialgleichungen (70) und (71) numerisch auswerten und miteinander vergleichen.

Bei dem orthotropen Material handelt es sich um einen durch ein Gelege aus Textilfasern verstärkten Feinbeton (Textilbeton), den wir mit dem unverstärkten isotropen Feinbeton sowie dem isotrop homogenisierten Textilbeton vergleichen wollen. Eine aufwendige Homogenisierungsbetrachtung des Textilbetons würde den Rahmen der Arbeit sprengen. Wir verwenden daher das einfachste aller Homogenisierungsmodelle, indem wir schlicht jeweils das arithmetische Mittel der Elastizitätsmodule und Querkontraktionszahlen bilden, um ein homogenisiertes isotropes Material zu erhalten. Dieses Verfahren wird in der ingenieurwissenschaftlichen Praxis durchaus angewendet. Der unverstärkte Feinbeton hingegen ist sicherlich ein denkbar ungünstiges Ersatzmodell für den Textilbeton. Er dient in diesem Vergleich dazu, die auftretenden relativen Fehler in den Koeffizienten der Differentialgleichung, die entstehen wenn man statt einer orthotropen Rechnung eine isotrope Rechnung durchführt, in Relation zu setzen.

Wir hatten bereits im Abschnitt 2.3 die Struktur der Elastizitätsmatrix für Orthotropie erwähnt. In der TM ist eine Angabe der Elastizitätsmatrix in den Ingenieurparametern E_i , G_{ij} , und ν_{ij} üblich. E_i ist dabei der Elastizitätsmodul in Richtung i bei Zug in Richtung i . G_{ij} ist der Schubmodul in der (i, j) -Ebene, und ν_{ij} ist die Querkontraktionszahl für die Richtung j bei Zug in Richtung i . Die Elastizitätsmatrix hat dann die Form

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} (1 - \nu_{23}\nu_{32}) E_1 \diamond^{-1} & (\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{31}) E_1 \diamond^{-1} & (\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{21}) E_1 \diamond^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ & (1 - \nu_{13}\nu_{31}) E_2 \diamond^{-1} & (\nu_{23} + \nu_{13}\nu_{31}) E_1 \diamond^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ & & (1 - \nu_{12}\nu_{21}) E_3 \diamond^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ S & & & G_{12} & 0 & 0 \\ & Y & & & G_{23} & 0 \\ & & M & & & G_{13} \end{bmatrix},$$

wobei $\diamond = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{21}\nu_{13}\nu_{32}$ ist (siehe Altenbach u. a., 1998, Abschnitt 5.1.1). Bei den Schubmodulen ist die Reihenfolge der Indizes vertauschbar. Es gilt

$$G_{12} = G_{21}, \quad G_{23} = G_{32}, \quad \text{und} \quad G_{31} = G_{13}.$$

Für die Querkontraktionszahlen hingegen ist die Reihenfolge der Indizes zu beachten ($\nu_{ij} \neq \nu_{ji}$), so dass es sechs ($i \neq j$) Querkontraktionszahlen gibt, die aber aufgrund der Beziehungen

$$\nu_{21} = \frac{\nu_{12}E_2}{E_1}, \quad \nu_{32} = \frac{\nu_{23}E_3}{E_2}, \quad \nu_{13} = \frac{\nu_{31}E_1}{E_3}$$

nicht unabhängig voneinander sind. Wir verwenden dabei für den Textilbeton die Elastizitätsmodule $E_1 = 28858 \text{ N/mm}^2$, $E_2 = 19242 \text{ N/mm}^2$ und $E_3 = 27390 \text{ N/mm}^2$, die Schubmodule $G_{12} = 11786 \text{ N/mm}^2$, $G_{13} = 11972 \text{ N/mm}^2$ und $G_{23} = 11714 \text{ N/mm}^2$ und die Querkontraktionszahlen $\nu_{12} = 0,22$, $\nu_{23} = 0,12$ und $\nu_{31} = 0,18$. Die Parameter sind in Matheas (2006) aus einer Homogenisierungsbetrachtung für eine durch ein Gelege aus Textilfasern verstärkte Betonmatrix

hergeleitet worden. Genauer: „Das [...] Gelege besteht aus 4 Lagen Einzelgelege mit der Bezeichnung NWM3-020-00, das wiederum jeweils aus NEG-ARG620-01-Fasern im Abstand von 3,6 mm in Belastungsrichtung (Anm.: x_1 -Richtung) und NEG-ARG310-01-Fasern im Abstand von 7,2 mm senkrecht zur Belastungsrichtung besteht. Für den Betongrundkörper wurde ein isotropes Material mit $E = 25000 \text{ N/mm}^2$, $\nu = 0,2$ verwendet“ (aus Matheas, 2006, S. 130). Es ergibt sich damit für den Textilbeton die Elastizitätsmatrix

$$\underline{\underline{E}} \approx \begin{bmatrix} 31282 & 8116 & 7087 & 0 & 0 & 0 \\ 8116 & 20568 & 4923 & 0 & 0 & 0 \\ 7087 & 4923 & 29334 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11786 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11714 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11972 \end{bmatrix} \frac{N}{\text{mm}^2},$$

während sich für den unverstärkten Beton die Elastizitätsmatrix

$$\underline{\underline{E}} \approx \begin{bmatrix} 27778 & 6944 & 6944 & 0 & 0 & 0 \\ 6944 & 27778 & 6944 & 0 & 0 & 0 \\ 6944 & 6944 & 27778 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10417 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10417 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10417 \end{bmatrix} \frac{N}{\text{mm}^2}$$

ergibt. Für den jeweils durch Bilden des arithmetischen Mittels der Elastizitätsmodule und Querkontraktionszahlen isotrop homogenisierten Textilbeton ergeben sich die Materialparameter

$$E = \frac{75490}{3} = 25163,3 \frac{N}{\text{mm}^2}, \quad \nu = \frac{13}{75} = 0,17\bar{3},$$

und die zugehörige Elastizitätsmatrix ist

$$\underline{\underline{E}} \approx \begin{bmatrix} 27136 & 5690 & 5690 & 0 & 0 & 0 \\ 5690 & 27136 & 5690 & 0 & 0 & 0 \\ 5690 & 5690 & 27136 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10723 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10723 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10723 \end{bmatrix} \frac{N}{\text{mm}^2}.$$

Wir haben dabei die Matrixeinträge auf ganze Zahlen gerundet. Zur Aufstellung der Differentialgleichungen benutzen wir allerdings die exakten Matrizen. Wir hatten uns bereits in Abschnitt 7.2 überlegt, dass man (70) für Isotropie als Differentialgleichung vierter Ordnung schreiben kann. Da dies jedoch für Orthotropie nicht mehr möglich ist, entschließen wir uns an dieser Stelle, die Differentialgleichungen sechster Ordnung miteinander zu vergleichen, in denen keinerlei Substitutionen durchgeführt wurden, um Terme in w in rechten Seiten auszudrücken. Wir vergleichen also (71) und

die PDE die entsteht, wenn man in (70) den Term mit zweiten Ableitungen in P_3^0 mittels (61) wieder in einen Term sechster Ordnung in w überführt (analog zu (60)). Diese PDE teilen wir zur Normierung durch den Vorfaktor von $\frac{a}{h}P_3^0$, während wir (71) durch den Vorfaktor von $c^2\psi$ teilen, so dass wir also Gleichungen der Formen

$$c^4 \sum_{i=0}^6 a_i \frac{\partial^6 w}{\partial x^i \partial y^{6-i}} + c^2 \sum_{i=0}^4 b_i \frac{\partial^4 w}{\partial x^i \partial y^{4-i}} + c^4 \sum_{i=0}^4 c_i \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^i \partial y^{4-i}} = \frac{a}{h} \left(P_3^0 + c^2 \sum_{i=0}^2 \frac{d_i}{\sqrt{5}} \frac{\partial^2 P_3^2}{\partial x^i \partial y^{2-i}} \right) \quad (85)$$

und

$$c^2 \psi + c^4 \sum_{i=0}^2 e_i \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial y^{2-i}} + c^4 \sum_{i=0}^4 f_i \frac{\partial^4 w}{\partial x^i \partial y^{4-i}} = 0 \quad (86)$$

miteinander vergleichen. Die Koeffizienten berechnen wir dabei in Maple (siehe A(13)) jeweils symbolisch und überführen sie nur der Übersichtlichkeit halber letztendlich in Gleitpunktzahlen. Nur dabei wird gerundet; die Berechnung der Koeffizienten ist nicht von Rundungsfehlern behaftet (keine Fehlerfortpflanzung). Um die Koeffizienten besser miteinander vergleichen zu können, berechnen wir außerdem jeweils den relativen Fehler im Koeffizienten, der entsteht, wenn man statt einer orthotropen Rechnung eine isotrope Rechnung durchführt. Konkret berechnen wir also für jeden Koeffizienten k :

$$\text{rel. Fehler}_k = \left| \frac{k_{\text{Orthotropie}} - k_{\text{Isotropie}}}{k_{\text{Orthotropie}}} \right|.$$

Betrachten wir zunächst die Fehler bei einer Rechnung mit dem unverstärkten Feinbeton: Die Fehler in der unten stehenden Tabelle (Tabelle 5 ohne die letzten zwei Spalten) sind insgesamt viel zu groß. In (85) sind aufgrund ihrer Größe und aufgrund des c^2 Vorfaktors sicherlich die Koeffizienten b_i dominant, deren relativer Fehler bis zu 32% erreicht. Die rechten Seiten erreichen sogar einen relativen Fehler von bis zu 49%, und die Terme sechster Ordnung weichen gar um bis zu 96% ab. Bei den Koeffizienten, die die Kopplung der PDEs beschreiben (c_i und f_i), sind die relativen Fehler von 1 natürlich nicht überraschend, da die Differentialgleichungen für Isotropie entkoppelt sind. Die für Orthotropie zu (86) hinzukommenden Summanden in vierten Ableitungen in w sind von derselben Größenordnung wie die Summanden in zweiten Ableitungen in ψ und werden daher die Berechnungen maßgeblich beeinflussen. Selbst der kleinste auftretende relative Fehler von 0,6% ist noch zu groß, um ihn ignorieren zu können. Dies mag insgesamt wenig überraschend sein, da die Verstärkung des Textilbetons ja gerade dazu dient, die Materialparameter zu ändern, was sich natürlich auch in den Koeffizienten der PDE niederschlägt.

Nun Betrachten wir zum Vergleich die relativen Fehler bei einer Rechnung mit homogenisiertem Textilbeton: Die Koeffizienten und Fehler sind in den letzten zwei Spalten von Tabelle 5 abgedruckt. Es zeigt sich, dass die Größenordnungen der Fehler unverändert gegenüber dem Vergleich mit unverstärktem Feinbeton sind. Die Fehler zeigen lediglich eine leichte Tendenz, sich gleichmäßiger zu verteilen. So sinkt der relative Fehler in a_0 , welcher der größte unter allen Koeffizienten a_i ist, von 96% auf 89%, während sich der von a_6 von 11% auf 14% erhöht. Stärker ausgeprägt ist dieser Effekt bei d_0 und d_2 . So sinkt der relative Fehler in d_0 von 49% auf 25%, während der relative Fehler in d_2 von 3% auf 13% steigt. Generell sind die Fehler aber weiterhin völlig unakzeptabel.

Die Ergebnisse lassen also vermuten, dass eine isotrope Berechnung keine Rückschlüsse auf das Verhalten des orthotropen Materials zulässt. Unsere Plattentheorie weicht für komplexe Materialmodelle und Materialien mit ausgeprägter Anisotropie signifikant von einer isotropen Theorie ab. Für Berechnungen in der Praxis ist eine Plattentheorie, welche komplexe Materialverhalten modelliert, also notwendig.

	Textilbeton (Orthotropie)	Feinbeton (Isotropie)	relativer Fehler	E, ν Mittel (Isotropie)	relativer Fehler
	$[N/mm^2]$	$[N/mm^2]$	[1]	$[N/mm^2]$	[1]
a_0	38601	75521	0.96	73142	0.89
a_1	0	0	0	0	0
a_2	210597	226563	0.08	219426	0.04
a_3	0	0	0	0	0
a_4	268203	226563	0.16	219426	0.18
a_5	0	0	0	0	0
a_6	84785	75521	0.11	73142	0.14
b_0	19742	26042	0.32	25943	0.31
b_1	0	0	0	0	0
b_2	60998	52083	0.15	51886	0.15
b_3	0	0	0	0	0
b_4	29570	26042	0.12	25943	0.12
c_0	0	0	0	0	0
c_1	12194	0	1	0	1
c_2	0	0	0	0	0
c_3	-1891	0	1	0	1
c_4	0	0	0	0	0
	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]
d_0	0.16781	0.25	0.49	0.20968	0.25
d_1	0	0	0	0	0
d_2	0.24161	0.25	0.03	0.20968	0.13
e_0	-1.1814	-1.2	0.02	-1.2	0.02
e_1	0	0	0	0	0
e_2	-1.2074	-1.2	0.01	-1.2	0.01
f_0	0	0	0	0	0
f_1	-1.0346	0	1	0	1
f_2	0	0	0	0	0
f_3	0.16045	0	1	0	1
f_4	0	0	0	0	0

Tabelle 5: Koeffizienten der Differentialgleichungen (85) und (86)

10 Zusammenfassung und Ausblicke

In dieser Arbeit haben wir das dreidimensionale schwache Problem der Elastostatik für ein *beliebiges* linear elastisches Material in äquivalente (exakte) zweidimensionale Probleme überführt. Dieses geschah mittels Fourierreihenentwicklungen bezüglich der Dickenrichtung der Platte zu einer Basis aus skalierten Legendre-Polynomen und unter Ausnutzung der Plattengeometrie. Es wurde eine Formulierung des exakten zweidimensionalen Problems in den Verschiebungen u_i , eine Formulierung in den Schnittgrößen m_{ij}^l und eine Formulierung in den Verschiebungskoeffizienten u_i^l vorgestellt.

Die von uns getroffene Wahl einer Basis aus skalierten Legendre-Polynomen weicht dabei von dem Standardansatz der konsistenten Plattentheorien ab, bei dem eine Basis aus Monomen benutzt wird. Wir haben somit gezeigt, dass bei der Modellierung konsistenter Plattentheorien Spielraum bei der Wahl der Basis besteht. Die von uns gewählte Basis führte letztendlich auf ein schwächer besetztes PDE-System der Tabelle 3, als dies bei Monomen der Fall gewesen wäre (vergleiche für eingesetzte Isotropie mit Bose, 2004, Tabelle I). Ebenfalls abweichend vom Standardvorgehen der konsistenten Plattentheorien haben wir nicht das Prinzip minimaler potentieller Energie als Ausgangspunkt zur Aufstellung unserer Plattentheorie benutzt, sondern die schwache Formulierung des Problems der linearen Elastostatik, von der wir gezeigt haben, dass sie zum Prinzip minimaler potentieller Energie äquivalent ist. Somit betrachteten wir – anders als in der Ingenieursliteratur – auch Fragestellungen der Regularitätstheorie. Auch unterteilten wir in dieser Arbeit die Modellierung der Plattentheorie in mehrere Teilschritte, von denen der erste die *exakte* zweidimensionale Darstellung des schwachen Problems linearer Elastostatik war, anstatt sofort zu einem endlichen approximativen PDE-System überzugehen. Für alle exakten zweidimensionalen Probleme lieferten wir ein Existenz- und Eindeutigkeitsresultat. Dieses basierte im wesentlichen auf Satz 28 (welcher eine auf gemischte Randwerte und allgemeine linear elastische Materialien verallgemeinerte Version von Theorem 61.D aus Zeidler (1997) darstellt) und der Existenz der Fourierreihenentwicklung in Dickenrichtung der Platte (Satz 39). Die zweidimensionalen Darstellungen in Satz 43 und Satz 44 lassen sich leicht auch für andere Basispolynome modifizieren, wie wir in der Bemerkung am Ende von Abschnitt 5.2 gezeigt haben. Nur die zweidimensionale Darstellung für den Spezialfall eines homogenen Materials (Satz 45) nutzt exzessiv die speziellen Eigenschaften der von uns gewählten Basispolynome aus.

Für den Spezialfall eines homogenen monotropen Materials gingen wir den Modellierungsansätzen der konsistenten Plattentheorien folgend zu einem System endlich vieler unbekannter Verschiebungskoeffizienten über. Wir haben gezeigt, dass sich das approximative zweidimensionale Problem in zwei Teilprobleme entkoppelt: In das Scheiben- und das Plattenproblem.

Aus Sicht der Mathematik ist an dieser Stelle das Fehlen einer formalen Fehlerabschätzung beim Übergang zu einem endlichen PDE-System höchst bedauerlich. Diese Abschätzung wäre für eine mathematisch rigorose Legitimation der konsistenten Plattentheorien von essentieller Bedeutung.

Das Differentialgleichungssystem des Plattenproblems haben wir mittels einer Pseudoreduktion in eine Differentialgleichung in dem Verschiebungskoeffizienten $u_3^0 = w$ überführt. Die entstehende Theorie war für den Spezialfall der Isotropie und als Plattentheorie der ersten Approximationsordnung äquivalent zur klassischen Plattentheorie von Kirchhoff. Als Theorie zweiter Ordnung, für den Spezialfall der Isotropie, war die Plattentheorie jedoch weiterhin schubstarr.

Wir haben damit gezeigt, dass unsere konsequente Modellierung einer konsistenten Plattentheorie zweiter Ordnung *ohne a-priori-Annahmen* auf eine schubstarre Theorie führt und nicht, wie man erwarten würde, auf eine schubweiche. Somit ist die mathematisch naheliegenste, da einfachste und konsequenteste (alle Größen wurden gleich behandelt) Modellierung leider *unphysikalisch*. Dieser Umstand lässt sich auch an der Theorie von R. Kienzler nachvollziehen. Leider liegt daher die Vermutung nahe, dass konsequent konsistente Modellierungen zweiter Ordnung ohne a-priori-Annahmen generell auf schubweiche Theorien führen. Dies ist wiederum bedauerlich, da die konsistenten Plattentheorien

unter anderem die Zielsetzung haben, a-priori-Annahmen zu vermeiden.

Durch eine a-priori-Annahme, welche dazu führte, die Größen ψ grundsätzlich anders zu behandeln als die übrigen Größen, modifizierten wir unsere Theorie schließlich so, dass sie als Plattentheorie erster Ordnung, für den Spezialfall der Isotropie, weiterhin äquivalent zur Kirchhoff-Plattentheorie war und als Plattentheorie der zweiten Approximationsordnung äquivalent zur Kienzlerschen Plattentheorie und somit insbesondere schubweich war. Die entstehende Theorie ist eine Modellierung in zwei im allgemeinen gekoppelten partiellen Differentialgleichungen in den zwei skalaren Unbekannten w und ψ . Wir haben Randbedingungen für eine gemischte Randwertaufgabe zur Verfügung gestellt, sowie alle Gleichungen die nötig sind, um alle Größen des Plattenproblems inklusive aller nicht vernachlässigten Schnittgrößen aus den Lösungen w und ψ des PDE-Systems berechnen zu können.

Die von uns durchgeführte Reduktion mit ψ -Anteilen ist dabei grundlegend anders als in anderen Plattentheorien. Am Beispiel der Plattentheorie von R. Kienzler haben wir motiviert, warum sich bisherigen Reduktionsverfahren nicht auf das von uns betrachtete allgemeinere Materialverhalten der Monotropie übertragen lassen. Die von uns vorgestellte Theorie ist jedoch nur die einfachste von einigen möglichen Theorien für ein tatsächlich monotropes Material, wie wir in Kapitel 8 gesehen haben. Mittels Substitutionen der Terme der Tabelle 4, welche die Vorfaktoren E_{14} und E_{24} haben, stehen noch Erweiterungsmöglichkeiten unserer Theorie zur Verfügung. Da bereits für Orthotropie $E_{14} = E_{24} = 0$ gilt, boten bestehende Plattentheorien keine Anhaltspunkte, welche Substitutionen durchzuführen wären. Umgekehrt bedeutet dies natürlich auch, dass unsere Theorie für Orthotropie bereits eindeutig festgelegt ist. Für ein tatsächlich monotropes Material wäre daher ein Abgleich der mittels der hier vorgestellten Theorie berechneten Lösung mit einem Experiment oder einer numerischen 3D-Simulation sehr wünschenswert.

Weiter wurde bisher nicht untersucht, ob die hergeleiteten Randbedingungen für jedes Materialgesetz (d.h. alle Materialgesetze aus Abschnitt 2.3: Monotropie, Orthotropie, ...) zu den entsprechenden Differentialgleichungen passen. Wir wissen ja bereits, dass die Differentialgleichung (70) sich für Isotropie als Differentialgleichung vierter Ordnung schreiben lässt, aber für Monotropie die Ordnung sechs hat, während die Anzahl der Randbedingungen konstant bleibt. Vorstellbar wäre, dass Abhängigkeiten entstehen, die auch die Anzahl der Randbedingungen reduzieren, was wir jedoch nicht untersucht haben.

Auch könnte man weiter untersuchen, welche Voraussetzungen an die Regularität der Lösung die Reduktion des Kapitels 7 erfordert. Aus der Sicht numerischer Mathematik wäre auch die 2D-Simulation einer Platte mittels des PDE-Systems der Tabelle 3 sehr interessant; insbesondere, da man durch die zur Verfügung gestellten Gleichungen des Problems (V) die Approximationsordnung beliebig wählen kann.

Literatur

- [Adams 1975] ADAMS, R. A.: *Sobolev Spaces*. Academic Press, 1975
- [Altenbach u. a. 1998] ALTENBACH, H. ; ALTENBACH, J. ; NAUMENKO, K.: *Ebene Flächentragwerke: Grundlagen der Modellierung und Berechnung von Scheiben und Platten*. Springer-Verlag, 1998
- [Amann und Escher 2001] AMANN, H. ; ESCHER, J.: *Analysis III*. Birkhäuser Verlag, 2001
- [Amann und Escher 2006] AMANN, H. ; ESCHER, J.: *Analysis I*. 3. Auflage. Birkhäuser Verlag, 2006
- [Bose 2004] BOSE, D. K.: *Erhaltungssätze der Kontinuumsmechanik für eine konsistente Platten-theorie*, Universität Bremen, Dissertation, 2004
- [Bose und Kienzler 2006] BOSE, D. K. ; KIENZLER, R.: On material conservation laws for a consistent plate theory. In: *Archive of Applied Mechanics* 75 (2006), S. 607–617
- [Bronstein u. a. 2001] BRONSTEIN, I. N. ; SEMENDJAJEW, K. A. ; MUSIOL, G. ; MÜHLING, H.: *Taschenbuch der Mathematik*. 5. Auflage. Verlag Harri Deutsch, 2001
- [Franklin 2000] FRANKLIN, J. N.: *Matrix Theory*. Dover Publications, 2000
- [Gross u. a. 2003] GROSS, D. ; HAUGER, W. ; SCHNELL, W.: *Technische Mechanik*. Bd. 1: Statik. 7. Auflage. Springer-Verlag, 2003
- [Kienzler 1980] KIENZLER, R.: *Eine Erweiterung der klassischen Schalentheorie; Der Einfluss von Dickenverzerrungen und Querschnittsverwölbungen*, Technische Hochschule Darmstadt, Dissertation, 1980
- [Kienzler 2002] KIENZLER, R.: On consistent plate theories. In: *Archive of Applied Mechanics* 72 (2002), S. 229–247
- [Kienzler 2004] KIENZLER, R.: On Consistent Second-Order Plate Theories. In: *Theories of plates and shells: critical review and new applications*. Springer-Verlag, 2004, S. 85–96
- [Kienzler und Schröder 2009] KIENZLER, R. ; SCHRÖDER, R.: *Einführung in die Höhere Festigkeitslehre*. Springer-Verlag, 2009
- [Kirchhoff 1850] KIRCHHOFF, G. R.: Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 39 (1850), S. 51–88
- [Klenke 2008] KLENKE, A.: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. 2. Auflage. Springer-Verlag, 2008
- [Matheas 2006] MATHEAS, J.: *Entwicklung von Finiten Schalenelementen zur Berechnung von Verstärkungen aus Textilbeton bei Flächentragwerken*, Technischen Universität Dresden, Dissertation, 2006
- [Reissner 1944] REISSNER, E.: On the theory of bending of elastic plates. In: *Journal of Mathematics and Physics* 23 (1944), S. 184–191
- [Washizu 1982] WASHIZU, K.: *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. 3. Auflage. Pergamon Press, 1982

- [Werner 2007] WERNER, D.: *Funktionalanalysis*. 6. Auflage. Springer-Verlag, 2007
- [Wloka 1982] WLOKA, J.: *Partielle Differentialgleichungen: Sobolevräume und Randwertaufgaben*. B.G. Teubner, 1982
- [Zeidler 1990a] ZEIDLER, E.: *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*. Bd. II/A: Linear Monotone Operators. Springer-Verlag, 1990
- [Zeidler 1990b] ZEIDLER, E.: *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*. Bd. II/B: Linear Monotone Operators. Springer-Verlag, 1990
- [Zeidler 1997] ZEIDLER, E.: *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*. Bd. IV: Applications to Mathematical Physics. 2. Auflage. Springer-Verlag, 1997

Anhang.mws

Anhang zur Diplomarbeit "Eine konsistente Plattentheorie zweiter Ordnung für monotropes Material" von Patrick Schneider.
Erstellt mit Maplesoft Maple 9.50.

- 1 Äquivalenz der Darstellungen des Elastizitätsgesetzes

In diesem Abschnitt wollen wir die Äquivalenz der zwei Darstellungen des Elastizitätsgesetzes (Formel (5) und (14)) nachrechnen. Dazu definieren wir den Verzerrungstensor und berechnen den Spannungsvektor einmal über Formel (5) und Definition (11) und einmal über Definition (12) und Formel (14). Die zwei Darstellungen des Spannungsvektors, ausgedrückt in den Komponenten des Verzerrungstensors, müssen dann identisch sein, damit (5) und (14) äquivalent sind.

Wir weisen Maple als erstes an, den internen Speicher zu löschen, damit keine Zuweisungen einer evtl. vorher ausgeführten Mapledatei den Programmablauf beeinflussen können.

```
> restart;
```

Zunächst definieren wir uns einen symmetrischen Verzerrungstensor, genauer gesagt einen konstanten Tensor, also eine Matrix, bzw. in Maple einen array. Wir zeigen die Äquivalenz dann punktweise.

```
> EpsT:=array(1..3,1..3, [
  [Eps11,Eps12,Eps13],
  [Eps12,Eps22,Eps23],
  [Eps13,Eps23,Eps33]
]);
```

$$EpsT := \begin{bmatrix} Eps11 & Eps12 & Eps13 \\ Eps12 & Eps22 & Eps23 \\ Eps13 & Eps23 & Eps33 \end{bmatrix}$$

Als nächstes definieren wir den Spannungstensor über das Elastizitätsgesetz in Tensorform (5).

```
> for i from 1 to 3 do
  for j from 1 to 3 do

    SigmaT[i,j]:=sum(sum(ET4[i,j,k,l]*EpsT[k,l],k=1..3),l=1..3);
  od;
od;
unassign('i','j');
```

Wir definieren den Verzerrungsvektor und den Spannungsvektor (vgl. (11) und (12)).

```
> SigmaV:=array(1..6, [SigmaT[1,1],SigmaT[2,2],SigmaT[3,3],Sigma
T[1,2],SigmaT[2,3],SigmaT[3,1]]):
> EpsV:=array(1..6, [EpsT[1,1],EpsT[2,2],EpsT[3,3],2*EpsT[1,2],2
*EpsT[2,3],2*EpsT[3,1]]):
```

Nun bilden wir die Differenz zwischen dem Spannungsvektor, den wir mittels Definition (11) über den Spannungstensor aus Formel (5) erhalten haben, und dem Spannungsvektor, den wir aus Formel (14) und Definition (12) erhalten. Damit die Darstellungen (5) und (14) äquivalent sind, muss jeder der folgenden Terme gleich Null sein.

```

> for i from 1 to 6 do
  gl(i) := SigmaV[i] - sum(EM[i, j] * EpsV[j], j=1..6);
od;

```

$$\begin{aligned}
gl(1) := & ET4_{1,1,1,1} Eps11 + ET4_{1,1,2,1} Eps12 + ET4_{1,1,3,1} Eps13 + ET4_{1,1,1,2} Eps12 \\
& + ET4_{1,1,2,2} Eps22 + ET4_{1,1,3,2} Eps23 + ET4_{1,1,1,3} Eps13 + ET4_{1,1,2,3} Eps23 \\
& + ET4_{1,1,3,3} Eps33 - EM_{1,1} Eps11 - EM_{1,2} Eps22 - EM_{1,3} Eps33 - 2 EM_{1,4} Eps12 \\
& - 2 EM_{1,5} Eps23 - 2 EM_{1,6} Eps13
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
gl(2) := & ET4_{2,2,1,1} Eps11 + ET4_{2,2,2,1} Eps12 + ET4_{2,2,3,1} Eps13 + ET4_{2,2,1,2} Eps12 \\
& + ET4_{2,2,2,2} Eps22 + ET4_{2,2,3,2} Eps23 + ET4_{2,2,1,3} Eps13 + ET4_{2,2,2,3} Eps23 \\
& + ET4_{2,2,3,3} Eps33 - EM_{2,1} Eps11 - EM_{2,2} Eps22 - EM_{2,3} Eps33 - 2 EM_{2,4} Eps12 \\
& - 2 EM_{2,5} Eps23 - 2 EM_{2,6} Eps13
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
gl(3) := & ET4_{3,3,1,1} Eps11 + ET4_{3,3,2,1} Eps12 + ET4_{3,3,3,1} Eps13 + ET4_{3,3,1,2} Eps12 \\
& + ET4_{3,3,2,2} Eps22 + ET4_{3,3,3,2} Eps23 + ET4_{3,3,1,3} Eps13 + ET4_{3,3,2,3} Eps23 \\
& + ET4_{3,3,3,3} Eps33 - EM_{3,1} Eps11 - EM_{3,2} Eps22 - EM_{3,3} Eps33 - 2 EM_{3,4} Eps12 \\
& - 2 EM_{3,5} Eps23 - 2 EM_{3,6} Eps13
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
gl(4) := & ET4_{1,2,1,1} Eps11 + ET4_{1,2,2,1} Eps12 + ET4_{1,2,3,1} Eps13 + ET4_{1,2,1,2} Eps12 \\
& + ET4_{1,2,2,2} Eps22 + ET4_{1,2,3,2} Eps23 + ET4_{1,2,1,3} Eps13 + ET4_{1,2,2,3} Eps23 \\
& + ET4_{1,2,3,3} Eps33 - EM_{4,1} Eps11 - EM_{4,2} Eps22 - EM_{4,3} Eps33 - 2 EM_{4,4} Eps12 \\
& - 2 EM_{4,5} Eps23 - 2 EM_{4,6} Eps13
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
gl(5) := & ET4_{2,3,1,1} Eps11 + ET4_{2,3,2,1} Eps12 + ET4_{2,3,3,1} Eps13 + ET4_{2,3,1,2} Eps12 \\
& + ET4_{2,3,2,2} Eps22 + ET4_{2,3,3,2} Eps23 + ET4_{2,3,1,3} Eps13 + ET4_{2,3,2,3} Eps23 \\
& + ET4_{2,3,3,3} Eps33 - EM_{5,1} Eps11 - EM_{5,2} Eps22 - EM_{5,3} Eps33 - 2 EM_{5,4} Eps12 \\
& - 2 EM_{5,5} Eps23 - 2 EM_{5,6} Eps13
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
gl(6) := & ET4_{3,1,1,1} Eps11 + ET4_{3,1,2,1} Eps12 + ET4_{3,1,3,1} Eps13 + ET4_{3,1,1,2} Eps12 \\
& + ET4_{3,1,2,2} Eps22 + ET4_{3,1,3,2} Eps23 + ET4_{3,1,1,3} Eps13 + ET4_{3,1,2,3} Eps23 \\
& + ET4_{3,1,3,3} Eps33 - EM_{6,1} Eps11 - EM_{6,2} Eps22 - EM_{6,3} Eps33 - 2 EM_{6,4} Eps12 \\
& - 2 EM_{6,5} Eps23 - 2 EM_{6,6} Eps13
\end{aligned}$$

Das geht nur, wenn jeder Faktor vor jeder Komponente des Verzerrungstensors Null wird. Um mehr Übersichtlichkeit zu erlangen, isolieren wir die Faktoren vor einer der Komponenten des Verzerrungstensors, konkret "Eps12". Die Faktoren für andere Komponenten des Verzerrungstensors sind aber von derselben Form.

```

> for i from 1 to 6 do
  coeff(SigmaV[i] - sum(EM[i, j] * EpsV[j], j=1..6), Eps12);
od;

```

$$ET4_{1,1,2,1} + ET4_{1,1,1,2} - 2 EM_{1,4}$$

$$ET4_{2,2,2,1} + ET4_{2,2,1,2} - 2 EM_{2,4}$$

$$ET4_{3,3,2,1} + ET4_{3,3,1,2} - 2 EM_{3,4}$$

$$ET4_{1,2,2,1} + ET4_{1,2,1,2} - 2 EM_{4,4}$$

$$ET4_{2,3,2,1} + ET4_{2,3,1,2} - 2 EM_{5,4}$$

$$ET4_{3,1,2,1} + ET4_{3,1,1,2} - 2 EM_{6,4}$$

An den erhaltenen Gleichungen versuchen wir, ein Muster für den Zusammenhang zwischen den Einträgen der Elastizitätsmatrix ("EM") und dem Elastizitätstensor ("ET4") abzulesen. Die ersten zwei Summanden jeder obenstehenden Zeile sind immer, aufgrund der Symmetrien des Elastizitätstensors (6), identisch. Würden wir die Elastizitätsmatrix aber über den Elastizitätstensor definieren (wie in Formel (13)), so würde Maple nicht erkennen, dass die obigen Faktoren Null sind, da Maple die Symmetrien (6) nicht kennt. Deshalb werden wir auch im Folgenden immer den Elastizitätstensor über die Elastizitätsmatrix definieren. D.h. wir setzen alle Einträge des Elastizitätstensors, die aufgrund der ersten beiden Symmetrien in (6) übereinstimmen, auf den entsprechenden Eintrag der Elastizitätsmatrix, was dann in Maple die automatische Beachtung der ersten beiden Symmetrien in (6) zur Folge hat. Die obigen Gleichungen lassen den Zusammenhang

1,1 - 1
 2,2 - 2
 3,3 - 3
 1,2 bzw. 2,1 - 4
 2,3 bzw. 3,2 - 5
 3,1 bzw. 1,3 - 6

zwischen Tensor- und Matrixindizes vermuten. Je zwei Tensorindizes der linken Seite werden rechts zu einem Matrixindex zusammengefasst. Man beachte, dass, wiederum aufgrund der Symmetrien des Elastizitätstensors (6), die Reihenfolge der linken Indizes in den unteren drei Spalten unerheblich ist. Die Tabelle steht im Einklang mit der Definition der Elastizitätsmatrix (13), welche die Definition der Elastizitätsmatrix über den Elastizitätstensor ist. Die Definition des Elastizitätstensors über die Elastizitätsmatrix gelingt, nach den obigen Regeln, mittels:

```
> for i from 1 to 3 do
  for j from 1 to 3 do
    for k from 1 to 3 do
      for l from 1 to 3 do
        if (i=j) then
          r:=i;
        elif ((i=1 and j=2) or (i=2 and j=1)) then
          r:=4;
        elif ((i=2 and j=3) or (i=3 and j=2)) then
          r:=5;
        elif ((i=1 and j=3) or (i=3 and j=1)) then
          r:=6;
        fi;
        if (k=1) then
          ET4[i, j, k, l] := EM[r, k];
        elif ((k=1 and l=2) or (k=2 and l=1)) then
```

```

    ET4[i, j, k, l] := EM[r, 4];
  elif ((k=2 and l=3) or (k=3 and l=2)) then
    ET4[i, j, k, l] := EM[r, 5];
  elif ((k=1 and l=3) or (k=3 and l=1)) then
    ET4[i, j, k, l] := EM[r, 6];
  fi;
od;
od;
od;
unassign('i', 'j', 'k', 'l', 'r');

```

Man beachte, dass wir nur Komponenten des Elastizitätstensors auf dieselben Konstanten (hier speziell die Komponenten der Elastizitätsmatrix) setzen, von denen wir schon wissen, dass sie aufgrund der Symmetrien gleich sind. Somit ist dieser Schritt auch beweistechnisch zulässig, und wir beweisen tatsächlich die Äquivalenz der Darstellungen unter der Voraussetzung, dass (6) gilt.

Da wir bisher nur die Faktoren vor einer Komponente des Verzerrungstensors untersucht haben, bleibt insgesamt noch zu zeigen, dass mit der Definition des Elastizitätstensors über die Elastizitätsmatrix die Differenzen zwischen den Komponenten des Spannungsvektors, einmal über Formel (5) und einmal über Formel (14) berechnet, verschwinden.

```

> for i from 1 to 6 do
  gl(i) := SigmaV[i] - sum(EM[i, j] * EpsV[j], j=1..6);
od;

gl(1) := 0
gl(2) := 0
gl(3) := 0
gl(4) := 0
gl(5) := 0
gl(6) := 0

```

Durch die obigen Betrachtungen ist auch sofort klar, dass die Elastizitätsmatrix genau dann symmetrisch ist, wenn der Elastizitätstensor die dritte bisher nicht ausgenutzte Symmetrie $E_{ijrs} = E_{rsij}$ erfüllt.

- 2 Erzeugen des Gleichungssystems und Analyse der Kopplung

In diesem Abschnitt wollen wir das Scheiben- und Plattenproblem aufstellen und die Kopplung analysieren (vgl. Kapitel 6).

```
> restart;
```

Zunächst definieren wir das Elastizitätsgesetz für Monotropie in Matrixform (vgl. (45))

```

> ET2 := array(1..6, 1..6, [
  [E[11], E[12], E[13], E[14], 0, 0],
  [E[12], E[22], E[23], E[24], 0, 0],
  [E[13], E[23], E[33], E[34], 0, 0],
  [E[14], E[24], E[34], E[44], 0, 0],

```

```
[0,0,0,0,E[55],E[56]],
[0,0,0,0,E[56],E[66]]
]:
```

und übertragen dies auf den Elastizitätstensor vierter Stufe, damit Maple alle Symmetrien (6) berücksichtigen kann (vgl. A(1)).

```
> for i from 1 to 3 do
  for j from 1 to 3 do
    for k from 1 to 3 do
      for l from 1 to 3 do
        if (i=j) then
          r:=i;
        elif ((i=1 and j=2) or (i=2 and j=1)) then
          r:=4;
        elif ((i=2 and j=3) or (i=3 and j=2)) then
          r:=5;
        elif ((i=1 and j=3) or (i=3 and j=1)) then
          r:=6;
        fi;
        if (k=l) then
          ET4[i,j,k,l]:= ET2[r,k];
        elif ((k=1 and l=2) or (k=2 and l=1)) then
          ET4[i,j,k,l]:= ET2[r,4];
        elif ((k=2 and l=3) or (k=3 and l=2)) then
          ET4[i,j,k,l]:= ET2[r,5];
        elif ((k=1 and l=3) or (k=3 and l=1)) then
          ET4[i,j,k,l]:= ET2[r,6];
        fi;
      od;
    od;
  od;
od;
unassign('i','j','k','l','r');
```

Die "diffit"-Routine erlaubt das Differenzieren nach den x-Variablen anhand ihrer Tensorindizes (siehe Abschnitt: 1.6 Die dimensionslosen Koordinaten). Wir werden sie zur Implementation von Formel (41) benötigen.

```
> diffit:=proc(t,n)
  local out;
  if (n=1) then
    out:=diff(t,x);
  else if (n=2) then
    out:=diff(t,y);
  else if (n=3) then
    out:=diff(t,z);
  else
    ERROR("invalid input");
  fi;fi;fi;
```

```

    return out;
end proc:

```

Als nächstes implementieren wir, über drei Hilfsroutinen, Formel (41) für die zweite Approximationsordnung (Routine: "gls").

Die Bedingung ($l < 3$) in "help_sum1" eliminiert den zu vernachlässigenden c^6 Term für $l=k=3$ (vgl. S. 50 unten). Ansonsten ist die Implementierung möglichst nahe an der Formel (41) gehalten.

```

> help_sum1:=proc(i,l,k)
    local out,r,alpha,beta;
    out:=0;
    if (l=k) and (l<3) then
        for r from 1 to 3 do
            for alpha from 1 to 2 do
                for beta from 1 to 2 do

out:=out+ET4[i,beta,r,alpha]*diffit(diffit(u[r,k](x,y),alpha)
,beta);
                    od;
                    od;
                    od;
                    out:=c^(k+1)*out;
                fi;
            return out;
        end proc:
> help_sum2:=proc(i,l,k)
    local out,r;
    out:=0;
    if type(k+1,even) then
        for r from 1 to 3 do
            out:=out+ET4[i,3,r,3]*u[r,k](x,y);
        od;
        out:=-1/6*sqrt((2*k+1)*(2*l+1))*out*c^(k+1-2);
        if (k<=1) then
            out:=out*(k^2+k);
        else
            out:=out*(l^2+1);
        fi;
    fi;
    return out;
end proc:
> help_sum3:=proc(i,l,k)
    local out,r,alpha;
    out:=0;
    if type(k+1,odd) then
        if (k<=1) then
            for r from 1 to 3 do

```

```

        for alpha from 1 to 2 do
out:=out-ET4[i,3,r,alpha]*diffit(u[r,k](x,y),alpha);
        od;
        od;
    else
        for r from 1 to 3 do
        for alpha from 1 to 2 do

out:=out+ET4[i,alpha,r,3]*diffit(u[r,k](x,y),alpha);
        od;
        od;
        fi;
        out:=sqrt((2*k+1)*(2*l+1)/3)*c^(k+l-1)*out;
        fi;
        return out;
    end proc:
> gls:=proc(l,i)
    local out,k;
    out:=0;
    if type(i,integer[1..3]) and type(l,integer) and (l>=0)
then
        if (6-l>=0) then
            for k from 0 to 6-l do

out:=out+help_sum1(i,l,k)+help_sum2(i,l,k)+help_sum3(i,l,k);
            od;
            fi;
        else ERROR("invalid input");
        fi;
        return out;
    end proc:

```

Die folgende Routine "isplate" gibt "true" zurück, falls ein Indextupel (l,j) zum Plattenproblem gehört (vgl. Tabelle 2, die ersten zwei Spalten).

```

> isplate := proc(l,j)
    if ((l mod 2 = 0) and (j=3)) or ((l mod 2 = 1) and (j<>3))
then
        return true;
    else
        return false;
    fi;
end proc:

```

Damit können wir nun alle PDEs des Plattenproblems zweiter Ordnung aufstellen. Der folgende Aufruf erzeugt die linken Seiten von Tabelle 2. Würde man unten "isplate(l,i)" durch "not(isplate(l,i))" ersetzen, so würde man die linken Seiten der Tabelle 1 erhalten.

```

> for l from 0 to 5 do

```

```

for i from 1 to 3 do
  if isplate(1,i) then print(1,i,gl(1,i)); fi;
od;
od;

```

$$\begin{aligned}
& 0, 3, E_{66} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{56} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u_{3,0}(x, y) \right) + E_{55} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + E_{66} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{1,1}(x, y) \right) + E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{1,1}(x, y) \right) + E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{2,1}(x, y) \right) + E_{55} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{2,1}(x, y) \right) + \frac{1}{3} \\
& \sqrt{21} c^2 \\
& \left(E_{66} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{1,3}(x, y) \right) + E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{1,3}(x, y) \right) + E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{2,3}(x, y) \right) + E_{55} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{2,3}(x, y) \right) \right) + \frac{1}{3} \\
& \sqrt{33} c^4 \\
& \left(E_{66} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{1,5}(x, y) \right) + E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{1,5}(x, y) \right) + E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{2,5}(x, y) \right) + E_{55} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{2,5}(x, y) \right) \right) \\
& 1, 1, -E_{66} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{3,0}(x, y) \right) - E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{3,0}(x, y) \right) + c^2 \left(E_{11} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{1,1}(x, y) \right) \right. \\
& + 2 E_{14} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u_{1,1}(x, y) \right) + E_{44} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} u_{1,1}(x, y) \right) + E_{14} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{2,1}(x, y) \right) \\
& + E_{44} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u_{2,1}(x, y) \right) + E_{12} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u_{2,1}(x, y) \right) + E_{24} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} u_{2,1}(x, y) \right) \left. \right) - E_{66} u_{1,1}(x, y) \\
& - E_{56} u_{2,1}(x, y) + \sqrt{5} c^2 \left(E_{13} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{3,2}(x, y) \right) + E_{34} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{3,2}(x, y) \right) \right) \\
& - \frac{1}{3} \sqrt{21} (E_{66} u_{1,3}(x, y) + E_{56} u_{2,3}(x, y)) c^2 \\
& + 3 c^4 \left(E_{13} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{3,4}(x, y) \right) + E_{34} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{3,4}(x, y) \right) \right) \\
& - \frac{1}{3} \sqrt{33} (E_{66} u_{1,5}(x, y) + E_{56} u_{2,5}(x, y)) c^4 \\
& 1, 2, -E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{3,0}(x, y) \right) - E_{55} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{3,0}(x, y) \right) + c^2 \left(E_{14} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{1,1}(x, y) \right) \right. \\
& + E_{12} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u_{1,1}(x, y) \right) + E_{44} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u_{1,1}(x, y) \right) + E_{24} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} u_{1,1}(x, y) \right) \\
& + E_{44} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{2,1}(x, y) \right) + 2 E_{24} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u_{2,1}(x, y) \right) + E_{22} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} u_{2,1}(x, y) \right) \left. \right) - E_{56} u_{1,1}(x, y) \\
& - E_{55} u_{2,1}(x, y) + \sqrt{5} c^2 \left(E_{34} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{3,2}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{3,2}(x, y) \right) \right) \\
& - \frac{1}{3} \sqrt{21} (E_{56} u_{1,3}(x, y) + E_{55} u_{2,3}(x, y)) c^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3 c^4 \left(E_{34} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{3,4}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{3,4}(x, y) \right) \right) \\
& - \frac{1}{3} \sqrt{33} (E_{56} u_{1,5}(x, y) + E_{55} u_{2,5}(x, y)) c^4 \\
2, 3, & \sqrt{5} c^2 \\
& \left(-E_{13} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{1,1}(x, y) \right) - E_{34} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{1,1}(x, y) \right) - E_{34} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{2,1}(x, y) \right) - E_{23} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{2,1}(x, y) \right) \right) \\
& + c^4 \left(E_{66} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{3,2}(x, y) \right) + 2 E_{56} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u_{3,2}(x, y) \right) + E_{55} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} u_{3,2}(x, y) \right) \right) \\
& - 5 E_{33} u_{3,2}(x, y) c^2 + \frac{1}{3} \sqrt{105} c^4 \\
& \left(E_{66} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{1,3}(x, y) \right) + E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{1,3}(x, y) \right) + E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{2,3}(x, y) \right) + E_{55} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{2,3}(x, y) \right) \right) \\
& - 3 \sqrt{5} E_{33} u_{3,4}(x, y) c^4 \\
3, 1, & \frac{1}{3} \sqrt{21} c^2 \left(-E_{66} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{3,0}(x, y) \right) - E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{3,0}(x, y) \right) \right) \\
& - \frac{1}{3} \sqrt{21} (E_{66} u_{1,1}(x, y) + E_{56} u_{2,1}(x, y)) c^2 \\
& + \frac{1}{3} \sqrt{105} c^4 \left(-E_{66} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{3,2}(x, y) \right) - E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{3,2}(x, y) \right) \right) \\
& - 14 (E_{66} u_{1,3}(x, y) + E_{56} u_{2,3}(x, y)) c^4 \\
3, 2, & \frac{1}{3} \sqrt{21} c^2 \left(-E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{3,0}(x, y) \right) - E_{55} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{3,0}(x, y) \right) \right) \\
& - \frac{1}{3} \sqrt{21} (E_{56} u_{1,1}(x, y) + E_{55} u_{2,1}(x, y)) c^2 \\
& + \frac{1}{3} \sqrt{105} c^4 \left(-E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{3,2}(x, y) \right) - E_{55} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{3,2}(x, y) \right) \right) \\
& - 14 (E_{56} u_{1,3}(x, y) + E_{55} u_{2,3}(x, y)) c^4 \\
4, 3, & 3 c^4 \\
& \left(-E_{13} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{1,1}(x, y) \right) - E_{34} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{1,1}(x, y) \right) - E_{34} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{2,1}(x, y) \right) - E_{23} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{2,1}(x, y) \right) \right) \\
& - 3 \sqrt{5} E_{33} u_{3,2}(x, y) c^4 \\
5, 1, & \frac{1}{3} \sqrt{33} c^4 \left(-E_{66} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{3,0}(x, y) \right) - E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{3,0}(x, y) \right) \right) \\
& - \frac{1}{3} \sqrt{33} (E_{66} u_{1,1}(x, y) + E_{56} u_{2,1}(x, y)) c^4
\end{aligned}$$

Mathematik.) Wir schreiben deshalb eine Routine "mysolve", die "solve" anwendet und die Ergebnisse nach den Variablen sortiert und als Liste ausgibt (Symbol in Maple: [...]).
 Beispiel: Sei "GLS" eine Menge von zwei Gleichungen in den Variablen "x_1" und "x_2".
 Nach dem Aufruf von "Lösung:=mysolve(GLS, [x_1, x_2])", ist dann "Lösung[1]" von der Form "x_1=...". Dagegen könnte nach dem Aufruf "Lösung:=solve(GLS, {x_1, x_2})", "Lösung[1]" von der Form "x_1=..." oder "x_2=..." sein.

```
> mysolve := proc (eqns, vars)
  local sols_order, sols, i, j;
  if not (type (vars, list)) then ERROR ("2nd argument must be a list");
  else
    sols:=solve (eqns, convert (vars, set));
    sols_order:=vars;
    for j from 1 to nops (vars) do
      i:=1;
      while op (1, sols [i]) - vars [j] <> 0 do i:=i+1 od;
      sols_order [j] := sols [i];
    od;
    return sols_order;
  fi;
end proc;
```

Damit Maple nicht Potenzen von c wegekürzen kann, führen wir neue Variablen ein; zum Beispiel $c^4 \cdot u[3,0](x,y) \rightarrow c4u[3,0](x,y)$ usw. Dazu implementieren wir die Routine "cvar". Die Implementierung mag auf den ersten Blick unnötig kompliziert erscheinen. Der Grund für die Implementierung in dieser Form ist der Folgende: Wenn man in einem Term einen Operanden mittels "subsop" durch einen anderen ersetzt, so hat dieser im geänderten Term im Allgemeinen nicht dieselbe Operandennummer, wie der Ursprungsoperand im nicht geänderten Term. (Trügerischerweise scheinen die Operandennummern aber bei hinreichend wenigen Summanden überein zu stimmen.) Somit ist es nur schwer möglich, die Operanden iterativ abzarbeiten. Deshalb multipliziert "cvar" selbst nur den Input-Term aus ("expand") und gibt ihn summandenweise zum Substituieren an "cvarhelper" weiter. Diese Routine bestimmt zunächst alle nötigen Operandennummern und führt dann die zwei notwendigen Substitutionen auf einmal aus. Konkret wird die Potenz von c mit 1 substituiert (Wir wissen ja, dass wir uns in einem Produkt befinden) und u wird durch die entsprechende Variable ersetzt. Das Vorgehen funktioniert auch in Verbindung mit partiellen Ableitungen von u.

```
> with (StringTools) :
Warning, the assigned name Group now has a global binding

> cvarhelper:=proc (t)
  local i, cind, uind, cpow, tem;
  cind:=0;
  cpow:=0;
  uind:=0;
  tem:=t;
  if not (hastype ( t, `*` )) then
    ERROR ("no multiplikation");
  else
```

```

    for i from 1 to nops(t) do
        if has(op(i,t),c) then
            if (cind=0) then cind:=i else ERROR("several c's
found") fi;fi;
            if has(op(i,t),u) then
                if (uind=0) then uind:=i else ERROR("several u's
found") fi;fi;
            od;
            #print(convert(op(i,t),'string'));
            #printf("cind=%g uind=%g\n",cind,uind);
            if ((cind<>0)and(uind<>0)) then
                if (op(0,op(cind,t))=`^`) then
                    cpow:=op(2,op(cind,t));

tem:=subsop(uind=parse(SubstituteAll(convert(op(uind,t),'stri
ng'),'u",sprintf("c%gu",cpow))),cind=1,t);
                else
                    ERROR("found c without power");
                fi;
                #print(cpow);
            else
                ERROR("no c or u found")
            fi;
        fi;
    return tem;
end proc:
> cvar:=proc(t)
    local i,temin,temout,sub,test;
    temin:=expand(t);
    i:=1;
    if (op(0,temin)<>`+`) then
        if (op(0,temin)=`*`)and(has(temin,c)) then
temout:=cvarhelper(temin) fi;
        else
            temout:=0;
            for i from 1 to nops(temin) do
                if (op(0,op(i,temin))=`*`)and(has(op(i,temin),c))
then
                    temout:=temout+cvarhelper(op(i,temin));
                else
                    temout:=temout+op(i,temin);
                    #test:=convert(op(i,temin),'string');
                    #printf("%g: Cvar no c: %s\n",i,test);
                fi;
            od;
        fi;
    end proc:

```

```

    return temout;
end proc:

```

Beispiel:

```

> cvar(gls(5,2));

```

$$\begin{aligned}
 &-\frac{1}{3}\sqrt{33} E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial x} c4u_{3,0}(x,y) \right) - \frac{1}{3}\sqrt{33} E_{55} \left(\frac{\partial}{\partial y} c4u_{3,0}(x,y) \right) - \frac{1}{3}\sqrt{33} E_{56} c4u_{1,1}(x,y) \\
 &-\frac{1}{3}\sqrt{33} E_{55} c4u_{2,1}(x,y)
 \end{aligned}$$

Weiter benötigen wir eine Möglichkeit, die c-Variablen wieder durch die ursprünglichen Variablen zu ersetzen (Routine "invcvar"). Dies gelingt durch eine einfache algebraische Substitution für die Maple die Routine "algsubs" mitbringt.

```

> invcvar:= proc(t)
    local t2,k,i,p;
    t2:=t;
    for p from 2 to 4 by 2 do
        for k from 0 to 5 do
            for i from 1 to 3 do

t2:=algsubs(c||p||u[i,k](x,y)=c^p*u[i,k](x,y),t2);
            od;
        od;
    od;
    return t2;
end proc:

```

Beispiel:

Dies ist die ausmultiplizierte Gleichung (41) zweiter Ordnung für (l,i)=(5,2):

```

> expand(gls(5,2));

```

$$\begin{aligned}
 &-\frac{1}{3}\sqrt{33} c^4 E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{3,0}(x,y) \right) - \frac{1}{3}\sqrt{33} c^4 E_{55} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{3,0}(x,y) \right) - \frac{1}{3}\sqrt{33} c^4 E_{56} u_{1,1}(x,y) \\
 &-\frac{1}{3}\sqrt{33} c^4 E_{55} u_{2,1}(x,y)
 \end{aligned}$$

"cvar" macht daraus:

```

> cvar(gls(5,2));

```

$$\begin{aligned}
 &-\frac{1}{3}\sqrt{33} E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial x} c4u_{3,0}(x,y) \right) - \frac{1}{3}\sqrt{33} E_{55} \left(\frac{\partial}{\partial y} c4u_{3,0}(x,y) \right) - \frac{1}{3}\sqrt{33} E_{56} c4u_{1,1}(x,y) \\
 &-\frac{1}{3}\sqrt{33} E_{55} c4u_{2,1}(x,y)
 \end{aligned}$$

Wenden wir erst "cvar" und dann wieder "invcvar" an, erhalten wir wieder die Ursprungsgleichung:

```

> invcvar(cvar(gls(5,2)));

```

$$\begin{aligned}
 &-\frac{1}{3}\sqrt{33} c^4 E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{3,0}(x,y) \right) - \frac{1}{3}\sqrt{33} c^4 E_{55} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{3,0}(x,y) \right) - \frac{1}{3}\sqrt{33} c^4 E_{56} u_{1,1}(x,y)
 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{3}\sqrt{33} c^4 E_{55} u_{2,1}(x, y)$$

Wir benötigen noch eine Möglichkeit, Potenzsummen in c abzubrechen (Routine "truncate"). Dies lässt sich einfach dadurch erreichen, dass wir uns für den Inputterm die Koeffizienten vor einem "c^n" ausgeben lassen und diese dann wieder bis zur Abbruchpotenz "N" aufaddieren.

```
> truncate := proc(t, N)
    return sum(coeff(t, c, n) * c^n, n=0..N);
end proc;
```

Und da es im Folgenden oft ein wenig unübersichtlich sein wird, stellen wir noch die Routine "colsum" bereit, welche in einem Term "t" alle Summanden sammelt, die einen bestimmten Faktor "u" enthalten. Implementiert wird dies im wesentlichen wieder über die Maple Routine "has".

```
> colsum:= proc(t, u)
    local t2, out, i;
    t2:=expand(t);
    out:=0;
    if not(type(t2, `+`)) then
        ERROR("1st argument is not a sum");
    else
        for i from 1 to nops(t2) do
            if has(op(i, t2), u) then out:=out+op(i, t2) fi;
        od;
    fi;
    return simplify(out);
end proc;
```

Auch hierzu ein Beispiel. In Gleichung (41) zweiter Approximationsordnung für (l,i)=(5,2) lassen wir alle Summanden ausgeben die den Faktor "E[55]" enthalten.

```
> colsum(gls(5, 2), E[55]);
```

$$-\frac{1}{3}\sqrt{33} c^4 E_{55} \left(\left(\frac{\partial}{\partial y} u_{3,0}(x, y) \right) + u_{2,1}(x, y) \right)$$

Das funktioniert auch mit Funktionen wie "u[3,0](x,y)". Alle partiellen Ableitungen von "u[3,0](x,y)" werden dann mit "eingesammelt".

```
> colsum(gls(5, 2), u[3, 0]);
```

$$-\frac{1}{3}\sqrt{33} c^4 \left(E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{3,0}(x, y) \right) + E_{55} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{3,0}(x, y) \right) \right)$$

Nun können wir mit der eigentlichen Reduktion beginnen. Das Vorgehen wird im Detail im Kapitel 7 der Diplomarbeit ab Seite 56 beschrieben. Wir geben deshalb hier immer nur die Gleichungen der Tabelle 3 an, die bearbeitet werden, und die Gleichung der Diplomarbeit die jeweils hergeleitet wird.

Gleichung (5,1) und (5,2): (vgl. (47))

```
> sols:=mysolve({cvar(gls(5, 1))=0, cvar(gls(5, 2))=0}, [c4u[1, 1](x, y), c4u[2, 1](x, y)]);
```

$$sols := \left[c4u_{1,1}(x, y) = -\left(\frac{\partial}{\partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right), c4u_{2,1}(x, y) = -\left(\frac{\partial}{\partial y} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right]$$

```
> su_c4u_2_1:=sols[2];
```

$$su_c4u_2_1 := c4u_{2,1}(x, y) = -\left(\frac{\partial}{\partial y} c4u_{3,0}(x, y)\right)$$

> **su_c4u_1_1:=sols[1];**

$$su_c4u_1_1 := c4u_{1,1}(x, y) = -\left(\frac{\partial}{\partial x} c4u_{3,0}(x, y)\right)$$

Gleichung (4,3): (vgl. (48))

> **gl43:=subs(su_c4u_2_1, su_c4u_1_1, cvar(gls(4,3)));**

$$gl43 := -3 E_{13} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(-\left(\frac{\partial}{\partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) \right) - 3 E_{34} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(-\left(\frac{\partial}{\partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) \right) \\ - 3 E_{34} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(-\left(\frac{\partial}{\partial y} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) \right) - 3 E_{23} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(-\left(\frac{\partial}{\partial y} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) \right) \\ - 3 \sqrt{5} E_{33} c4u_{3,2}(x, y)$$

> **su_c4u_3_2:=solve({gl43}, {c4u[3,2](x,y)})[1];**

$$su_c4u_3_2 := c4u_{3,2}(x, y) =$$

$$\frac{1}{5} \frac{\left(E_{13} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{34} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) \sqrt{5}}{E_{33}}$$

Gleichung (3,1), (3,2) und $c^2(1,1), c^2(1,2)$:

In der Diplomarbeit zeigen wir, dass man dieses System lösen kann, über mehrere Teilschritte. Bei diesem Prozess sieht man besser, dass nur erlaubte Umformungsschritte benutzt werden. (Maple berücksichtigt natürlich nicht, dass die Determinante einer auftretenden Matrix evtl. Null sein könnte. Wenn eine Matrix nur aus Symbolen besteht kann sie ja immer formal invertiert werden. Ebenso teilt Maple durch jedes Symbol, obwohl es evtl. identisch Null sein könnte.) Hier lassen wir Maple gleich das gesamte System lösen. Die Ergebnisse stimmen natürlich überein. (vgl. (53) bis (56))

> **gl31:=simplify(cvar(gls(3,1)/(-1/3*3^(1/2)*7^(1/2)));**

$$gl31 := E_{66} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2u_{3,0}(x, y) \right) + E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2u_{3,0}(x, y) \right) + E_{66} c2u_{1,1}(x, y) + E_{56} c2u_{2,1}(x, y) \\ + \sqrt{5} E_{66} \left(\frac{\partial}{\partial x} c4u_{3,2}(x, y) \right) + \sqrt{5} E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial y} c4u_{3,2}(x, y) \right) + 2 \sqrt{3} \sqrt{7} E_{66} c4u_{1,3}(x, y) \\ + 2 \sqrt{3} \sqrt{7} E_{56} c4u_{2,3}(x, y)$$

> **gl32:=simplify(cvar(gls(3,2)/(-1/3*3^(1/2)*7^(1/2)));**

$$gl32 := E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2u_{3,0}(x, y) \right) + E_{55} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2u_{3,0}(x, y) \right) + E_{56} c2u_{1,1}(x, y) + E_{55} c2u_{2,1}(x, y) \\ + \sqrt{5} E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial x} c4u_{3,2}(x, y) \right) + \sqrt{5} E_{55} \left(\frac{\partial}{\partial y} c4u_{3,2}(x, y) \right) + 2 \sqrt{3} \sqrt{7} E_{56} c4u_{1,3}(x, y) \\ + 2 \sqrt{3} \sqrt{7} E_{55} c4u_{2,3}(x, y)$$

> **glc2_11:=cvar(truncate(c^2*gl3(1,1),4));**

$$glc2_11 := -E_{66} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2u_{3,0}(x, y) \right) - E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2u_{3,0}(x, y) \right) - E_{66} c2u_{1,1}(x, y)$$

$$\begin{aligned}
& -E_{56} c2u_{2,1}(x, y) + E_{11} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c4u_{1,1}(x, y) \right) + 2 E_{14} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4u_{1,1}(x, y) \right) \\
& + E_{44} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c4u_{1,1}(x, y) \right) + E_{14} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c4u_{2,1}(x, y) \right) + E_{44} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4u_{2,1}(x, y) \right) \\
& + E_{12} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4u_{2,1}(x, y) \right) + E_{24} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c4u_{2,1}(x, y) \right) + \sqrt{5} E_{13} \left(\frac{\partial}{\partial x} c4u_{3,2}(x, y) \right) \\
& + \sqrt{5} E_{34} \left(\frac{\partial}{\partial y} c4u_{3,2}(x, y) \right) - \frac{1}{3} \sqrt{21} E_{66} c4u_{1,3}(x, y) - \frac{1}{3} \sqrt{21} E_{56} c4u_{2,3}(x, y)
\end{aligned}$$

> **glc2_12 := cvar (truncate (c^2*glc (1, 2), 4));**

$$\begin{aligned}
glc2_12 := & -E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2u_{3,0}(x, y) \right) - E_{55} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2u_{3,0}(x, y) \right) - E_{56} c2u_{1,1}(x, y) \\
& - E_{55} c2u_{2,1}(x, y) + E_{14} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c4u_{1,1}(x, y) \right) + E_{12} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4u_{1,1}(x, y) \right) \\
& + E_{44} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4u_{1,1}(x, y) \right) + E_{24} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c4u_{1,1}(x, y) \right) + E_{44} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c4u_{2,1}(x, y) \right) \\
& + 2 E_{24} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4u_{2,1}(x, y) \right) + E_{22} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c4u_{2,1}(x, y) \right) + \sqrt{5} E_{34} \left(\frac{\partial}{\partial x} c4u_{3,2}(x, y) \right) \\
& + \sqrt{5} E_{23} \left(\frac{\partial}{\partial y} c4u_{3,2}(x, y) \right) - \frac{1}{3} \sqrt{21} E_{56} c4u_{1,3}(x, y) - \frac{1}{3} \sqrt{21} E_{55} c4u_{2,3}(x, y)
\end{aligned}$$

> **sols := mysolve (subs (su_c4u_1_1, su_c4u_2_1, su_c4u_3_2, {gl31=0, gl32=0, glc2_12=0, glc2_11=0}), [c2u[1,1](x,y), c2u[2,1](x,y), c4u[1,3](x,y), c4u[2,3](x,y)]) :**

> **su_c2u_1_1 := sols [1];**

$$\begin{aligned}
su_c2u_1_1 := & c2u_{1,1}(x, y) = \left(-6 E_{55} E_{66} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2u_{3,0}(x, y) \right) \sqrt{3} \sqrt{7} + E_{66} \right. \\
& \left. \left(E_{13} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{34} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) E_{55} \sqrt{21} \right. \\
& \left. / E_{33} + E_{55} E_{66} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2u_{3,0}(x, y) \right) \sqrt{21} - 12 E_{44} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{55} \sqrt{3} \sqrt{7} + 6 E_{13} \right. \\
& \left. \left(E_{13} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{34} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) E_{55} \sqrt{3} \right. \\
& \left. \sqrt{7} / E_{33} - 18 E_{14} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{55} \sqrt{3} \sqrt{7} \right. \\
& \left. - 6 E_{24} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{55} \sqrt{3} \sqrt{7} - 6 E_{11} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{55} \sqrt{3} \sqrt{7} + 6 E_{34} \right. \\
& \left. \left(E_{13} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{34} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) E_{55} \sqrt{3} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{7} / E_{33} - 6 E_{12} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{55} \sqrt{3} \sqrt{7} - \left(\frac{\partial}{\partial x} c2u_{3,0}(x, y) \right) \sqrt{21} E_{56}^2 \\
& + 6 E_{56} E_{22} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \sqrt{3} \sqrt{7} - 6 E_{56} E_{23} \\
& \left(E_{13} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{34} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) \sqrt{3} \sqrt{7} \\
& / E_{33} - 6 E_{56} E_{34} \\
& \left(E_{13} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{34} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) \sqrt{3} \sqrt{7} \\
& / E_{33} + 18 E_{56} E_{24} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \sqrt{3} \sqrt{7} \\
& + 12 E_{56} E_{44} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \sqrt{3} \sqrt{7} + 6 E_{56} E_{14} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \sqrt{3} \sqrt{7} \\
& + 6 E_{56} E_{12} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \sqrt{3} \sqrt{7} - E_{56}^2 \\
& \left(E_{13} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{34} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) \sqrt{21} / \\
& E_{33} + 6 \left(\frac{\partial}{\partial x} c2u_{3,0}(x, y) \right) \sqrt{3} \sqrt{7} E_{56}^2 / (\\
& -\sqrt{21} E_{55} E_{66} + 6 \sqrt{3} \sqrt{7} E_{55} E_{66} - 6 E_{56}^2 \sqrt{3} \sqrt{7} + E_{56}^2 \sqrt{21})
\end{aligned}$$

> **su_c2u_2_1:=sols[2];**

$$\begin{aligned}
su_c2u_2_1 := c2u_{2,1}(x, y) = & - \left(\left(\frac{\partial}{\partial y} c2u_{3,0}(x, y) \right) E_{56}^2 \sqrt{21} + \right. \\
& \left(E_{13} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{34} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) E_{56}^2 \\
& \sqrt{21} / E_{33} + 6 E_{56} E_{34} \\
& \left(E_{13} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{34} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) \sqrt{3} \sqrt{7} \\
& / E_{33} - 12 E_{56} E_{44} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \sqrt{3} \sqrt{7} \\
& - 18 E_{56} E_{14} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \sqrt{3} \sqrt{7} + 6 E_{56} E_{13} \\
& \left(E_{13} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{34} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) \sqrt{3} \sqrt{7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& / E_{33} - 6 E_{56} E_{12} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \sqrt{3} \sqrt{7} - 6 E_{56} E_{11} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \sqrt{3} \sqrt{7} \\
& + 6 E_{14} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \sqrt{3} \sqrt{7} E_{66} + 6 E_{12} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \sqrt{3} \sqrt{7} E_{66} \\
& + 12 E_{44} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \sqrt{3} \sqrt{7} E_{66} + 18 E_{24} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \sqrt{3} \sqrt{7} E_{66} \\
& + 6 E_{22} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \sqrt{3} \sqrt{7} E_{66} - 6 E_{23} \\
& \left(E_{13} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{34} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) \sqrt{3} \sqrt{7} \\
& E_{66} / E_{33} - 6 E_{34} \\
& \left(E_{13} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{34} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) \sqrt{3} \sqrt{7} \\
& E_{66} / E_{33} - E_{55} \\
& \left(E_{13} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{34} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) \sqrt{21} E_{66} \\
& / E_{33} - 6 E_{56} E_{24} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \sqrt{3} \sqrt{7} - \left(\frac{\partial}{\partial y} c2u_{3,0}(x, y) \right) \sqrt{21} E_{55} E_{66} \\
& - 6 \left(\frac{\partial}{\partial y} c2u_{3,0}(x, y) \right) E_{56}^2 \sqrt{3} \sqrt{7} + 6 \left(\frac{\partial}{\partial y} c2u_{3,0}(x, y) \right) \sqrt{3} \sqrt{7} E_{55} E_{66} / (\\
& (6 \sqrt{3} \sqrt{7} - \sqrt{21}) (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}))
\end{aligned}$$

> **su_c4u_1_3:=sols[3];**

$$\begin{aligned}
su_c4u_1_3 := c4u_{1,3}(x, y) = & -3 \left(-E_{11} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{55} \right. \\
& - 2 E_{44} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{55} - 3 E_{14} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{55} + \\
& \left. E_{66} \left(E_{13} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{34} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) E_{55} \right) \\
& \frac{E_{33}}{E_{33}} \\
& + \\
& \frac{E_{13} \left(E_{13} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{34} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) E_{55}}{E_{33}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - E_{12} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{55} \\
& \frac{E_{56}^2 \left(E_{13} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{34} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right)}{E_{33}} \\
& + E_{56} E_{14} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{56} E_{12} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + 2 E_{56} E_{44} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 3 E_{56} E_{24} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + E_{56} E_{22} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) - \\
& \frac{E_{56} E_{23} \left(E_{13} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{34} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right)}{E_{33}} \\
& - \\
& \frac{E_{56} E_{34} \left(E_{13} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{34} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right)}{E_{33}} \\
& - E_{24} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{55} + \\
& \frac{E_{34} \left(E_{13} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{34} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) E_{55}}{E_{33}} \\
& \left. \right) / (-\sqrt{21} E_{55} E_{66} + 6 \sqrt{3} \sqrt{7} E_{55} E_{66} - 6 E_{56}^2 \sqrt{3} \sqrt{7} + E_{56}^2 \sqrt{21})
\end{aligned}$$

> **su_c4u_2_3:=sols[4];**

$$\text{su_c4u_2_3} := c4u_{2,3}(x, y) = 3 \left(\frac{E_{56}^2 \left(E_{13} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{34} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right)}{E_{33}} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& \frac{E_{56} E_{34} \left(E_{13} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{34} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right)}{E_{33}} \\
& + \\
& \frac{E_{56} E_{13} \left(E_{13} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{34} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right)}{E_{33}} \\
& - E_{56} E_{24} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) - E_{56} E_{11} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) - 2 E_{56} E_{44} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - 3 E_{56} E_{14} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) - E_{56} E_{12} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + E_{14} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{66} + E_{12} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{66} \\
& + 2 E_{44} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{66} + 3 E_{24} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{66} \\
& + E_{22} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{66} - \\
& \frac{E_{23} \left(E_{13} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{34} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) E_{66}}{E_{33}} \\
& - \\
& \frac{E_{34} \left(E_{13} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{34} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) E_{66}}{E_{33}} \\
& - \\
& \frac{E_{55} \left(E_{13} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{34} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) E_{66}}{E_{33}} \\
& \left. \right) / ((6\sqrt{3}\sqrt{7} - \sqrt{21})(-E_{56}^2 + E_{55}E_{66}))
\end{aligned}$$

[Gleichung (2,3): (vgl. (57))

[> **tt:=subs(su_c4u_3_2,su_c4u_1_3,su_c4u_2_3,su_c2u_1_1,su_c2u_2_1,cvar(gls(2,3))):**

[Hier substituieren wir zunächst $\text{sqrt}(5)*c2u[3,2](x,y)+3*c4u[3,4](x,y)$ durch die Variable "vari", nach der wir dann auflösen können.

> **tt2:=algsubs(sqrt(5)*c2u[3,2](x,y)+3*c4u[3,4](x,y)=vari,tt):**

Ein kleiner Test: Der Vorfaktor von "vari" ist dann "-sqrt(5)*E[33]". Dies stimmt offenbar mit Tabelle 3 überein.

> **colsum(tt2,vari);**

$$-\sqrt{5} E_{33} \text{vari}$$

Die rechten Seite der Tabelle 3 fassen wir der Übersichtlichkeit halber jeweils zu einem Symbol zusammen ("c2RS_32" anstatt "-a*c^2*P_3^2/h").

> **su_gl23:=sqrt(5)*c2u[3,2](x,y)+3*c4u[3,4](x,y)=solve(tt2=c2RS_32(x,y),vari);**

$$\begin{aligned} su_gl23 := & \sqrt{5} c2u_{3,2}(x, y) + 3 c4u_{3,4}(x, y) = - \left(5 c2RS_32(x, y) E_{33} \sqrt{21} E_{55} E_{66} \right. \\ & - 30 c2RS_32(x, y) E_{33} \sqrt{3} \sqrt{7} E_{55} E_{66} + 30 c2RS_32(x, y) E_{33} E_{56}^2 \sqrt{3} \sqrt{7} \\ & + 12 E_{55} E_{66} \sqrt{7} \sqrt{3} E_{56} \sqrt{5} E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) - 5 c2RS_32(x, y) E_{33} E_{56}^2 \sqrt{21} \\ & - 10 E_{55} E_{66} \sqrt{105} E_{56} E_{13} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\ & + 20 \sqrt{105} E_{56}^3 E_{34} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 10 \sqrt{105} E_{56}^3 E_{13} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\ & + 5 \sqrt{105} E_{23}^2 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{56}^2 + 10 \sqrt{105} E_{56}^3 E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\ & + 20 \sqrt{105} E_{34}^2 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{56}^2 + 5 \sqrt{105} E_{13}^2 \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{56}^2 \\ & - 20 E_{55} E_{66} \sqrt{5} E_{34}^2 \sqrt{21} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\ & + 6 E_{55} E_{66}^2 \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{13} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\ & - 5 E_{55} E_{66} \sqrt{5} E_{13}^2 \sqrt{21} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) - 5 E_{55} E_{66} \sqrt{5} E_{23}^2 \sqrt{21} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\ & + 30 E_{55} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{13} E_{11} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\ & + 6 E_{55} E_{66}^2 \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\ & + 60 E_{55} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{13} E_{44} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\ & \left. - 120 E_{55} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{13}^2 E_{34} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 20 E_{55} E_{66} \sqrt{105} E_{34} E_{13} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - 20 E_{55} E_{66} \sqrt{105} E_{23} E_{34} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + 20 E_{55} E_{66} \sqrt{105} E_{24} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& + 5 E_{55} E_{66} \sqrt{105} E_{11} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& - 20 E_{55} E_{66} \sqrt{105} E_{56} E_{34} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - 10 E_{55} E_{66} \sqrt{105} E_{56} E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + 20 E_{55} E_{66} \sqrt{105} E_{44} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& - 20 E_{55} E_{66} \sqrt{5} E_{13} \sqrt{21} E_{34} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - 10 E_{55} E_{66} \sqrt{5} E_{34} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c2u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \sqrt{21} \\
& - 20 \sqrt{105} E_{14} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} E_{56}^2 \\
& - 120 \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{34} E_{56} E_{14} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& - 60 \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{23} E_{56} E_{44} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& - 90 \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{23} E_{56} E_{14} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& - 60 \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{34} E_{56} E_{12} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& + 180 \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{34}^2 E_{56} E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + 2 E_{56}^3 \sqrt{5} \sqrt{21} E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{66} \sqrt{5} E_{56}^2 \sqrt{21} E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - 30 E_{66} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{23}^3 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x, y) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 60 E_{66} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{34}^3 \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - 30 E_{66} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{34}^2 E_{13} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + E_{66} \sqrt{5} E_{56}^2 \sqrt{21} E_{13} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{66} \sqrt{5} E_{56}^2 \sqrt{21} E_{34} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - 30 \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{34} E_{56} E_{11} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& - 30 \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{23} E_{56} E_{12} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& + 12 E_{55} E_{66} \sqrt{7} \sqrt{3} E_{56} \sqrt{5} E_{13} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + 24 E_{55} E_{66} \sqrt{7} \sqrt{3} E_{56} \sqrt{5} E_{34} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - 30 \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{23} E_{56} E_{11} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& - 30 \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{34} E_{56} E_{22} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& + 4 E_{56}^3 \sqrt{5} \sqrt{21} E_{34} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 5 E_{55} \sqrt{105} E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{56}^2 \\
& + 10 E_{55} \sqrt{105} E_{34} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{56}^2 \\
& + 10 \sqrt{105} E_{23} E_{13} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{56}^2 - 5 \sqrt{105} E_{22} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} E_{56}^2 \\
& + 90 E_{66} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{23} E_{24} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& + 30 E_{66} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{34} E_{22} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& - 20 \sqrt{105} E_{24} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} E_{56}^2 - 5 E_{55} E_{66}^2 \sqrt{105} E_{13} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - 5 E_{55} E_{66} \sqrt{105} E_{23}^2 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) - 5 E_{55} E_{66}^2 \sqrt{105} E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + 30 E_{66} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{34} E_{14} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 30 E_{66} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{34} E_{12} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& - 10 E_{55} E_{66}^2 \sqrt{105} E_{34} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + 60 E_{66} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{23} E_{44} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& + 60 E_{66} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{34} E_{44} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& - 5 E_{55} E_{66} \sqrt{105} E_{13}^2 \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + 30 E_{66} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{23} E_{12} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& - 60 E_{66} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{34} E_{23} E_{13} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - 30 E_{66} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{23}^2 E_{13} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + 90 E_{66} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{34} E_{24} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& - 10 E_{55} E_{66} \sqrt{105} E_{23} E_{13} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + 30 E_{55} E_{66} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{13} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c2u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& + 5 \sqrt{5} E_{13}^2 E_{56}^2 \sqrt{21} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) - 10 \sqrt{105} E_{12} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} E_{56}^2 \\
& + 20 \sqrt{5} E_{34}^2 E_{56}^2 \sqrt{21} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - 5 E_{55} E_{66} \sqrt{5} E_{13} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c2u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \sqrt{21} \\
& - 20 E_{55} E_{66} \sqrt{5} E_{34} \sqrt{21} E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - 12 \sqrt{7} \sqrt{3} E_{56}^3 \sqrt{5} E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - 20 E_{55} E_{66} \sqrt{105} E_{34}^2 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 60 E_{55} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{34}^3 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) - E_{55} E_{66}^2 \sqrt{5} \sqrt{21} E_{13} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + 5 \sqrt{5} E_{13} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c2u_{3,0}(x, y) \right) \sqrt{21} E_{56}^2 E_{33} \\
& + 10 \sqrt{5} E_{13} E_{56}^2 \sqrt{21} E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + 20 \sqrt{5} E_{13} E_{56}^2 \sqrt{21} E_{34} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - 24 \sqrt{7} \sqrt{3} E_{56}^3 \sqrt{5} E_{34} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - 2 E_{55} E_{66}^2 \sqrt{5} \sqrt{21} E_{34} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - E_{55} E_{66}^2 \sqrt{5} \sqrt{21} E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - 60 \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{13} E_{56} E_{44} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& + 180 \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{13} E_{56} E_{34}^2 \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - 30 \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{23} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c2u_{3,0}(x, y) \right) E_{56}^2 E_{33} \\
& + 240 \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{13} E_{56} E_{23} E_{34} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + 120 \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{34}^3 E_{56} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - 12 \sqrt{7} \sqrt{3} E_{56}^3 \sqrt{5} E_{13} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + 60 \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{34} E_{56} E_{23}^2 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + 10 \sqrt{5} E_{34} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c2u_{3,0}(x, y) \right) \sqrt{21} E_{56}^2 E_{33} \\
& + 20 \sqrt{5} E_{34} E_{56}^2 \sqrt{21} E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + 5 \sqrt{5} E_{23} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c2u_{3,0}(x, y) \right) E_{56}^2 E_{33} \sqrt{21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 60 \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{34} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c2u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} E_{56}^2 \\
& + 60 \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{13} E_{56} E_{23}^2 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + 5 E_{66} \sqrt{105} E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{56}^2 \\
& + 60 \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{13}^2 E_{56} E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - 30 \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{13} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c2u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} E_{56}^2 \\
& + 10 E_{66} \sqrt{105} E_{34} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{56}^2 \\
& - 120 \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{34} E_{56} E_{24} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& - 30 \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{23} E_{56} E_{24} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& + 60 \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{13}^2 E_{56} E_{34} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - 30 \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{13} E_{56} E_{12} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& - 30 \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{13} E_{56} E_{22} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& + 5 E_{66} \sqrt{105} E_{13} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{56}^2 \\
& - 90 \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{13} E_{56} E_{24} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& - 30 \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{13} E_{56} E_{14} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& + 20 \sqrt{105} E_{23} E_{34} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{56}^2 \\
& - 120 \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{34} E_{56} E_{44} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& + 30 E_{66} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{23} E_{22} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -150 E_{66} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{34}^2 E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& -6 E_{66} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{13} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{56}^2 \\
& -12 E_{66} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{34} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{56}^2 \\
& -10 E_{55}^2 E_{66} \sqrt{105} E_{34} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& +30 E_{66} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{23} E_{14} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& -120 E_{66} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{34} E_{23}^2 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& -6 E_{66} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{56}^2 \\
& +12 E_{55}^2 E_{66} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{34} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& -5 E_{55}^2 E_{66} \sqrt{105} E_{13} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& -6 E_{55} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{13} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{56}^2 \\
& +12 E_{55} E_{66}^2 \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{34} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& +5 E_{55} \sqrt{105} E_{13} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{56}^2 - E_{55}^2 E_{66} \sqrt{5} \sqrt{21} E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& -2 E_{55}^2 E_{66} \sqrt{5} \sqrt{21} E_{34} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& -E_{55}^2 E_{66} \sqrt{5} \sqrt{21} E_{13} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& +6 E_{55}^2 E_{66} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& +6 E_{55}^2 E_{66} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{13} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& -5 E_{55}^2 E_{66} \sqrt{105} E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x, y) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 10 E_{55} E_{66} \sqrt{5} E_{13} \sqrt{21} E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + 5 E_{55} E_{66} \sqrt{105} E_{22} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& + E_{55} \sqrt{5} E_{56}^2 \sqrt{21} E_{13} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + 30 E_{55} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{13} E_{12} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& + 30 E_{55} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{34} E_{24} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& + E_{55} \sqrt{5} E_{56}^2 \sqrt{21} E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - 150 E_{55} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{13} E_{34}^2 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + 30 E_{55} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{34} E_{11} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& + 60 E_{55} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{34} E_{44} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& + 30 E_{55} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{34} E_{12} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& - 30 E_{55} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{13}^2 E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - 6 E_{55} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{56}^2 \\
& - 60 E_{55} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{13} E_{34} E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + 30 E_{55} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{13} E_{24} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& - 12 E_{55} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{34} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{56}^2 \\
& - 30 E_{55} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{34}^2 E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + 90 E_{55} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{13} E_{14} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 90 E_{55} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{34} E_{14} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& - 30 E_{55} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{13}^3 \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + 20 E_{55} E_{66} \sqrt{105} E_{14} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& + 10 E_{55} E_{66} \sqrt{105} E_{12} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& + 30 E_{55} E_{66} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{23} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c2u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& - 20 \sqrt{105} E_{44} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} E_{56}^2 \\
& + 60 E_{55} E_{66} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{34} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c2u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& + 20 \sqrt{105} E_{34} E_{13} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{56}^2 \\
& - 2 E_{55} E_{66} E_{56} \sqrt{5} \sqrt{21} E_{13} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - 4 E_{55} E_{66} E_{56} \sqrt{5} \sqrt{21} E_{34} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - 5 \sqrt{105} E_{11} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} E_{56}^2 - 5 E_{55} E_{66} \sqrt{5} E_{23} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c2u_{3,0}(x, y) \right) \sqrt{21} E_{33} \\
& - 2 E_{55} E_{66} E_{56} \sqrt{5} \sqrt{21} E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + 5 \sqrt{5} E_{23}^2 E_{56}^2 \sqrt{21} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{56}^3 \sqrt{5} \sqrt{21} E_{13} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + 2 E_{55} \sqrt{5} E_{56}^2 \sqrt{21} E_{34} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \Bigg/ (30 \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{33}^2 E_{56}^2 \\
& - 5 \sqrt{5} E_{33}^2 E_{56}^2 \sqrt{21} - 30 E_{55} E_{66} \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{5} E_{33}^2 + 5 E_{55} E_{66} \sqrt{5} E_{33}^2 \sqrt{21})
\end{aligned}$$

Gleichungen (1,1) und (1,2): (vgl. die Form von "su_gl_11" und "su_gl_12" mit (58) und (59))
Wieder substituieren wir zunächst die gewünschten Variablen durch Symbole ("suvarix" und "suvari") und lösen dann das System nach den Symbolen.

```

> gl11:=subs(su_c2u_1_1, su_c2u_2_1, algsubs(E[13]*diff(su_gl23, x
)+E[34]*diff(su_gl23, y), cvar(gls(1,1))=0)):
> gl12:=subs(su_c2u_1_1, su_c2u_2_1, algsubs(E[34]*diff(su_gl23, x
)+E[23]*diff(su_gl23, y), cvar(gls(1,2))=0)):
> suvarix:=diff(u[3,0](x,y), x)+u[1,1](x,y)+1/3*sqrt(3)*sqrt(7)*

```

$$c2u[1,3](x,y) + 1/3 \sqrt{3} \sqrt{11} c4u[1,5](x,y) = \text{vari}_x(x,y);$$

$$\text{suvarix} := \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{3,0}(x,y) \right) + u_{1,1}(x,y) + \frac{1}{3} \sqrt{3} \sqrt{7} c2u_{1,3}(x,y) + \frac{1}{3} \sqrt{3} \sqrt{11} c4u_{1,5}(x,y) = \text{vari}_x(x,y)$$

$$> \text{suvari}_y := \text{diff}(u[3,0](x,y), y) + u[2,1](x,y) + 1/3 \sqrt{3} \sqrt{7} c2u[2,3](x,y) + 1/3 \sqrt{3} \sqrt{11} c4u[2,5](x,y) = \text{vari}_y(x,y);$$

$$\text{suvari}_y := \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{3,0}(x,y) \right) + u_{2,1}(x,y) + \frac{1}{3} \sqrt{3} \sqrt{7} c2u_{2,3}(x,y) + \frac{1}{3} \sqrt{3} \sqrt{11} c4u_{2,5}(x,y) = \text{vari}_y(x,y)$$

$$> \text{gl11}_2 := \text{algsubs}(\text{suvari}_y, \text{algsubs}(\text{suvarix}, \text{gl11}));$$

$$> \text{gl12}_2 := \text{algsubs}(\text{suvari}_y, \text{algsubs}(\text{suvarix}, \text{gl12}));$$

Ein kleiner Test: Wir lassen den Summanden mit "vari_x" ausgeben. Ein Vergleich mit Tabelle 3 lässt erkennen, dass der Vorfaktor "-E[56]" korrekt ist.

$$> \text{colsum}(\text{op}(1, \text{gl12}_2), \text{vari}_x);$$

$$-E_{56} \text{vari}_x(x,y)$$

Nun die Auflösung des Systems:

$$> \text{sols} := \text{mysolve}(\{\text{gl11}_2, \text{gl12}_2\}, [\text{vari}_x(x,y), \text{vari}_y(x,y)]);$$

$$> \text{su_gl11} := \text{diff}(u[3,0](x,y), x) + u[1,1](x,y) + 1/3 \sqrt{3} \sqrt{7} c2u[1,3](x,y) + 1/3 \sqrt{3} \sqrt{11} c4u[1,5](x,y) = \text{simplify}(\text{simplify}(\text{op}(2, \text{sols}[1])), \text{size});$$

$$\text{su_gl11} := \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{3,0}(x,y) \right) + u_{1,1}(x,y) + \frac{1}{3} \sqrt{3} \sqrt{7} c2u_{1,3}(x,y) + \frac{1}{3} \sqrt{3} \sqrt{11} c4u_{1,5}(x,y)$$

$$= \frac{1}{5} \left(\left((-6 E_{12}^2 - 60 E_{24} E_{14} - 24 E_{44} E_{12} - 24 E_{44}^2 - 6 E_{22} E_{11}) E_{56}^2 + \right. \right.$$

$$\left. \left((60 E_{14} E_{12} + 30 E_{24} E_{11} + 90 E_{44} E_{14}) E_{55} + 12 E_{66} \left(\frac{7}{2} E_{44} E_{24} + E_{24} E_{12} + \frac{1}{2} E_{22} E_{14} \right) \right) E_{56} \right. \\ \left. - 6 E_{55} \left((6 E_{14}^2 + 3 E_{11} E_{44} + E_{11} E_{12}) E_{55} + E_{66} (E_{12}^2 + 4 E_{24} E_{14} + 3 E_{44} E_{12} + 2 E_{44}^2) \right) \right)$$

$$E_{33}^2 + \left((8 E_{44} + 4 E_{12}) E_{34} + 5 E_{14} E_{23} + 3 E_{24} E_{13} \right) E_{56}^3 + \left(\right.$$

$$\left. (-10 E_{14} E_{34} - E_{11} E_{23} - 3 E_{13} (2 E_{44} + E_{12})) E_{55} + (24 E_{12} + 48 E_{44}) E_{34}^2 \right.$$

$$\left. + (60 E_{14} E_{23} + 60 E_{24} E_{13}) E_{34} + 6 E_{23}^2 E_{11} + 12 E_{13} (2 E_{44} + E_{12}) E_{23} + 6 E_{22} E_{13}^2 \right) E_{56}^2$$

$$+ \left(\left(-90 E_{14} E_{34}^2 + \left(-4 E_{12} - 8 E_{44} \right) E_{66} - 30 E_{11} E_{23} - 60 \left(\frac{3}{2} E_{44} + E_{12} \right) E_{13} \right) E_{34} \right.$$

$$\left. + (-3 E_{24} E_{13} - 5 E_{14} E_{23}) E_{66} - 30 E_{24} E_{13}^2 - 60 E_{23} E_{13} E_{14} \right) E_{55}$$

$$- 12 \left(\frac{7}{2} E_{24} E_{34}^2 + \left(\frac{7}{2} E_{44} + E_{12} \right) E_{23} + \frac{1}{2} E_{13} E_{22} \right) E_{34} + \frac{1}{2} E_{23}^2 E_{14} + E_{24} E_{23} E_{13} \right) E_{66} \right) E_{56}$$

$$+ 6 \left(\left(3 E_{11} E_{34}^2 + 12 E_{14} \left(\frac{5}{36} E_{66} + E_{13} \right) \right) E_{34} + \left(\frac{1}{6} E_{11} E_{23} + \frac{1}{2} E_{13} (2 E_{44} + E_{12}) \right) E_{66} \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left((E_{12} + 3 E_{44}) E_{13} + E_{11} E_{23} \right) E_{13} \Big) E_{55} \\
& + 2 E_{66} \left(\left(\frac{3}{2} E_{12} + 2 E_{44} \right) E_{34}^2 + (2 E_{24} E_{13} + 2 E_{14} E_{23}) E_{34} + E_{23} \left(\frac{3}{2} E_{44} + E_{12} \right) E_{13} \right) E_{55} \\
& E_{33} + (-12 E_{34} E_{23} E_{13} - 8 E_{34}^3) E_{56}^3 \\
& + ((16 E_{34}^2 E_{13} + 4 E_{13}^2 E_{23}) E_{55} - 84 E_{23} E_{34}^2 E_{13} - 12 E_{23}^2 E_{13}^2 - 24 E_{34}^4) E_{56}^2 + 90 E_{34} \\
& \left(\left(\left(E_{13} + \frac{4}{45} E_{66} \right) E_{34}^2 + \left(\frac{2}{15} E_{66} + E_{13} \right) E_{23} E_{13} \right) E_{55} + \frac{1}{5} \left(\frac{7}{3} E_{34}^2 + E_{23} E_{13} \right) E_{23} E_{66} \right) E_{56} - \\
& 6 E_{55} \left(\left(\left(9 E_{13} + \frac{8}{3} E_{66} \right) E_{34}^2 + E_{23} E_{13} \left(E_{13} + \frac{2}{3} E_{66} \right) \right) E_{13} E_{55} \right. \\
& \left. + E_{66} (7 E_{23} E_{34}^2 E_{13} + E_{23}^2 E_{13}^2 + 2 E_{34}^4) \right) \left(\frac{\partial^5}{\partial y^2 \partial x^3} cAu_{3,0}(x, y) \right) + \left(\left(\right. \right. \\
& (-36 E_{24} E_{12} - 24 E_{22} E_{14} - 60 E_{44} E_{24}) E_{56}^2 + (\\
& (42 E_{44} E_{12} + 84 E_{24} E_{14} + 12 E_{12}^2 + 6 E_{22} E_{11} + 36 E_{44}^2) E_{55} \\
& + 6 E_{66} (3 E_{22} E_{44} + E_{22} E_{12} + 6 E_{24}^2) \Big) E_{56} \\
& - 12 E_{55} \left(\left(\frac{1}{2} E_{24} E_{11} + \frac{7}{2} E_{44} E_{14} + E_{14} E_{12} \right) E_{55} + 2 \left(E_{24} E_{12} + \frac{1}{4} E_{22} E_{14} + \frac{5}{4} E_{44} E_{24} \right) E_{66} \right) \Big) \\
& E_{33}^2 + \left((10 E_{34} E_{24} + (6 E_{44} + 3 E_{12}) E_{23} + E_{13} E_{22}) E_{56}^3 + (\right. \\
& ((-4 E_{12} - 8 E_{44}) E_{34} - 3 E_{14} E_{23} - 5 E_{24} E_{13}) E_{55} + 60 E_{24} E_{34}^2 \\
& + ((60 E_{44} + 36 E_{12}) E_{23} + 24 E_{13} E_{22}) E_{34} + 24 E_{23}^2 E_{14} + 36 E_{24} E_{23} E_{13}) E_{56}^2 + \left(\left(\right. \right. \\
& (-42 E_{12} - 72 E_{44}) E_{34}^2 + (-10 E_{66} E_{24} - 84 E_{14} E_{23} - 84 E_{24} E_{13}) E_{34} \\
& + ((-6 E_{44} - 3 E_{12}) E_{23} - E_{13} E_{22}) E_{66} - 6 E_{23}^2 E_{11} - 24 E_{13} \left(\frac{7}{4} E_{44} + E_{12} \right) E_{23} - 6 E_{22} E_{13}^2 \\
& \Big) E_{55} - 6 (3 E_{34}^2 E_{22} + 12 E_{34} E_{23} E_{24} + ((E_{12} + 3 E_{44}) E_{23} + E_{13} E_{22}) E_{23}) E_{66} \Big) E_{56} + 12 \\
& E_{55} \left(\left(\frac{7}{2} E_{14} E_{34}^2 + \left(\left(\frac{2}{3} E_{44} + \frac{1}{3} E_{12} \right) E_{66} + \frac{1}{2} E_{11} E_{23} + \left(\frac{7}{2} E_{44} + E_{12} \right) E_{13} \right) E_{34} \right. \right. \\
& + \left(\frac{5}{12} E_{24} E_{13} + \frac{1}{4} E_{14} E_{23} \right) E_{66} + E_{23} E_{13} E_{14} + \frac{1}{2} E_{24} E_{13}^2 \Big) E_{55} \\
& + 2 \left(\frac{5}{4} E_{24} E_{34}^2 + \left(\left(\frac{5}{4} E_{44} + E_{12} \right) E_{23} + \frac{1}{4} E_{13} E_{22} \right) E_{34} + \frac{1}{4} E_{23}^2 E_{14} + E_{24} E_{23} E_{13} \right) E_{66} \Big) \Big) E_{33} \\
& + (-16 E_{23} E_{34}^2 - 4 E_{23}^2 E_{13}) E_{56}^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left((8 E_{34}^3 + 12 E_{34} E_{23} E_{13}) E_{55} - 60 E_{23} E_{34}^3 - 60 E_{23}^2 E_{34} E_{13} \right) E_{56}^2 + \left(\right. \\
& \left. \left(36 E_{34}^4 + 126 E_{23} \left(E_{13} + \frac{8}{63} E_{66} \right) E_{34}^2 + 18 \left(\frac{2}{9} E_{66} + E_{13} \right) E_{23}^2 E_{13} \right) E_{55} \right. \\
& \left. + 6 E_{66} E_{23}^2 (E_{23} E_{13} + 9 E_{34}^2) \right) E_{56} - 18 E_{55} E_{34} \\
& \left(\left(\left(\frac{4}{9} E_{66} + \frac{7}{3} E_{13} \right) E_{34}^2 + E_{23} E_{13} \left(E_{13} + \frac{2}{3} E_{66} \right) \right) E_{55} + \frac{5}{3} E_{66} E_{23} (E_{23} E_{13} + E_{34}^2) \right) \\
& \left(\frac{\partial^5}{\partial y^3 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left((-18 E_{22} E_{44} - 12 E_{22} E_{12} - 30 E_{24}^2) E_{56}^2 \right. \\
& + ((12 E_{22} E_{14} + 54 E_{44} E_{24} + 24 E_{24} E_{12}) E_{55} + 30 E_{66} E_{22} E_{24}) E_{56} \\
& - 6 E_{55} ((2 E_{24} E_{14} + E_{44} E_{12} + 2 E_{44}^2) E_{55} + E_{66} (E_{22} E_{44} + E_{22} E_{12} + 3 E_{24}^2)) \left. \right) E_{33}^2 + \left(\right. \\
& (7 E_{23} E_{24} + 3 E_{34} E_{22}) E_{56}^3 + ((-6 E_{34} E_{24} + (-2 E_{44} - E_{12}) E_{23} - E_{13} E_{22}) E_{55} \\
& + 18 E_{34}^2 E_{22} + 60 E_{34} E_{23} E_{24} + (12 E_{12} + 18 E_{44}) E_{23}^2 + 12 E_{23} E_{13} E_{22}) E_{56}^2 + ((\\
& -54 E_{24} E_{34}^2 + (-3 E_{66} E_{22} + (-24 E_{12} - 54 E_{44}) E_{23} - 12 E_{13} E_{22}) E_{34} - 7 E_{66} E_{24} E_{23} \\
& - 24 E_{24} E_{23} E_{13} - 12 E_{23}^2 E_{14}) E_{55} - 30 E_{66} E_{23} (E_{23} E_{24} + E_{34} E_{22})) E_{56} + 6 E_{55} \left(\left(\right. \right. \\
& (E_{12} + 4 E_{44}) E_{34}^2 + (2 E_{24} E_{13} + 2 E_{14} E_{23} + E_{66} E_{24}) E_{34} \\
& + \left(\left(\frac{1}{3} E_{44} + \frac{1}{6} E_{12} \right) E_{23} + \frac{1}{6} E_{13} E_{22} \right) E_{66} + E_{44} E_{13} E_{23} \left. \right) E_{55} \\
& + (E_{34}^2 E_{22} + 6 E_{34} E_{23} E_{24} + E_{23} ((E_{44} + E_{12}) E_{23} + E_{13} E_{22})) E_{66} \left. \right) \left. \right) E_{33} - 10 E_{23}^2 E_{34} E_{56}^3 \\
& - 12 \left(E_{23} - \frac{1}{6} E_{55} \right) E_{23} (E_{23} E_{13} + 4 E_{34}^2) E_{56}^2 \\
& + 36 E_{34} \left(\left(\frac{3}{2} E_{34}^2 + \left(\frac{5}{18} E_{66} + E_{13} \right) E_{23} \right) E_{55} + \frac{5}{6} E_{66} E_{23}^2 \right) E_{23} E_{56} - 6 E_{55} \\
& \left(\left(2 E_{34}^4 + 3 \left(\frac{4}{9} E_{66} + E_{13} \right) E_{23} E_{34}^2 + \frac{1}{3} E_{66} E_{13} E_{23}^2 \right) E_{55} + E_{66} E_{23}^2 (E_{23} E_{13} + 4 E_{34}^2) \right) \\
& \left(\frac{\partial^5}{\partial y^4 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\left((-36 E_{44} E_{14} - 12 E_{24} E_{11} - 12 E_{14} E_{12}) E_{56}^2 \right. \right. \\
& + ((48 E_{14}^2 + 24 E_{11} E_{44} + 18 E_{11} E_{12}) E_{55} + 6 E_{66} (2 E_{24} E_{14} + E_{44} E_{12} + 2 E_{44}^2)) E_{56} \\
& - 12 E_{55} E_{14} \left(\frac{5}{2} E_{55} E_{11} + \left(\frac{3}{2} E_{44} + E_{12} \right) E_{66} \right) \left. \right) \left. \right) E_{33}^2 + \left(\right. \\
& (6 E_{14} E_{34} + E_{11} E_{23} + E_{13} (2 E_{44} + E_{12})) E_{56}^3 + ((-3 E_{34} E_{11} - 7 E_{13} E_{14}) E_{55} + 36 E_{14} E_{34}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (12 E_{11} E_{23} + 12 (E_{12} + 3 E_{44}) E_{13}) E_{34} + 12 E_{24} E_{13}^2 + 12 E_{23} E_{13} E_{14}) E_{56}^2 + \left(\left(\right. \right. \\
& -24 E_{11} E_{34}^2 - 96 E_{14} \left(\frac{1}{16} E_{66} + E_{13} \right) E_{34} + (-E_{11} E_{23} - E_{13} (2 E_{44} + E_{12})) E_{66} \\
& - 18 E_{23} E_{13} E_{11} - 18 E_{13}^2 \left(E_{12} + \frac{4}{3} E_{44} \right) \left. \right) E_{55} \\
& - 6 E_{66} \left((E_{12} + 4 E_{44}) E_{34}^2 + (2 E_{24} E_{13} + 2 E_{14} E_{23}) E_{34} + E_{44} E_{13} E_{23} \right) E_{56} + 12 E_{55} \left(\right. \\
& \left. \left(\frac{5}{2} E_{11} \left(E_{13} + \frac{1}{10} E_{66} \right) E_{34} + \frac{5}{2} E_{14} E_{13} \left(\frac{7}{30} E_{66} + E_{13} \right) \right) E_{55} \right. \\
& \left. + E_{66} \left(\frac{3}{2} E_{14} E_{34}^2 + \left(\frac{3}{2} E_{44} + E_{12} \right) E_{13} E_{34} + E_{23} E_{13} E_{14} \right) \right) E_{33} \\
& + (-8 E_{34}^2 E_{13} - 2 E_{13}^2 E_{23}) E_{56}^3 + (-36 E_{34}^3 E_{13} - 24 E_{34} E_{23} E_{13}^2 + 10 E_{55} E_{34} E_{13}^2) E_{56}^2 \\
& + \left(18 \left(E_{13} + \frac{1}{9} E_{66} \right) E_{13} (E_{23} E_{13} + 4 E_{34}^2) E_{55} + 12 E_{66} E_{34}^4 + 18 E_{66} E_{23} E_{34}^2 E_{13} \right) E_{56} \\
& - 30 E_{55} \left(\left(E_{13} + \frac{1}{3} E_{66} \right) E_{13} E_{55} + \frac{2}{5} E_{66} \left(\frac{3}{2} E_{34}^2 + E_{23} E_{13} \right) \right) E_{34} E_{13} \left(\frac{\partial^5}{\partial y \partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + \left(6 (E_{22} E_{56} - E_{55} E_{24}) (E_{66} E_{22} - 2 E_{24} E_{56} + E_{44} E_{55}) E_{33}^2 + \left(2 E_{23} E_{22} E_{56}^3 \right. \right. \\
& \left. \left. + 12 (E_{23} E_{24} + E_{34} E_{22}) \left(E_{23} - \frac{1}{12} E_{55} \right) E_{56}^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + ((-24 E_{34} E_{23} E_{24} - 6 E_{34}^2 E_{22} - 2 E_{66} E_{23} E_{22} - 6 E_{23}^2 E_{44}) E_{55} - 12 E_{66} E_{22} E_{23}^2) E_{56} + \right. \right. \\
& \left. \left. 6 E_{55} \right. \right. \\
& \left. \left. \left(\left(E_{24} E_{34}^2 + \left(E_{44} E_{23} + \frac{1}{6} E_{66} E_{22} \right) E_{34} + \frac{1}{6} E_{66} E_{24} E_{23} \right) E_{55} + E_{66} E_{23} (E_{23} E_{24} + E_{34} E_{22}) \right) \right) \right) \\
& E_{33} + \\
& 6 (E_{23} E_{56} - E_{55} E_{34}) E_{23} \left(-\frac{1}{3} E_{23} E_{56}^2 - 2 E_{56} E_{34} E_{23} + \left(\frac{1}{3} E_{66} E_{23} + E_{34}^2 \right) E_{55} + E_{66} E_{23}^2 \right) \\
& \left(\frac{\partial^5}{\partial y^5} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left((-6 E_{14}^2 - 6 E_{11} E_{44}) E_{56}^2 + (6 E_{66} E_{44} E_{14} + 18 E_{55} E_{14} E_{11}) E_{56} \right. \\
& - 6 E_{55}^2 E_{11}^2 - 6 E_{55} E_{66} E_{14}^2) E_{33}^2 + \left((E_{13} E_{14} + E_{34} E_{11}) E_{56}^3 \right. \\
& \left. + (12 E_{14} E_{13} E_{34} - 2 E_{55} E_{11} E_{13} + 6 E_{11} E_{34}^2 + 6 E_{44} E_{13}^2) E_{56}^2 \right. \\
& \left. + \left(-18 (E_{13} E_{14} + E_{34} E_{11}) \left(\frac{1}{18} E_{66} + E_{13} \right) E_{55} - 6 E_{66} E_{34} (E_{14} E_{34} + E_{13} E_{44}) \right) E_{56} \right. \\
& \left. + 12 E_{55} \left(E_{11} \left(\frac{1}{6} E_{66} + E_{13} \right) E_{55} + E_{66} E_{34} E_{14} \right) E_{13} \right) E_{33} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 6(-E_{34} E_{56} + E_{55} E_{13}) \left(-\frac{1}{3} E_{13} E_{56}^2 - 2 E_{13} E_{34} E_{56} + \left(E_{13} + \frac{1}{3} E_{66} \right) E_{13} E_{55} + E_{66} E_{34}^2 \right) E_{13} \\
& \left) \left(\frac{\partial^5}{\partial x^5} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 5 E_{33} \left(\right. \\
& \left. \left((3 E_{24} E_{56} - E_{55} (2 E_{44} + E_{12})) E_{33} - 3 E_{56} E_{34} E_{23} + E_{55} (2 E_{34}^2 + E_{23} E_{13}) \right) \right. \\
& \left. \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c2u_{3,0}(x, y) \right) + \right. \\
& \left. \left((2 E_{44} + E_{12}) E_{56} - 3 E_{14} E_{55} \right) E_{33} + (-2 E_{34}^2 - E_{23} E_{13}) E_{56} + 3 E_{34} E_{13} E_{55} \right) \\
& \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c2u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + \left((-E_{55} E_{11} + E_{56} E_{14}) E_{33} + E_{55} E_{13}^2 - E_{13} E_{34} E_{56} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c2u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + \left((E_{22} E_{56} - E_{55} E_{24}) E_{33} + E_{23} E_{34} E_{55} - E_{56} E_{23}^2 \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c2u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + \left(-\frac{1}{5} E_{55} \sqrt{5} E_{34} + \frac{1}{5} E_{56} \sqrt{5} E_{23} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} c2RS_{32}(x, y) \right) \\
& \left. - \frac{1}{5} \sqrt{5} (-E_{34} E_{56} + E_{55} E_{13}) \left(\frac{\partial}{\partial x} c2RS_{32}(x, y) \right) \right) (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \left. \right) / \left(\right. \\
& \left. (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66})^2 E_{33}^2 \right)
\end{aligned}$$

> **su_gll2:=diff(u[3,0](x,y),y)+u[2,1](x,y)+1/3*sqrt(3)*sqrt(7)*
c2u[2,3](x,y)+1/3*sqrt(3)*sqrt(11)*c4u[2,5](x,y)
=simplify(simplify(op(2,sols[2])),size);**

$$\begin{aligned}
su_gll2 & := \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{3,0}(x, y) \right) + u_{2,1}(x, y) + \frac{1}{3} \sqrt{3} \sqrt{7} c2u_{2,3}(x, y) + \frac{1}{3} \sqrt{3} \sqrt{11} c4u_{2,5}(x, y) \\
& = \frac{1}{5} \left(\left(\left((-6 E_{12}^2 - 60 E_{24} E_{14} - 24 E_{44} E_{12} - 24 E_{44}^2 - 6 E_{22} E_{11}) E_{56}^2 + \right. \right. \right. \\
& \left. \left((60 E_{24} E_{12} + 90 E_{44} E_{24} + 30 E_{22} E_{14}) E_{66} + 12 \left(\frac{1}{2} E_{24} E_{11} + \frac{7}{2} E_{44} E_{14} + E_{14} E_{12} \right) E_{55} \right) E_{56} \right. \\
& \left. - 6 \left(E_{66} (3 E_{22} E_{44} + E_{22} E_{12} + 6 E_{24}^2) + 4 E_{55} \left(\frac{1}{2} E_{44}^2 + \frac{1}{4} E_{12}^2 + \frac{3}{4} E_{44} E_{12} + E_{24} E_{14} \right) \right) \right) E_{66} \\
& \left. \right) E_{33}^2 + \left((8 E_{44} + 4 E_{12}) E_{34} + 3 E_{14} E_{23} + 5 E_{24} E_{13} \right) E_{56}^3 + \left(\right. \\
& \left. (-10 E_{34} E_{24} - E_{13} E_{22} - 3 E_{23} (2 E_{44} + E_{12})) E_{66} + (24 E_{12} + 48 E_{44}) E_{34}^2 \right. \\
& \left. + (60 E_{14} E_{23} + 60 E_{24} E_{13}) E_{34} + 6 E_{22} E_{13}^2 + 12 E_{13} (2 E_{44} + E_{12}) E_{23} + 6 E_{23}^2 E_{11} \right) E_{56}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\left(-90 E_{24} E_{34}^2 + \left((-4 E_{12} - 8 E_{44}) E_{55} - 30 E_{13} E_{22} - 60 \left(\frac{3}{2} E_{44} + E_{12} \right) E_{23} \right) E_{34} \right. \right. \\
& + \left. \left. (-5 E_{24} E_{13} - 3 E_{14} E_{23}) E_{55} - 60 E_{24} E_{23} E_{13} - 30 E_{23}^2 E_{14} \right) E_{66} \right. \\
& - \left. 12 E_{55} \left(\frac{7}{2} E_{14} E_{34}^2 + \left(\frac{7}{2} E_{44} + E_{12} \right) E_{13} + \frac{1}{2} E_{11} E_{23} \right) E_{34} + \frac{1}{2} E_{24} E_{13}^2 + E_{23} E_{13} E_{14} \right) E_{56} \\
& + E_{66} \left(\left(18 E_{34}^2 E_{22} + 10 \left(E_{55} + \frac{36}{5} E_{23} \right) E_{24} E_{34} + (E_{13} E_{22} + 3 E_{23} (2 E_{44} + E_{12})) E_{55} \right. \right. \\
& + \left. \left. 6 ((E_{12} + 3 E_{44}) E_{23} + E_{13} E_{22}) E_{23} \right) E_{66} \right. \\
& + \left. 24 E_{55} \left(\left(E_{44} + \frac{3}{4} E_{12} \right) E_{34}^2 + (E_{24} E_{13} + E_{14} E_{23}) E_{34} + \frac{1}{2} E_{23} \left(\frac{3}{2} E_{44} + E_{12} \right) E_{13} \right) \right) E_{33} \\
& + (-12 E_{34} E_{23} E_{13} - 8 E_{34}^3) E_{56}^3 \\
& + ((16 E_{23} E_{34}^2 + 4 E_{23}^2 E_{13}) E_{66} - 24 E_{34}^4 - 84 E_{23} E_{34}^2 E_{13} - 12 E_{23}^2 E_{13}^2) E_{56}^2 + 12 E_{34} \\
& \left(\left(\left(\frac{15}{2} E_{23} + \frac{2}{3} E_{55} \right) E_{34}^2 + E_{13} E_{23} \left(\frac{15}{2} E_{23} + E_{55} \right) \right) E_{66} + \frac{3}{2} E_{55} E_{13} \left(\frac{7}{3} E_{34}^2 + E_{23} E_{13} \right) \right) E_{56} \\
& - 4 \left(\left(\left(4 E_{55} + \frac{27}{2} E_{23} \right) E_{34}^2 + E_{13} E_{23} \left(\frac{3}{2} E_{23} + E_{55} \right) \right) E_{23} E_{66} \right. \\
& + \left. \frac{3}{2} E_{55} (7 E_{23} E_{34}^2 E_{13} + E_{23}^2 E_{13}^2 + 2 E_{34}^4) \right) E_{66} \left(\frac{\partial^5}{\partial y^3 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\left(\right. \right. \\
& (-60 E_{44} E_{14} - 36 E_{14} E_{12} - 24 E_{24} E_{11}) E_{56}^2 + \left(\right. \\
& (42 E_{44} E_{12} + 84 E_{24} E_{14} + 12 E_{12}^2 + 6 E_{22} E_{11} + 36 E_{44}^2) E_{66} \\
& + \left. 36 E_{55} \left(\frac{1}{6} E_{11} E_{12} + \frac{1}{2} E_{11} E_{44} + E_{14}^2 \right) \right) E_{56} \\
& - \left. 6 \left((2 E_{24} E_{12} + E_{22} E_{14} + 7 E_{44} E_{24}) E_{66} + 4 E_{55} \left(\frac{5}{4} E_{44} E_{14} + E_{14} E_{12} + \frac{1}{4} E_{24} E_{11} \right) \right) E_{66} \right) \\
& E_{33}^2 + \left((10 E_{14} E_{34} + (6 E_{44} + 3 E_{12}) E_{13} + E_{11} E_{23}) E_{56}^3 + \left(\right. \right. \\
& ((-4 E_{12} - 8 E_{44}) E_{34} - 3 E_{24} E_{13} - 5 E_{14} E_{23}) E_{66} + 60 E_{14} E_{34}^2 \\
& + ((60 E_{44} + 36 E_{12}) E_{13} + 24 E_{11} E_{23}) E_{34} + 24 E_{24} E_{13}^2 + 36 E_{23} E_{13} E_{14}) E_{56}^2 + \left(\left(\right. \right. \\
& (-42 E_{12} - 72 E_{44}) E_{34}^2 + (-84 E_{24} E_{13} - 84 E_{14} E_{23} - 10 E_{14} E_{55}) E_{34} \\
& + ((-6 E_{44} - 3 E_{12}) E_{13} - E_{11} E_{23}) E_{55} - 6 E_{22} E_{13}^2 - 24 E_{13} \left(\frac{7}{4} E_{44} + E_{12} \right) E_{23} - 6 E_{23}^2 E_{11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \right) E_{66} - 72 E_{55} \left(\frac{1}{4} E_{11} E_{34}^2 + E_{14} E_{13} E_{34} + \frac{1}{12} ((E_{12} + 3 E_{44}) E_{13} + E_{11} E_{23}) E_{13} \right) E_{56} + 5 \left(\left(\right. \right. \\
& \frac{42}{5} E_{24} E_{34}^2 + \left(\left(\frac{4}{5} E_{12} + \frac{8}{5} E_{44} \right) E_{55} + \frac{6}{5} E_{13} E_{22} + \frac{12}{5} \left(\frac{7}{2} E_{44} + E_{12} \right) E_{23} \right) E_{34} \\
& + \left(\frac{3}{5} E_{24} E_{13} + E_{14} E_{23} \right) E_{55} + \frac{12}{5} E_{24} E_{23} E_{13} + \frac{6}{5} E_{23}^2 E_{14} \left. \right) E_{66} \\
& + \frac{24}{5} E_{55} \left(\frac{5}{4} E_{14} E_{34}^2 + \left(\left(\frac{5}{4} E_{44} + E_{12} \right) E_{13} + \frac{1}{4} E_{11} E_{23} \right) E_{34} + \frac{1}{4} E_{24} E_{13}^2 + E_{23} E_{13} E_{14} \right) E_{66} \\
& \left. \right) E_{33} + (-4 E_{13}^2 E_{23} - 16 E_{34}^2 E_{13}) E_{56}^3 \\
& + ((8 E_{34}^3 + 12 E_{34} E_{23} E_{13}) E_{66} - 60 E_{34}^3 E_{13} - 60 E_{34} E_{23} E_{13}^2) E_{56}^2 + \left(\right. \\
& \left(36 E_{34}^4 + 16 \left(E_{55} + \frac{63}{8} E_{23} \right) E_{13} E_{34}^2 + 4 \left(\frac{9}{2} E_{23} + E_{55} \right) E_{13}^2 E_{23} \right) E_{66} \\
& + 6 E_{55} E_{13}^2 (E_{23} E_{13} + 9 E_{34}^2) \left. \right) E_{56} - 12 E_{34} \\
& \left(\left(\left(\frac{7}{2} E_{23} + \frac{2}{3} E_{55} \right) E_{34}^2 + E_{13} E_{23} \left(\frac{3}{2} E_{23} + E_{55} \right) \right) E_{66} + \frac{5}{2} E_{55} E_{13} (E_{23} E_{13} + E_{34}^2) \right) E_{66} \\
& \left(\frac{\partial^5}{\partial y^2 \partial x^3} cA u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\left((-12 E_{11} E_{12} - 18 E_{11} E_{44} - 30 E_{14}^2) E_{56}^2 \right. \right. \\
& + ((12 E_{24} E_{11} + 24 E_{14} E_{12} + 54 E_{44} E_{14}) E_{66} + 30 E_{55} E_{14} E_{11}) E_{56} \\
& - 12 \left(\left(\frac{1}{2} E_{44} E_{12} + E_{24} E_{14} + E_{44}^2 \right) E_{66} + \frac{3}{2} E_{55} \left(\frac{1}{3} E_{11} E_{12} + \frac{1}{3} E_{11} E_{44} + E_{14}^2 \right) \right) E_{66} \left. \right) E_{33}^2 + \\
& \left((3 E_{34} E_{11} + 7 E_{13} E_{14}) E_{56}^3 + ((-6 E_{14} E_{34} + (-2 E_{44} - E_{12}) E_{13} - E_{11} E_{23}) E_{66} \right. \\
& + 18 E_{11} E_{34}^2 + 60 E_{14} E_{13} E_{34} + (12 E_{12} + 18 E_{44}) E_{13}^2 + 12 E_{23} E_{13} E_{11}) E_{56}^2 + ((\\
& -54 E_{14} E_{34}^2 + (-3 E_{55} E_{11} + (-24 E_{12} - 54 E_{44}) E_{13} - 12 E_{11} E_{23}) E_{34} - 12 E_{24} E_{13}^2 \\
& - 7 E_{55} E_{13} E_{14} - 24 E_{23} E_{13} E_{14}) E_{66} - 30 E_{55} E_{13} (E_{13} E_{14} + E_{34} E_{11}) \left. \right) E_{56} + 6 E_{66} \left(\left(\right. \right. \\
& (E_{12} + 4 E_{44}) E_{34}^2 + (2 E_{14} E_{23} + 2 E_{24} E_{13} + E_{14} E_{55}) E_{34} \\
& + \left(\left(\frac{1}{3} E_{44} + \frac{1}{6} E_{12} \right) E_{13} + \frac{1}{6} E_{11} E_{23} \right) E_{55} + E_{44} E_{13} E_{23} \left. \right) E_{66} \\
& + 6 E_{55} \left(\frac{1}{6} E_{11} E_{34}^2 + E_{14} E_{13} E_{34} + \frac{1}{6} E_{13} ((E_{44} + E_{12}) E_{13} + E_{11} E_{23}) \right) \left. \right) E_{33} \\
& - 10 E_{34} E_{13}^2 E_{56}^3 + 2 E_{13} (E_{23} E_{13} + 4 E_{34}^2) (-6 E_{13} + E_{66}) E_{56}^2 \\
& + 10 E_{34} E_{13} \left(\left(\frac{27}{5} E_{34}^2 + \left(E_{55} + \frac{18}{5} E_{23} \right) E_{13} \right) E_{66} + 3 E_{55} E_{13}^2 \right) E_{56} - 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\left(6 E_{34}^4 + 4 E_{13} \left(\frac{9}{4} E_{23} + E_{55} \right) E_{34}^2 + E_{55} E_{13}^2 E_{23} \right) E_{66} + 3 E_{55} E_{13}^2 (E_{23} E_{13} + 4 E_{34}^2) \right) E_{66} \\
& \left) \left(\frac{\partial^5}{\partial y \partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\left((-36 E_{44} E_{24} - 12 E_{24} E_{12} - 12 E_{22} E_{14}) E_{56}^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + \left((18 E_{22} E_{12} + 48 E_{24}^2 + 24 E_{22} E_{44}) E_{66} + 12 E_{55} \left(\frac{1}{2} E_{44} E_{12} + E_{24} E_{14} + E_{44}^2 \right) \right) E_{56} \right. \right. \\
& \left. \left. - 30 \left(E_{66} E_{22} + \frac{2}{5} E_{55} \left(\frac{3}{2} E_{44} + E_{12} \right) \right) E_{66} E_{24} \right) E_{33}^2 + \left(\right. \\
& (6 E_{34} E_{24} + E_{13} E_{22} + E_{23} (2 E_{44} + E_{12})) E_{56}^3 + ((-3 E_{34} E_{22} - 7 E_{23} E_{24}) E_{66} + 36 E_{24} E_{34}^2 \\
& + (12 E_{13} E_{22} + 12 (E_{12} + 3 E_{44}) E_{23}) E_{34} + 12 E_{24} E_{23} E_{13} + 12 E_{23}^2 E_{14}) E_{56}^2 + \left(\left(\right. \right. \\
& -24 E_{34}^2 E_{22} - 6 E_{24} (E_{55} + 16 E_{23}) E_{34} + (-E_{13} E_{22} - E_{23} (2 E_{44} + E_{12})) E_{55} \\
& - 18 E_{23} E_{13} E_{22} - 18 \left(E_{12} + \frac{4}{3} E_{44} \right) E_{23}^2 \left. \right) E_{66} \\
& - 12 E_{55} \left(\left(\frac{1}{2} E_{12} + 2 E_{44} \right) E_{34}^2 + (E_{24} E_{13} + E_{14} E_{23}) E_{34} + \frac{1}{2} E_{44} E_{13} E_{23} \right) \left. \right) E_{56} + 3 \left(\right. \\
& \left(E_{22} (10 E_{23} + E_{55}) E_{34} + \frac{7}{3} \left(\frac{30}{7} E_{23} + E_{55} \right) E_{23} E_{24} \right) E_{66} \\
& + 4 E_{55} \left(\frac{3}{2} E_{24} E_{34}^2 + \left(\frac{3}{2} E_{44} + E_{12} \right) E_{23} E_{34} + E_{24} E_{23} E_{13} \right) \left. \right) E_{66} \left. \right) E_{33} \\
& + (-2 E_{23}^2 E_{13} - 8 E_{23} E_{34}^2) E_{56}^3 + (-24 E_{23}^2 E_{34} E_{13} + 10 E_{23}^2 E_{34} E_{66} - 36 E_{23} E_{34}^3) E_{56}^2 \\
& + (2 E_{23} (E_{23} E_{13} + 4 E_{34}^2) (9 E_{23} + E_{55}) E_{66} + 12 E_{55} E_{34}^4 + 18 E_{55} E_{34}^2 E_{13} E_{23}) E_{56} \\
& - 10 E_{34} E_{23} E_{66} \left(E_{23} (3 E_{23} + E_{55}) E_{66} + \frac{6}{5} E_{55} \left(\frac{3}{2} E_{34}^2 + E_{23} E_{13} \right) \right) \left(\frac{\partial^5}{\partial y^4 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + (-6 (-E_{56} E_{11} + E_{66} E_{14}) (E_{44} E_{66} - 2 E_{56} E_{14} + E_{55} E_{11}) E_{33}^2 + (2 E_{13} E_{11} E_{56}^3 \\
& - (E_{13} E_{14} + E_{34} E_{11}) (-12 E_{13} + E_{66}) E_{56}^2 \\
& + ((-2 E_{55} E_{11} E_{13} - 6 E_{44} E_{13}^2 - 24 E_{14} E_{13} E_{34} - 6 E_{11} E_{34}^2) E_{66} - 12 E_{55} E_{13}^2 E_{11}) E_{56} + \\
& ((6 E_{14} E_{34}^2 + (6 E_{13} E_{44} + E_{55} E_{11}) E_{34} + E_{55} E_{13} E_{14}) E_{66} + 6 E_{55} E_{13} (E_{13} E_{14} + E_{34} E_{11})) \\
& E_{66}) E_{33} - \\
& 2 E_{13} (-E_{56} E_{13} + E_{66} E_{34}) (-E_{13} E_{56}^2 - 6 E_{13} E_{34} E_{56} + (E_{55} E_{13} + 3 E_{34}^2) E_{66} + 3 E_{55} E_{13}^2) \\
& \left. \right) \left(\frac{\partial^5}{\partial x^5} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\left((-6 E_{24}^2 - 6 E_{22} E_{44}) E_{56}^2 + (18 E_{66} E_{22} E_{24} + 6 E_{55} E_{44} E_{24}) E_{56} \right. \right. \\
& - 6 E_{55} E_{24}^2 E_{66} - 6 E_{66}^2 E_{22}^2 \left. \right) E_{33}^2 + ((E_{23} E_{24} + E_{34} E_{22}) E_{56}^3 \\
& + (12 E_{34} E_{23} E_{24} + 6 E_{23}^2 E_{44} - 2 E_{66} E_{23} E_{22} + 6 E_{34}^2 E_{22}) E_{56}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (- (E_{23} E_{24} + E_{34} E_{22}) (18 E_{23} + E_{55}) E_{66} - 6 E_{55} E_{34} (E_{34} E_{24} + E_{44} E_{23})) E_{56} \\
& + 2 (E_{22} (6 E_{23} + E_{55}) E_{66} + 6 E_{55} E_{34} E_{24}) E_{23} E_{66} E_{33} - \\
& 2 E_{23} (-E_{23} E_{56}^2 - 6 E_{56} E_{34} E_{23} + E_{23} (3 E_{23} + E_{55}) E_{66} + 3 E_{55} E_{34}^2) (-E_{34} E_{56} + E_{66} E_{23}) \\
& \left(\frac{\partial^5}{\partial y^5} c4u_{3,0}(x, y) \right) - 5 E_{33} \left(\right. \\
& ((-2 E_{44} - E_{12}) E_{56} + 3 E_{66} E_{24}) E_{33} + (2 E_{34}^2 + E_{23} E_{13}) E_{56} - 3 E_{66} E_{34} E_{23} \\
& \left. \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c2u_{3,0}(x, y) \right) + \right. \\
& ((-3 E_{56} E_{14} + E_{66} (2 E_{44} + E_{12})) E_{33} + 3 E_{13} E_{34} E_{56} - E_{66} (2 E_{34}^2 + E_{23} E_{13})) \\
& \left. \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c2u_{3,0}(x, y) \right) \right. \\
& + ((-E_{56} E_{11} + E_{66} E_{14}) E_{33} - E_{66} E_{34} E_{13} + E_{56} E_{13}^2) \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c2u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + ((-E_{24} E_{56} + E_{66} E_{22}) E_{33} - E_{66} E_{23}^2 + E_{56} E_{34} E_{23}) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c2u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + \left(\frac{1}{5} E_{66} E_{23} \sqrt{5} - \frac{1}{5} E_{56} \sqrt{5} E_{34} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} c2RS_{32}(x, y) \right) \\
& + \frac{1}{5} \sqrt{5} (-E_{56} E_{13} + E_{66} E_{34}) \left(\frac{\partial}{\partial x} c2RS_{32}(x, y) \right) \left(-E_{56}^2 + E_{55} E_{66} \right) \Big/ (E_{33}^2 \\
& (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66})^2)
\end{aligned}$$

Gleichung (0,3): (vgl. Seite 61 der Diplomarbeit)

Mit "su_g111" und "su_g112" bilden wir den folgenden Ausdruck "tt":

```

> tt := E[66] * diff(su_g111, x) + E[56] * diff(su_g111, y) +
      E[56] * diff(su_g112, x) + E[55] * diff(su_g112, y) :

```

"op(1,tt)" gibt die linke Seite vom Symbol "tt" (eine Gleichung !) zurück.

```

> op(1, tt) ;

```

$$\begin{aligned}
& E_{66} \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{1,1}(x, y) \right) + \frac{1}{3} \sqrt{3} \sqrt{7} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2u_{1,3}(x, y) \right) \right. \\
& + \frac{1}{3} \sqrt{3} \sqrt{11} \left(\frac{\partial}{\partial x} c4u_{1,5}(x, y) \right) \Big) + E_{56} \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{1,1}(x, y) \right) \right. \\
& + \frac{1}{3} \sqrt{3} \sqrt{7} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2u_{1,3}(x, y) \right) + \frac{1}{3} \sqrt{3} \sqrt{11} \left(\frac{\partial}{\partial y} c4u_{1,5}(x, y) \right) \Big) + E_{56} \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u_{3,0}(x, y) \right) \right. \\
& + \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{2,1}(x, y) \right) + \frac{1}{3} \sqrt{3} \sqrt{7} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2u_{2,3}(x, y) \right) + \frac{1}{3} \sqrt{3} \sqrt{11} \left(\frac{\partial}{\partial x} c4u_{2,5}(x, y) \right) \Big) + E_{55} \left(\right.
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} u_{3,0}(x,y) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{2,1}(x,y) \right) + \frac{1}{3} \sqrt{3} \sqrt{7} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2u_{2,3}(x,y) \right) + \frac{1}{3} \sqrt{3} \sqrt{11} \left(\frac{\partial}{\partial y} c4u_{2,5}(x,y) \right)$$

Die linke Seite von "tt" ist gerade die linke Seite von (0,3), was die Differenz unten verrät, also ist die rechte Seite von "tt" auch gleich der rechten Seite von (0,3). Diese Gleichung ist unsere gesuchte PDE ("hauptgl") in u[3,0].

> **simplify(op(1,tt)-cvar(gls(0,3)));**
0

Wir definieren "hauptgl". "RS_30" ist die rechte Seite von (0,3) und steht wiederum abkürzend für "-a*P_3^0/h".

> **hauptgl:=op(2,tt)=RS_30(x,y):**

Wir lassen Maple die "hauptgl" möglichst kompakt darstellen:

> **simplify(simplify(hauptgl),size);**

$$\frac{1}{5} \left(\left((120 E_{24} E_{14} + 48 E_{44} E_{12} + 48 E_{44}^2 + 12 E_{12}^2 + 12 E_{22} E_{11}) E_{56} + (-12 E_{22} E_{14} - 36 E_{24} E_{12} - 72 E_{44} E_{24}) E_{66} - 72 E_{55} \left(E_{44} E_{14} + \frac{1}{2} E_{14} E_{12} + \frac{1}{6} E_{24} E_{11} \right) \right) E_{33}^2 + \left((-16 E_{44} - 8 E_{12}) E_{34} - 8 E_{24} E_{13} - 8 E_{14} E_{23} \right) E_{56}^2 + \left((-96 E_{44} - 48 E_{12}) E_{34}^2 + (-120 E_{24} E_{13} - 120 E_{14} E_{23}) E_{34} - 12 E_{23}^2 E_{11} - 48 E_{13} \left(E_{44} + \frac{1}{2} E_{12} \right) E_{23} - 12 E_{22} E_{13}^2 \right) E_{56} + (72 E_{14} E_{55} + 72 E_{66} E_{24}) E_{34}^2 + \left((72 E_{44} + 36 E_{12}) E_{66} + 12 E_{55} E_{11} \right) E_{23} + \left(12 E_{66} E_{22} + 72 \left(E_{44} + \frac{1}{2} E_{12} \right) E_{55} \right) E_{13} + 16 \left(E_{44} + \frac{1}{2} E_{12} \right) E_{66} E_{55} \right) E_{34} + 12 E_{66} E_{23}^2 E_{14} + ((36 E_{66} E_{24} + 36 E_{14} E_{55}) E_{13} + 8 E_{55} E_{66} E_{14}) E_{23} + 12 E_{13} \left(E_{13} + \frac{2}{3} E_{66} \right) E_{24} E_{55} \right) E_{33} + (24 E_{34} E_{23} E_{13} + 16 E_{34}^3) E_{56}^2 + (24 E_{23}^2 E_{13}^2 + 168 E_{23} E_{34}^2 E_{13} + 48 E_{34}^4) E_{56} - 48 \left(\left(\frac{3}{2} E_{66} E_{23} + \frac{3}{2} \left(\frac{2}{9} E_{66} + E_{13} \right) E_{55} \right) E_{34}^2 + E_{13} E_{23} \left(E_{66} E_{23} + \left(E_{13} + \frac{1}{2} E_{66} \right) E_{55} \right) \right) E_{34} \right) \left(\frac{\partial^6}{\partial y^3 \partial x^3} c4u_{3,0}(x,y) \right) + \left((36 E_{22} E_{14} + 48 E_{24} E_{12} + 96 E_{44} E_{24}) E_{56} + (-24 E_{22} E_{44} - 54 E_{24}^2 - 12 E_{22} E_{12}) E_{66} - 24 \left(E_{44}^2 + \frac{1}{4} E_{12}^2 + \frac{3}{2} E_{24} E_{14} + E_{44} E_{12} \right) E_{55} \right) E_{33}^2 + \left((-16 E_{34} E_{24} + (-4 E_{12} - 8 E_{44}) E_{23} - 2 E_{13} E_{22}) E_{56}^2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
& (-96 E_{24} E_{34}^2 + ((-96 E_{44} - 48 E_{12}) E_{23} - 36 E_{13} E_{22}) E_{34} - 48 E_{24} E_{23} E_{13} - 36 E_{23}^2 E_{14}) \\
& E_{56} + \left(24 E_{66} E_{22} + 48 \left(E_{44} + \frac{1}{2} E_{12} \right) E_{55} \right) E_{34}^2 \\
& + \left((36 E_{14} E_{55} + 108 E_{66} E_{24}) E_{23} + 36 E_{24} \left(\frac{4}{9} E_{66} + E_{13} \right) E_{55} \right) E_{34} \\
& + 24 \left(E_{44} + \frac{1}{2} E_{12} \right) E_{66} E_{23}^2 \\
& + \left(\left(12 E_{66} E_{22} + 24 \left(E_{44} + \frac{1}{2} E_{12} \right) E_{55} \right) E_{13} + 8 \left(E_{44} + \frac{1}{2} E_{12} \right) E_{66} E_{55} \right) E_{23} \\
& + 2 E_{55} E_{66} E_{13} E_{22} \Big) E_{33} + (24 E_{23} E_{34}^2 + 6 E_{23}^2 E_{13}) E_{56}^2 \\
& + (84 E_{23}^2 E_{34} E_{13} + 96 E_{23} E_{34}^3) E_{56} - 24 E_{55} E_{34}^4 \\
& - 60 \left(\frac{13}{10} E_{66} E_{23} + \left(E_{13} + \frac{2}{5} E_{66} \right) E_{55} \right) E_{23} E_{34}^2 - 6 E_{13} (2 E_{66} E_{23} + E_{55} (E_{66} + E_{13})) E_{23}^2 \Big) \\
& \left(\frac{\partial^6}{\partial y^4 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left((96 E_{44} E_{14} + 36 E_{24} E_{11} + 48 E_{14} E_{12}) E_{56} \right. \\
& + (-24 E_{44}^2 - 6 E_{12}^2 - 24 E_{44} E_{12} - 36 E_{24} E_{14}) E_{66} - 24 E_{55} \left(\frac{9}{4} E_{14}^2 + E_{11} E_{44} + \frac{1}{2} E_{11} E_{12} \right) \\
& \Big) E_{33}^2 + \left((-16 E_{14} E_{34} - 2 E_{11} E_{23} - 8 E_{13} \left(E_{44} + \frac{1}{2} E_{12} \right)) E_{56}^2 + \right. \\
& \left. \left(-96 E_{14} E_{34}^2 + \left(-36 E_{11} E_{23} - 96 E_{13} \left(E_{44} + \frac{1}{2} E_{12} \right) \right) E_{34} - 48 E_{23} E_{13} E_{14} - 36 E_{24} E_{13}^2 \right) \right. \\
& E_{56} + ((24 E_{12} + 48 E_{44}) E_{66} + 24 E_{55} E_{11}) E_{34}^2 \\
& + (36 E_{66} E_{14} E_{23} + (108 E_{14} E_{55} + 36 E_{66} E_{24}) E_{13} + 16 E_{55} E_{66} E_{14}) E_{34} \\
& + (((12 E_{12} + 24 E_{44}) E_{66} + 12 E_{55} E_{11}) E_{13} + 2 E_{55} E_{66} E_{11}) E_{23} \\
& + 24 E_{13} \left(E_{13} + \frac{1}{3} E_{66} \right) \left(E_{44} + \frac{1}{2} E_{12} \right) E_{55} \Big) E_{33} + (6 E_{13}^2 E_{23} + 24 E_{34}^2 E_{13}) E_{56}^2 \\
& + (84 E_{34} E_{23} E_{13}^2 + 96 E_{34}^3 E_{13}) E_{56} - 24 E_{66} E_{34}^4 \\
& + \left(-60 E_{66} E_{23} E_{13} - 78 \left(\frac{4}{13} E_{66} + E_{13} \right) E_{13} E_{55} \right) E_{34}^2 \\
& - 12 E_{13}^2 \left(\frac{1}{2} E_{66} E_{23} + \left(E_{13} + \frac{1}{2} E_{66} \right) E_{55} \right) E_{23} \Big) \left(\frac{\partial^6}{\partial y^2 \partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\right. \\
& \left. \left(36 E_{24}^2 + 24 E_{22} E_{44} + 12 E_{22} E_{12} \right) E_{56} - 24 \left(\frac{3}{2} E_{66} E_{22} + \left(E_{44} + \frac{1}{2} E_{12} \right) E_{55} \right) E_{24} \right) E_{33}^2 + \left(\right. \\
& (-4 E_{34} E_{22} - 8 E_{23} E_{24}) E_{56}^2 \\
& + (-24 E_{34}^2 E_{22} - 72 E_{34} E_{23} E_{24} + (-24 E_{44} - 12 E_{12}) E_{23}^2 - 12 E_{23} E_{13} E_{22}) E_{56}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 24 E_{55} E_{24} E_{34}^2 + \left(\left(36 E_{66} E_{22} + 24 \left(E_{44} + \frac{1}{2} E_{12} \right) E_{55} \right) E_{23} + 4 E_{55} E_{66} E_{22} \right) E_{34} \\
& + 12 E_{24} \left(3 E_{66} E_{23} + \left(E_{13} + \frac{2}{3} E_{66} \right) E_{55} \right) E_{23} E_{33} - 12 \left(-E_{23} E_{56}^2 E_{34} \right. \\
& \left. + (-5 E_{23} E_{34}^2 - E_{23}^2 E_{13}) E_{56} + E_{34} (2 E_{55} E_{34}^2 + (3 E_{66} E_{23} + E_{55} (E_{66} + E_{13})) E_{23}) \right) E_{23} \\
& \left(\frac{\partial^6}{\partial y^5 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\right. \\
& \left(36 E_{14}^2 + 24 E_{11} E_{44} + 12 E_{11} E_{12} \right) E_{56} - 24 E_{14} \left(\left(E_{44} + \frac{1}{2} E_{12} \right) E_{66} + \frac{3}{2} E_{55} E_{11} \right) \right) E_{33}^2 + \left(\right. \\
& \left. (-8 E_{13} E_{14} - 4 E_{34} E_{11}) E_{56}^2 \right. \\
& \left. + \left(-24 E_{11} E_{34}^2 - 72 E_{14} E_{13} E_{34} - 12 E_{23} E_{13} E_{11} - 24 E_{13}^2 \left(E_{44} + \frac{1}{2} E_{12} \right) \right) E_{56} \right. \\
& \left. + 24 E_{66} E_{14} E_{34}^2 + (((12 E_{12} + 24 E_{44}) E_{66} + 36 E_{55} E_{11}) E_{13} + 4 E_{55} E_{66} E_{11}) E_{34} \right. \\
& \left. + 36 E_{13} E_{14} \left(\frac{1}{3} E_{66} E_{23} + \left(\frac{2}{9} E_{66} + E_{13} \right) E_{55} \right) \right) E_{33} + 12 E_{34} E_{13}^2 E_{56}^2 \\
& + (60 E_{13}^2 E_{34}^2 + 12 E_{13}^3 E_{23}) E_{56} \\
& - 36 E_{13} \left(\frac{2}{3} E_{66} E_{34}^2 + E_{13} \left(\frac{1}{3} E_{66} E_{23} + \left(E_{13} + \frac{1}{3} E_{66} \right) E_{55} \right) \right) E_{34} \left(\frac{\partial^6}{\partial y \partial x^5} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\right. \\
& (12 E_{56} E_{14} E_{11} - 6 E_{66} E_{14}^2 - 6 E_{55} E_{11}^2) E_{33}^2 + \\
& 12 E_{13} \left(-\frac{1}{6} E_{56}^2 E_{11} + (-E_{13} E_{14} - E_{34} E_{11}) E_{56} + E_{66} E_{34} E_{14} + E_{11} \left(\frac{1}{6} E_{66} + E_{13} \right) E_{55} \right) E_{33} \\
& + 2 E_{13}^3 E_{56}^2 + 12 E_{34} E_{56} E_{13}^3 - 6 E_{66} E_{13}^2 E_{34}^2 - 6 E_{13}^3 \left(E_{13} + \frac{1}{3} E_{66} \right) E_{55} \\
& \left(\frac{\partial^6}{\partial x^6} c4u_{3,0}(x, y) \right) + ((12 E_{56} E_{22} E_{24} - 6 E_{66} E_{22}^2 - 6 E_{55} E_{24}^2) E_{33}^2 + \\
& 2 (-E_{56}^2 E_{22} + (-6 E_{34} E_{22} - 6 E_{23} E_{24}) E_{56} + 6 E_{55} E_{34} E_{24} + E_{22} (6 E_{23} + E_{55}) E_{66}) E_{23} E_{33} \\
& - 2 E_{23}^2 (-E_{23} E_{56}^2 - 6 E_{56} E_{34} E_{23} + E_{23} (3 E_{23} + E_{55}) E_{66} + 3 E_{55} E_{34}^2) \\
& \left(\frac{\partial^6}{\partial y^6} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 20 (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \left(\right. \\
& \left(\left(-\frac{1}{2} E_{12} - E_{44} \right) E_{33} + \frac{1}{2} E_{23} E_{13} + E_{34}^2 \right) \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c2u_{3,0}(x, y) \right) \\
& \left. + (-E_{24} E_{33} + E_{23} E_{34}) \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c2u_{3,0}(x, y) \right) + \left(-\frac{1}{4} E_{33} E_{22} + \frac{1}{4} E_{23}^2 \right) \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c2u_{3,0}(x, y) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1}{4} E_{13}^2 - \frac{1}{4} E_{33} E_{11} \right) \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c2u_{3,0}(x, y) \right) + (-E_{14} E_{33} + E_{34} E_{13}) \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c2u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - \frac{1}{10} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c2RS_{32}(x, y) \right) \sqrt{5} E_{34} - \frac{1}{20} \sqrt{5} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c2RS_{32}(x, y) \right) E_{13} \\
& - \frac{1}{20} \sqrt{5} E_{23} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c2RS_{32}(x, y) \right) \Big) E_{33} \Big) / (E_{33}^2 (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66})) = RS_{30}(x, y)
\end{aligned}$$

[Gleichung $c^2*(0,3)$: (vgl. (61))

[Wir bilden den Ausdruck "tt" als:

> **tt := cvar (truncate (c^2*(gls(0,3)+diff(gls(1,1),x)+diff(gls(1,2),y)),4))=c2RS_30(x,y);**

$$\begin{aligned}
tt := & E_{11} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{1,1}(x, y) \right) + 3 E_{14} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{1,1}(x, y) \right) + 2 E_{44} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{1,1}(x, y) \right) \\
& + E_{14} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{2,1}(x, y) \right) + 2 E_{44} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{2,1}(x, y) \right) + E_{12} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{2,1}(x, y) \right) \\
& + 3 E_{24} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{2,1}(x, y) \right) + 2 \sqrt{5} E_{34} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4u_{3,2}(x, y) \right) \\
& + \sqrt{5} E_{23} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c4u_{3,2}(x, y) \right) + \sqrt{5} E_{13} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c4u_{3,2}(x, y) \right) + E_{12} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{1,1}(x, y) \right) \\
& + E_{24} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{1,1}(x, y) \right) + E_{22} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{2,1}(x, y) \right) = c2RS_{30}(x, y)
\end{aligned}$$

[Ein Blick auf Tabelle 3 verrät dann, welche Substitutionen noch durchzuführen sind, um (61) zu erhalten.

> **nebengl := simplify (subs (su_c4u_1_1, su_c4u_2_1, su_c4u_3_2, tt), size);**

$$\begin{aligned}
nebengl := & \sqrt{5} E_{13} \left(\right. \\
& \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{5} \frac{\left(E_{13} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{34} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) \sqrt{5}}{E_{33}} \right) \\
& \left. + \sqrt{5} E_{23} \left(\right. \right. \\
& \left. \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{5} \frac{\left(E_{13} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{34} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) \sqrt{5}}{E_{33}} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \right) + 2\sqrt{5} E_{34} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \right. \\
& \left. \left(\frac{1}{5} \frac{\left(E_{13} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c4u_{3,0}(x,y) \right) + 2 E_{34} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4u_{3,0}(x,y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c4u_{3,0}(x,y) \right) \right) \sqrt{5}}{E_{33}} \right) \right) \\
& + (2 E_{44} + E_{12}) \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} \left(- \left(\frac{\partial}{\partial y} c4u_{3,0}(x,y) \right) \right) \right) \\
& + (2 E_{44} + E_{12}) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} \left(- \left(\frac{\partial}{\partial x} c4u_{3,0}(x,y) \right) \right) \right) + E_{11} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(- \left(\frac{\partial}{\partial x} c4u_{3,0}(x,y) \right) \right) \right) \\
& + 3 E_{14} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} \left(- \left(\frac{\partial}{\partial x} c4u_{3,0}(x,y) \right) \right) \right) + 3 E_{24} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} \left(- \left(\frac{\partial}{\partial y} c4u_{3,0}(x,y) \right) \right) \right) \\
& + E_{14} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(- \left(\frac{\partial}{\partial y} c4u_{3,0}(x,y) \right) \right) \right) + E_{24} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} \left(- \left(\frac{\partial}{\partial x} c4u_{3,0}(x,y) \right) \right) \right) \\
& + E_{22} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} \left(- \left(\frac{\partial}{\partial y} c4u_{3,0}(x,y) \right) \right) \right) = c2RS_30(x,y)
\end{aligned}$$

Dasselbe Ergebnis bekommen wir auch, wenn wir die "hauptgl" mit c^2 multiplizieren, so wie es in der Diplomarbeit auf Seite 62 durchgeführt wird.

"test" ist die "nebengl", wie sie in der Diplomarbeit hergeleitet wird.

> test:=simplify(c^2*invvar(hauptgl)) :

Wir vergleichen "test" und "nebengl" wieder durch Bilden der Differenz. Zuerst die linken Seiten:

> simplify(truncate(op(1,test),4)-invvar(op(1,nebengl))) ;

$$\frac{1}{5} c^2$$

$$\left(2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c2RS_32(x,y) \right) E_{34} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c2RS_32(x,y) \right) E_{13} + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c2RS_32(x,y) \right) E_{23} \right) \sqrt{5} / E_{33}$$

Dies ist von der Ordnung $O(c^6)$ (vgl. Seite 52 unten).

Nun die rechten Seiten:

> op(2,test)=op(2,nebengl) ;

$$c^2 RS_30(x,y) = c2RS_30(x,y)$$

Die Gleichungen sind also im Rahmen der konsistenten Approximation zweiter Ordnung identisch.

4 Tensor Darstellung der Hauptdifferentialgleichung

Als nächstes wollen wir die Darstellung der obigen Gleichung ("hauptgl") in Tensorform (60) nachrechnen.

Zunächst benötigen wir hierfür den Kronecker- oder Einheitstensor und den

Levi-Cevita-Tensor.

```
> levi:= proc(i, j, k)
    return -1/2*(j-i)*(k-j)*(i-k);
end proc:
> kron:= proc(i, j)
    if (i=j) then return 1;
    else return 0;
    fi;
end proc:
```

Wir prüfen die Korrektheit der verwendeten Implementierung des Levi-Cevita-Tensors (vgl. Definition Seite 62)

```
> for i from 1 to 3 do
    for j from 1 to 3 do
        for k from 1 to 3 do
            if (levi(i, j, k) <> 0) then
                printf("levi (%g, %g, %g)=%g\n", i, j, k, levi(i, j, k)); fi;
            od;
        od;
    od;
```

```
levi(1,2,3)=1
levi(1,3,2)=-1
levi(2,1,3)=-1
levi(2,3,1)=1
levi(3,1,2)=1
levi(3,2,1)=-1
```

und des Kronecker Tensors

```
> for i from 1 to 3 do
    for j from 1 to 3 do
        if (kron(i, j) <> 0) then
            printf("kron (%g, %g)=%g\n", i, j, kron(i, j)); fi;
        od;
    od;
```

```
kron(1,1)=1
kron(2,2)=1
kron(3,3)=1
```

Wir stellen die Gleichung (60) auf: "gamma" müssen wir durch "Gamma" ersetzen, da "gamma" in Maple ein reservierter Ausdruck ist. Ansonsten bleiben wir wieder möglichst nahe an der Schreibweise in der Diplomarbeit. "w" nehmen wir als $w(x,y,z)$ an, so das wir versehentlich entstehende Ableitungen nach z bemerken würden. Ebenso bei "P".

```
> T:=0:
    for alpha    from 1 to 2 do
        for beta    from 1 to 2 do
            for Gamma    from 1 to 2 do
                for delta    from 1 to 2 do
                    T:=T+5*c^2*ET4[3,3,3,3]*(ET4[2,3,2,3]*ET4[1,3,1,3]-ET4[2,3,1,3]^2)*(ET4[alpha,beta,Gamma,delta]*ET4[3,3,3,3]-ET4[alpha,beta,3,3]*ET4[Gamma,delta,3,3])*
                    diffit(diffit(diffit(diffit(w(x,y,z), alpha), beta), Gamma), delta
```



```
bs (c2RS_32 (x, y) = -a*c^2/h*P [3, 2] (x, y, z) , algsubs (RS_30 (x, y) = -a/
h*P [3, 0] (x, y, z) , hauptgl) ) * (-5) *E [33]^2* (E [55]*E [66]-E [56]^2)
);
```

$$\begin{aligned}
tt := & \left(2 E_{55} E_{66} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} P_{3,2}(x, y, z) \right) E_{34} + E_{55} E_{66} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} P_{3,2}(x, y, z) \right) E_{13} \right. \\
& + E_{55} E_{66} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} P_{3,2}(x, y, z) \right) E_{23} - 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} P_{3,2}(x, y, z) \right) E_{34} E_{56}^2 \\
& - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} P_{3,2}(x, y, z) \right) E_{13} E_{56}^2 - \left. \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} P_{3,2}(x, y, z) \right) E_{23} E_{56}^2 \right) a \sqrt{5} E_{33} c^2 / h = E_{33} \\
& (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) a \sqrt{5} c^2 \\
& \left(2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} P_{3,2}(x, y, z) \right) E_{34} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} P_{3,2}(x, y, z) \right) E_{13} + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} P_{3,2}(x, y, z) \right) E_{23} \right) / h
\end{aligned}$$

Der folgende Befehl zeigt, dass linke und rechte Seite der obigen Gleichung tatsächlich gleich sind, und somit die Tensorarstellung (60) der Formel auf Seite 61 entspricht.

```
> isolate(tt, P);
```

0 = 0

- 5 Schnittgrößen in u[3,0]

Wir implementieren über eine Hilfsroutine ("help_ep") die rechte Seite von Formel (43) für die zweite Approximationsordnung (Routine: "ml").

```
> help_ep:=proc(l, r, s)
  local out;
  if (s=3) then

out:=sqrt((2*l+1)/3)*sum(sqrt(2*l+4*n+3)*c^(2*n)*u[r, l+2*n+1]
(x, y), n=0..2-l);
  else if ((s=1) or (s=2)) then
    out:=diffit(u[r, l](x, y), s);
  else
    out:=0;
    ERROR("invalid input");
  fi;
fi;
return out;
end proc;
> ml:=proc(l, i, j)
  local r, s, out;
  out:=0;
  if type(i, integer[1..3]) and type(j, integer[1..3]) and
type(l, integer) and (l>=0) then
    if (l<3) then
      for r from 1 to 3 do
```

```

    for s from 1 to 3 do
        out:=out+ET4[i, j, r, s]*help_ep(1, r, s);
    od;
od;
out:=a^1*h*c^(2*1)*out;
fi;
else ERROR("invalid input"); fi;
return out;
end proc:

```

Nun wollen wir die Schnittgrößen des Plattenproblems in $u[3,0]$ schreiben. "ml(l,i,j)" entspricht $m^{\wedge}l_{ij}$ in Formel (43), welche die Schnittgrößen zunächst in den Verschiebungskoeffizienten der Tabelle 3 ausdrückt. Dann sind für jede Schnittgröße noch Gleichungen des Reduktionsprozesses einzusetzen, um eine Darstellung nur in $u[3,0]$ zu erhalten. Das genaue Vorgehen wird auf den Seiten 63 und 64 der Diplomarbeit beschrieben. Man beachte, dass $m^{\wedge}l_{ij}=m^{\wedge}l_{ji}$ gilt. Im Folgenden arbeiten wir nacheinander alle Schnittgrößen des Plattenproblems ab:

```
> ml(0, 3, 1);
```

$$\begin{aligned}
 & h \left(\frac{1}{3} E_{66} \sqrt{3} (\sqrt{3} u_{1,1}(x, y) + \sqrt{7} c^2 u_{1,3}(x, y) + \sqrt{11} c^4 u_{1,5}(x, y)) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{3} E_{56} \sqrt{3} (\sqrt{3} u_{2,1}(x, y) + \sqrt{7} c^2 u_{2,3}(x, y) + \sqrt{11} c^4 u_{2,5}(x, y)) + E_{66} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{3,0}(x, y) \right) \right. \\
 & \quad \left. + E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{3,0}(x, y) \right) \right)
 \end{aligned}$$

```
> m031:=simplify(simplify(algsubs(su_gll1, algsubs(su_gll2, cvar(
ml(0, 3, 1))))), size);
```

$$\begin{aligned}
 m031 := & \frac{12}{5} \left(\left(\left(\left(-2 E_{44}^2 - 2 E_{44} E_{12} - 5 E_{24} E_{14} - \frac{1}{2} E_{12}^2 - \frac{1}{2} E_{22} E_{11} \right) E_{56} \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left(\frac{1}{2} E_{22} E_{14} + 2 E_{24} E_{12} + \frac{5}{2} E_{44} E_{24} \right) E_{66} + \frac{7}{2} E_{55} \left(\frac{1}{7} E_{24} E_{11} + \frac{2}{7} E_{14} E_{12} + E_{44} E_{14} \right) \right) E_{33}^2 + \right. \\
 & \quad \left. \left(\left((2 E_{12} + 4 E_{44}) E_{56} - \frac{7}{2} E_{14} E_{55} - \frac{5}{2} E_{66} E_{24} \right) E_{34}^2 + \left(\left(\frac{2}{3} E_{44} + \frac{1}{3} E_{12} \right) E_{56}^2 \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + (5 E_{14} E_{23} + 5 E_{24} E_{13}) E_{56} + \left(-\frac{1}{2} E_{66} E_{22} - \frac{7}{2} \left(\frac{2}{7} E_{12} + E_{44} \right) E_{55} \right) E_{13} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left(\left(-\frac{2}{3} E_{44} - \frac{1}{3} E_{12} \right) E_{55} - \frac{5}{2} E_{23} \left(E_{44} + \frac{4}{5} E_{12} \right) \right) E_{66} - \frac{1}{2} E_{55} E_{11} E_{23} \right) E_{34} \right. \\
 & \quad \left. + \left(\frac{5}{12} E_{24} E_{13} + \frac{1}{4} E_{14} E_{23} \right) E_{56}^2 + \left(\frac{1}{2} E_{22} E_{13}^2 + 2 \left(\frac{1}{2} E_{12} + E_{44} \right) E_{23} E_{13} + \frac{1}{2} E_{23}^2 E_{11} \right) E_{56} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2} E_{55} E_{24} E_{13}^2 + \left(-2 \left(E_{23} + \frac{5}{24} E_{55} \right) E_{24} E_{66} - E_{55} E_{23} E_{14} \right) E_{13} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2} E_{66} E_{23} E_{14} \left(\frac{1}{2} E_{55} + E_{23} \right) \right) E_{33} - 2 E_{56} E_{34}^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{2}{3} E_{56}^2 + \frac{7}{2} E_{55} E_{13} + \frac{5}{2} E_{66} \left(E_{23} + \frac{4}{15} E_{55} \right) \right) E_{34}^3 - 7 E_{56} E_{23} E_{34}^2 E_{13} \\
& - \left(E_{56}^2 - \frac{3}{2} E_{55} E_{13} - \frac{5}{2} \left(E_{23} + \frac{2}{5} E_{55} \right) E_{66} \right) E_{23} E_{13} E_{34} - E_{56} E_{23}^2 E_{13}^2 \\
& \left(\frac{\partial^5}{\partial y^3 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\left((-2 E_{24} E_{11} - 3 E_{14} E_{12} - 5 E_{44} E_{14}) E_{56} \right. \right. \\
& + \left. \left(2 E_{24} E_{14} + E_{44}^2 + \frac{3}{2} E_{44} E_{12} + \frac{1}{2} E_{12}^2 \right) E_{66} + \frac{3}{2} E_{55} \left(E_{11} E_{44} + 2 E_{14}^2 + \frac{1}{3} E_{11} E_{12} \right) \right) E_{33}^2 \\
& + \left(\left(5 E_{56} E_{14} + \left(-2 E_{44} - \frac{3}{2} E_{12} \right) E_{66} - \frac{3}{2} E_{55} E_{11} \right) E_{34}^2 + \left(\frac{5}{6} E_{56}^2 E_{14} \right. \right. \\
& + \left. \left((5 E_{44} + 3 E_{12}) E_{13} + 2 E_{11} E_{23} \right) E_{56} + (-6 E_{14} E_{55} - 2 E_{66} E_{24}) E_{13} \right. \\
& - \left. 2 \left(E_{23} + \frac{5}{12} E_{55} \right) E_{66} E_{14} \right) E_{34} + \left(\left(\frac{1}{4} E_{12} + \frac{1}{2} E_{44} \right) E_{13} + \frac{1}{12} E_{11} E_{23} \right) E_{56}^2 \\
& + \left(2 E_{24} E_{13}^2 + 3 E_{23} E_{13} E_{14} \right) E_{56} - \frac{3}{2} E_{55} \left(E_{44} + \frac{1}{3} E_{12} \right) E_{13}^2 \\
& + \left(\left(\left(-\frac{1}{4} E_{12} - \frac{1}{2} E_{44} \right) E_{55} - \frac{3}{2} \left(E_{44} + \frac{2}{3} E_{12} \right) E_{23} \right) E_{66} - \frac{1}{2} E_{55} E_{11} E_{23} \right) E_{13} \\
& - \frac{1}{12} E_{55} E_{66} E_{11} E_{23} \Big) E_{33} + E_{66} E_{34}^4 - 5 E_{56} E_{34}^3 E_{13} \\
& - \frac{4}{3} E_{13} \left(E_{56}^2 - \frac{27}{8} E_{55} E_{13} - \frac{21}{8} E_{66} \left(E_{23} + \frac{8}{21} E_{55} \right) \right) E_{34}^2 - 5 E_{56} E_{34} E_{13}^2 E_{23} \\
& - \frac{1}{3} E_{23} E_{13}^2 \left(E_{56}^2 - \frac{3}{2} E_{55} E_{13} - \frac{3}{2} \left(E_{23} + \frac{2}{3} E_{55} \right) E_{66} \right) \left(\frac{\partial^5}{\partial y^2 \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\left(\right. \right. \\
& (-E_{22} E_{14} - E_{24} E_{12} - 3 E_{44} E_{24}) E_{56} + \left. \left(\frac{1}{2} E_{22} E_{44} + \frac{1}{2} E_{22} E_{12} + \frac{3}{2} E_{24}^2 \right) E_{66} \right. \\
& + \left. E_{55} \left(\frac{1}{2} E_{44} E_{12} + E_{24} E_{14} + E_{44}^2 \right) \right) E_{33}^2 + \left(\right. \\
& \left(3 E_{24} E_{56} - \frac{1}{2} E_{66} E_{22} - 2 E_{55} \left(\frac{1}{4} E_{12} + E_{44} \right) \right) E_{34}^2 + \left. \left(\frac{1}{2} E_{56}^2 E_{24} \right. \right. \\
& + \left. \left(E_{13} E_{22} + 3 E_{23} \left(E_{44} + \frac{1}{3} E_{12} \right) \right) E_{56} - E_{55} E_{24} E_{13} - 3 \left(\frac{1}{6} E_{55} + E_{23} \right) E_{24} E_{66} - E_{55} E_{23} E_{14} \right. \\
& \left. \right) E_{34} + \left(\frac{1}{12} E_{13} E_{22} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} E_{12} + E_{44} \right) E_{23} \right) E_{56}^2 + \left(E_{23}^2 E_{14} + E_{24} E_{23} E_{13} \right) E_{56} \\
& + \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} E_{55} + E_{23} \right) E_{22} E_{66} - \frac{1}{2} E_{55} E_{44} E_{23} \right) E_{13} \\
& - \frac{1}{2} E_{66} \left(\left(\frac{1}{3} E_{44} + \frac{1}{6} E_{12} \right) E_{55} + (E_{44} + E_{12}) E_{23} \right) E_{23} \Big) E_{33} + E_{55} E_{34}^4 - 3 E_{56} E_{34}^3 E_{23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{3}E_{23}\left(E_{56}^2 - \frac{9}{4}E_{55}E_{13} - 3E_{66}\left(E_{23} + \frac{1}{3}E_{55}\right)\right)E_{34}^2 - 2E_{56}E_{34}E_{13}E_{23}^2 \\
& -\frac{1}{6}\left(E_{56}^2 - 3E_{66}\left(E_{23} + \frac{1}{3}E_{55}\right)\right)E_{23}^2E_{13}\left(\frac{\partial^5}{\partial y^4\partial x}c4u_{3,0}(x,y)\right) + \left(\right. \\
& \left. \left(\left(-\frac{5}{2}E_{14}^2 - \frac{3}{2}E_{11}E_{44} - E_{11}E_{12}\right)E_{56} + \frac{3}{2}\left(\left(E_{44} + \frac{2}{3}E_{12}\right)E_{66} + \frac{5}{3}E_{55}E_{11}\right)E_{14}\right)E_{33}^2 + \left(\right. \right. \\
& \left. \left. \left(\frac{3}{2}E_{56}E_{11} - \frac{3}{2}E_{66}E_{14}\right)E_{34}^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{1}{4}E_{56}^2E_{11} + 5E_{56}E_{13}E_{14} + \left(\left(-\frac{3}{2}E_{44} - E_{12}\right)E_{66} - \frac{5}{2}E_{55}E_{11}\right)E_{13} - \frac{1}{4}E_{55}E_{66}E_{11}\right)E_{34} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{3}{2}\left(\right. \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{7}{18}E_{56}^2E_{14} + \left(\left(E_{44} + \frac{2}{3}E_{12}\right)E_{13} + \frac{2}{3}E_{11}E_{23}\right)E_{56} - \frac{5}{3}E_{14}\left(E_{55}E_{13} + \frac{2}{5}E_{66}\left(\frac{7}{12}E_{55} + E_{23}\right)\right) \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \right)E_{13}\right)E_{33} - \frac{5}{6}\left(-\frac{9}{5}E_{66}E_{34}^3 + \frac{24}{5}E_{13}E_{56}E_{34}^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + E_{13}\left(E_{56}^2 - 3E_{55}E_{13} - \frac{6}{5}E_{66}\left(\frac{5}{6}E_{55} + E_{23}\right)\right)E_{34} + \frac{6}{5}E_{56}E_{13}^2E_{23}\right)E_{13} \right. \\
& \left. \left(\frac{\partial^5}{\partial y\partial x^4}c4u_{3,0}(x,y)\right) + \left(\left(\left(-\frac{1}{2}E_{24}^2 - \frac{1}{2}E_{22}E_{44}\right)E_{56} + \frac{1}{2}E_{24}\left(E_{66}E_{22} + E_{44}E_{55}\right)\right)E_{33}^2 + \left(\right. \right. \\
& \left. \left. \left(-\frac{1}{2}E_{55}E_{24} + \frac{1}{2}E_{22}E_{56}\right)E_{34}^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{1}{12}E_{56}^2E_{22} + E_{56}E_{23}E_{24} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}E_{55} + E_{23}\right)E_{22}E_{66} - \frac{1}{2}E_{55}E_{44}E_{23}\right)E_{34} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2}E_{23}\left(\frac{1}{6}E_{56}^2E_{24} + E_{56}E_{44}E_{23} - \left(\frac{1}{6}E_{55} + E_{23}\right)E_{24}E_{66}\right)\right)E_{33} \right. \\
& \left. - \frac{1}{6}E_{34}E_{23}\left(-3E_{55}E_{34}^2 + 6E_{56}E_{34}E_{23} + \left(E_{56}^2 - 3E_{66}\left(E_{23} + \frac{1}{3}E_{55}\right)\right)E_{23}\right) \right. \\
& \left. \left(\frac{\partial^5}{\partial y^5}c4u_{3,0}(x,y)\right) + \left(\left(-E_{56}E_{14}E_{11} + \frac{1}{2}E_{66}E_{14}^2 + \frac{1}{2}E_{55}E_{11}^2\right)E_{33}^2 + \right. \\
& \left. \frac{1}{6}\left(\left(6E_{56}E_{11} - 6E_{66}E_{14}\right)E_{34} + E_{56}^2E_{11} + 6E_{56}E_{13}E_{14} - 6E_{11}\left(\frac{1}{6}E_{66} + E_{13}\right)E_{55}\right)E_{13}E_{33} \right. \\
& \left. - \frac{1}{6}\left(-3E_{66}E_{34}^2 + 6E_{13}E_{34}E_{56} + \left(E_{56}^2 - 3E_{55}\left(E_{13} + \frac{1}{3}E_{66}\right)\right)E_{13}\right)E_{13}^2 \right. \\
& \left. \left(\frac{\partial^5}{\partial x^5}c4u_{3,0}(x,y)\right) - \frac{5}{6}\left(E_{56}^2 - E_{55}E_{66}\right)\left(\right. \right. \\
& \left. \left. \left(\left(\frac{1}{2}E_{12} + E_{44}\right)E_{33} - E_{34}^2 - \frac{1}{2}E_{23}E_{13}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial y^2\partial x}c2u_{3,0}(x,y)\right) \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1}{2} E_{33} E_{11} - \frac{1}{2} E_{13}^2 \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c2u_{3,0}(x, y) \right) + \left(-\frac{1}{2} E_{23} E_{34} + \frac{1}{2} E_{24} E_{33} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c2u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + \left(-\frac{3}{2} E_{34} E_{13} + \frac{3}{2} E_{14} E_{33} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c2u_{3,0}(x, y) \right) + \frac{1}{10} E_{13} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2RS_32(x, y) \right) \sqrt{5} \\
& + \frac{1}{10} E_{34} \sqrt{5} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2RS_32(x, y) \right) \left(E_{33} \right) h / \left((E_{56}^2 - E_{55} E_{66}) E_{33}^2 \right)
\end{aligned}$$

> **ml(0, 3, 2);**

$$\begin{aligned}
& h \left(\frac{1}{3} E_{56} \sqrt{3} (\sqrt{3} u_{1,1}(x, y) + \sqrt{7} c^2 u_{1,3}(x, y) + \sqrt{11} c^4 u_{1,5}(x, y)) \right. \\
& \quad + \frac{1}{3} E_{55} \sqrt{3} (\sqrt{3} u_{2,1}(x, y) + \sqrt{7} c^2 u_{2,3}(x, y) + \sqrt{11} c^4 u_{2,5}(x, y)) + E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{3,0}(x, y) \right) \\
& \quad \left. + E_{55} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{3,0}(x, y) \right) \right)
\end{aligned}$$

> **m032:=simplify(simplify(algsubs(su_g111, algsubs(su_g112, cvar(ml(0, 3, 2))))), size);**

$$\begin{aligned}
m032 := & -\frac{12}{5} h \left(\left(\left(\left(-2 E_{44}^2 - 2 E_{44} E_{12} - 5 E_{24} E_{14} - \frac{1}{2} E_{12}^2 - \frac{1}{2} E_{22} E_{11} \right) E_{56} \right. \right. \right. \\
& + \left(2 E_{14} E_{12} + \frac{5}{2} E_{44} E_{14} + \frac{1}{2} E_{24} E_{11} \right) E_{55} + \frac{7}{2} E_{66} \left(E_{44} E_{24} + \frac{1}{7} E_{22} E_{14} + \frac{2}{7} E_{24} E_{12} \right) \left. \right) E_{33}^2 + \\
& \left(\left((2 E_{12} + 4 E_{44}) E_{56} - \frac{7}{2} E_{66} E_{24} - \frac{5}{2} E_{14} E_{55} \right) E_{34}^2 + \left(\left(\frac{2}{3} E_{44} + \frac{1}{3} E_{12} \right) E_{56}^2 \right. \right. \\
& + (5 E_{14} E_{23} + 5 E_{24} E_{13}) E_{56} + \left. \left. \left(-\frac{1}{2} E_{55} E_{11} - \frac{7}{2} E_{66} \left(\frac{2}{7} E_{12} + E_{44} \right) \right) E_{23} \right. \right. \\
& + \left(\left(-\frac{2}{3} E_{44} - \frac{1}{3} E_{12} \right) E_{66} - \frac{5}{2} \left(E_{44} + \frac{4}{5} E_{12} \right) E_{13} \right) E_{55} - \frac{1}{2} E_{66} E_{13} E_{22} \left. \right) E_{34} \\
& + \left(\frac{5}{12} E_{14} E_{23} + \frac{1}{4} E_{24} E_{13} \right) E_{56}^2 + \left(\frac{1}{2} E_{22} E_{13}^2 + 2 \left(\frac{1}{2} E_{12} + E_{44} \right) E_{23} E_{13} + \frac{1}{2} E_{23}^2 E_{11} \right) E_{56} \\
& - \frac{1}{2} E_{66} E_{23}^2 E_{14} + \left(-\frac{5}{12} \left(E_{66} + \frac{24}{5} E_{13} \right) E_{14} E_{55} - E_{66} E_{24} E_{13} \right) E_{23} \\
& - \frac{1}{4} E_{55} E_{24} E_{13} (2 E_{13} + E_{66}) \left. \right) E_{33} - 2 E_{56} E_{34}^4 \\
& + \left(-\frac{2}{3} E_{56}^2 + \frac{7}{2} E_{66} E_{23} + \frac{2}{3} \left(E_{66} + \frac{15}{4} E_{13} \right) E_{55} \right) E_{34}^3 - 7 E_{56} E_{23} E_{34}^2 E_{13} \\
& + \frac{3}{2} E_{13} \left(-\frac{2}{3} E_{56}^2 + E_{66} E_{23} + \frac{2}{3} E_{55} \left(\frac{5}{2} E_{13} + E_{66} \right) \right) E_{23} E_{34} - E_{56} E_{23}^2 E_{13}^2 \\
& \left(\frac{\partial^5}{\partial y^2 \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\left((-2 E_{22} E_{14} - 5 E_{44} E_{24} - 3 E_{24} E_{12}) E_{56} \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(2 E_{24} E_{14} + E_{44}^2 + \frac{3}{2} E_{44} E_{12} + \frac{1}{2} E_{12}^2 \right) E_{55} + \frac{3}{2} E_{66} \left(\frac{1}{3} E_{22} E_{12} + E_{22} E_{44} + 2 E_{24}^2 \right) \Big) E_{33}^2 \\
& + \left(\left(5 E_{24} E_{56} + \left(-2 E_{44} - \frac{3}{2} E_{12} \right) E_{55} - \frac{3}{2} E_{66} E_{22} \right) E_{34}^2 + \left(\frac{5}{6} E_{56}^2 E_{24} \right. \right. \\
& + \left. \left. \left(5 E_{44} + 3 E_{12} \right) E_{23} + 2 E_{13} E_{22} \right) E_{56} + \left(-6 E_{66} E_{24} - 2 E_{14} E_{55} \right) E_{23} \right. \\
& - \left. \frac{5}{6} \left(\frac{12}{5} E_{13} + E_{66} \right) E_{55} E_{24} \right) E_{34} + \left(\left(\frac{1}{4} E_{12} + \frac{1}{2} E_{44} \right) E_{23} + \frac{1}{12} E_{13} E_{22} \right) E_{56}^2 \\
& + \left(2 E_{23}^2 E_{14} + 3 E_{24} E_{23} E_{13} \right) E_{56} - \frac{3}{2} E_{66} \left(E_{44} + \frac{1}{3} E_{12} \right) E_{23}^2 \\
& + \left(\left(\left(-\frac{1}{4} E_{12} - \frac{1}{2} E_{44} \right) E_{66} - \frac{3}{2} \left(E_{44} + \frac{2}{3} E_{12} \right) E_{13} \right) E_{55} - \frac{1}{2} E_{66} E_{13} E_{22} \right) E_{23} \\
& - \left. \frac{1}{12} E_{55} E_{66} E_{13} E_{22} \right) E_{33} + E_{55} E_{34}^4 - 5 E_{56} E_{34}^3 E_{23} \\
& + \frac{9}{2} \left(-\frac{8}{27} E_{56}^2 + E_{66} E_{23} + \frac{8}{27} \left(E_{66} + \frac{21}{8} E_{13} \right) E_{55} \right) E_{23} E_{34}^2 - 5 E_{56} E_{34} E_{13} E_{23}^2 \\
& + \frac{1}{2} E_{13} \left(-\frac{2}{3} E_{56}^2 + E_{66} E_{23} + \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} E_{13} + E_{66} \right) E_{55} \right) E_{23}^2 \left(\frac{\partial^5}{\partial y^3 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\left(\right. \right. \\
& \left. \left. \left(-E_{24} E_{11} - E_{14} E_{12} - 3 E_{44} E_{14} \right) E_{56} + \left(\frac{1}{2} E_{11} E_{44} + \frac{1}{2} E_{11} E_{12} + \frac{3}{2} E_{14}^2 \right) E_{55} \right. \right. \\
& + \left. \left. \left(\frac{1}{2} E_{44} E_{12} + E_{24} E_{14} + E_{44}^2 \right) E_{66} \right) E_{33}^2 + \left(\right. \\
& \left. \left(3 E_{56} E_{14} - \frac{1}{2} E_{55} E_{11} - 2 E_{66} \left(\frac{1}{4} E_{12} + E_{44} \right) \right) E_{34}^2 + \left(\frac{1}{2} E_{56}^2 E_{14} \right. \right. \\
& + \left. \left. \left(E_{11} E_{23} + 3 \left(E_{44} + \frac{1}{3} E_{12} \right) E_{13} \right) E_{56} - E_{66} E_{14} E_{23} - \frac{1}{2} E_{14} \left(E_{66} + 6 E_{13} \right) E_{55} - E_{66} E_{24} E_{13} \right. \right. \\
& \left. \left. \right) E_{34} + \left(\frac{1}{12} E_{11} E_{23} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} E_{12} + E_{44} \right) E_{13} \right) E_{56}^2 + \left(E_{24} E_{13}^2 + E_{23} E_{13} E_{14} \right) E_{56} \right. \\
& + \left. \left(-\frac{1}{12} E_{11} \left(E_{66} + 6 E_{13} \right) E_{55} - \frac{1}{2} E_{66} E_{44} E_{13} \right) E_{23} \right. \\
& - \left. \frac{1}{6} \left(\left(\frac{1}{2} E_{12} + E_{44} \right) E_{66} + 3 \left(E_{44} + E_{12} \right) E_{13} \right) E_{55} E_{13} \right) E_{33} + E_{66} E_{34}^4 - 3 E_{56} E_{34}^3 E_{13} \\
& + \frac{3}{2} E_{13} \left(-\frac{4}{9} E_{56}^2 + E_{66} E_{23} + \frac{4}{9} E_{55} \left(3 E_{13} + E_{66} \right) \right) E_{34}^2 - 2 E_{56} E_{34} E_{13}^2 E_{23} \\
& + \frac{1}{6} \left(-E_{56}^2 + E_{55} \left(3 E_{13} + E_{66} \right) \right) E_{13}^2 E_{23} \left(\frac{\partial^5}{\partial y \partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\right. \\
& \left. \left(\left(-E_{22} E_{12} - \frac{5}{2} E_{24}^2 - \frac{3}{2} E_{22} E_{44} \right) E_{56} + \frac{3}{2} \left(\left(E_{44} + \frac{2}{3} E_{12} \right) E_{55} + \frac{5}{3} E_{66} E_{22} \right) E_{24} \right) E_{33}^2 + \left(\right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{3}{2} E_{55} E_{24} + \frac{3}{2} E_{22} E_{56} \right) E_{34}^2 \\
& + \left(\frac{1}{4} E_{56}^2 E_{22} + 5 E_{56} E_{23} E_{24} + \left(\left(-\frac{3}{2} E_{44} - E_{12} \right) E_{55} - \frac{5}{2} E_{66} E_{22} \right) E_{23} - \frac{1}{4} E_{55} E_{66} E_{22} \right) E_{34} \\
& + \frac{3}{2} \left(\frac{7}{18} E_{56}^2 E_{24} + \left(\left(E_{44} + \frac{2}{3} E_{12} \right) E_{23} + \frac{2}{3} E_{13} E_{22} \right) E_{56} \right. \\
& \left. - \frac{5}{3} \left(E_{66} E_{23} + \frac{7}{30} E_{55} \left(E_{66} + \frac{12}{7} E_{13} \right) \right) E_{24} \right) E_{23} \right) E_{33} + \frac{3}{2} \left(E_{55} E_{34}^3 - \frac{8}{3} E_{23} E_{56} E_{34}^2 \right. \\
& \left. + \frac{5}{3} E_{23} \left(-\frac{1}{3} E_{56}^2 + E_{66} E_{23} + \frac{1}{3} E_{55} \left(\frac{6}{5} E_{13} + E_{66} \right) \right) E_{34} - \frac{2}{3} E_{56} E_{13} E_{23}^2 \right) E_{23} \\
& \left(\frac{\partial^5}{\partial y^4 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\left(\left(\left(-\frac{1}{2} E_{11} E_{44} - \frac{1}{2} E_{14}^2 \right) E_{56} + \frac{1}{2} E_{14} (E_{44} E_{66} + E_{55} E_{11}) \right) E_{33}^2 + \left(\right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left(-\frac{1}{2} E_{66} E_{14} + \frac{1}{2} E_{56} E_{11} \right) E_{34}^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{1}{12} E_{56}^2 E_{11} + E_{56} E_{13} E_{14} - \frac{1}{12} E_{11} (E_{66} + 6 E_{13}) E_{55} - \frac{1}{2} E_{66} E_{44} E_{13} \right) E_{34} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} E_{56}^2 E_{14} + E_{44} E_{13} E_{56} - \frac{1}{6} E_{14} (E_{66} + 6 E_{13}) E_{55} \right) E_{13} \right) E_{33} \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \left(E_{66} E_{34}^2 - 2 E_{13} E_{34} E_{56} + \frac{1}{3} (-E_{56}^2 + E_{55} (3 E_{13} + E_{66})) E_{13} \right) E_{34} E_{13} \right) \\
& \left(\frac{\partial^5}{\partial x^5} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\left(-E_{56} E_{24} E_{22} + \frac{1}{2} E_{55} E_{24}^2 + \frac{1}{2} E_{66} E_{22}^2 \right) E_{33}^2 \right. \\
& \left. + \left((E_{22} E_{56} - E_{55} E_{24}) E_{34} + \frac{1}{6} E_{56}^2 E_{22} + E_{56} E_{23} E_{24} - \left(\frac{1}{6} E_{55} + E_{23} \right) E_{22} E_{66} \right) E_{23} E_{33} \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \left(E_{55} E_{34}^2 - 2 E_{56} E_{34} E_{23} + \left(-\frac{1}{3} E_{56}^2 + E_{66} \left(E_{23} + \frac{1}{3} E_{55} \right) \right) E_{23} \right) E_{23}^2 \right) \\
& \left(\frac{\partial^5}{\partial y^5} c4u_{3,0}(x, y) \right) - \frac{5}{6} (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) E_{33} \left(\right. \\
& \left(\left(-\frac{1}{2} E_{12} - E_{44} \right) E_{33} + E_{34}^2 + \frac{1}{2} E_{23} E_{13} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c2u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + \left(-\frac{1}{2} E_{14} E_{33} + \frac{1}{2} E_{34} E_{13} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c2u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + \left(\frac{3}{2} E_{23} E_{34} - \frac{3}{2} E_{24} E_{33} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c2u_{3,0}(x, y) \right) + \left(-\frac{1}{2} E_{22} E_{33} + \frac{1}{2} E_{23}^2 \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c2u_{3,0}(x, y) \right) \\
& \left. - \frac{1}{10} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2RS_{32}(x, y) \right) E_{23} \sqrt{5} - \frac{1}{10} \sqrt{5} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2RS_{32}(x, y) \right) E_{34} \right) / \left(\right. \\
& \left. (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) E_{33}^2 \right)
\end{aligned}$$

> **ml (2, 3, 1) ;**

$$a^2 h c^4 \left(\frac{1}{3} E_{66} \sqrt{15} \sqrt{7} u_{1,3}(x, y) + \frac{1}{3} E_{56} \sqrt{15} \sqrt{7} u_{2,3}(x, y) + E_{66} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{3,2}(x, y) \right) + E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{3,2}(x, y) \right) \right)$$

> **m231 := simplify(simplify(subs(su_c4u_1_3, su_c4u_2_3, algsubs(su_c4u_3_2, cvar(ml(2, 3, 1))))), size) ;**

$$m231 := \frac{1}{5} \sqrt{5} \left(((2 E_{44} + E_{12}) E_{33} - 2 E_{34}^2 - E_{23} E_{13}) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + (3 E_{14} E_{33} - 3 E_{34} E_{13}) \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + (E_{33} E_{11} - E_{13}^2) \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) - \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) (E_{23} E_{34} - E_{24} E_{33}) \right) h a^2 / E_{33}$$

> **ml (2, 3, 2) ;**

$$a^2 h c^4 \left(\frac{1}{3} E_{56} \sqrt{15} \sqrt{7} u_{1,3}(x, y) + \frac{1}{3} E_{55} \sqrt{15} \sqrt{7} u_{2,3}(x, y) + E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{3,2}(x, y) \right) + E_{55} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{3,2}(x, y) \right) \right)$$

> **m232 := simplify(simplify(subs(su_c4u_1_3, su_c4u_2_3, algsubs(su_c4u_3_2, cvar(ml(2, 3, 2))))), size) ;**

$$m232 := \frac{1}{5} \sqrt{5} a^2 \left(((2 E_{44} + E_{12}) E_{33} - 2 E_{34}^2 - E_{23} E_{13}) \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + (E_{14} E_{33} - E_{34} E_{13}) \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + (E_{22} E_{33} - E_{23}^2) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) - 3 \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) (E_{23} E_{34} - E_{24} E_{33}) \right) h / E_{33}$$

> **ml (1, 3, 3) ;**

$$a h c^2 \left(E_{13} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{1,1}(x, y) \right) + E_{34} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{1,1}(x, y) \right) + E_{34} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{2,1}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{2,1}(x, y) \right) + E_{33} (\sqrt{5} u_{3,2}(x, y) + \sqrt{9} c^2 u_{3,4}(x, y)) \right)$$

> **m133 := simplify(algsubs(su_c2u_2_1, algsubs(su_c2u_1_1, algsubs(su_gl23, cvar(ml(1, 3, 3)))))) ;**

$$m133 := \frac{1}{5} \left(-4 E_{34}^2 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) - \sqrt{5} c2RS_{32}(x, y) E_{33} - 4 E_{34} E_{13} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{12} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + E_{11} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} + 4 E_{14} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& + 4 E_{24} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} - 2 E_{13} E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - E_{23}^2 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 4 E_{44} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} + E_{22} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& - 4 E_{34} E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) - E_{13}^2 \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) \Big) h a / E_{33}
\end{aligned}$$

> **simplify(algsubs(nebengl, algsubs(su_c2u_2_1, algsubs(su_c2u_1_1, algsubs(su_gl23, cvar(ml(1, 3, 3))))))));**

$$-\frac{1}{5} (c2RS_{30}(x, y) + \sqrt{5} c2RS_{32}(x, y)) a h$$

> **ml(1, 1, 1);**

$$\begin{aligned}
& a h c^2 \left(E_{11} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{1,1}(x, y) \right) + E_{14} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{1,1}(x, y) \right) + E_{14} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{2,1}(x, y) \right) + E_{12} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{2,1}(x, y) \right) \right. \\
& \left. + E_{13} (\sqrt{5} u_{3,2}(x, y) + \sqrt{9} c^2 u_{3,4}(x, y)) \right)
\end{aligned}$$

> **m111:=simplify(simplify(algsubs(su_c2u_2_1, algsubs(su_c2u_1_1, algsubs(su_gl23, cvar(ml(1, 1, 1)))))), size);**

$$\begin{aligned}
m111 := & -\frac{1}{5} \left(\left((30 E_{12} + 24 E_{44}) E_{14} + 18 E_{24} E_{11} \right) E_{56} \right. \\
& + (-18 E_{24} E_{14} - 6 E_{12} (2 E_{44} + E_{12})) E_{66} - 6 (3 E_{14}^2 + E_{11} (2 E_{44} + E_{12})) E_{55} \Big) E_{33}^2 + \left(\right. \\
& (-18 E_{24} E_{56} + 6 E_{55} (2 E_{44} + E_{12})) E_{13}^2 + ((-4 E_{44} - 3 E_{12}) E_{56}^2 \\
& + ((-24 E_{44} - 30 E_{12}) E_{34} - 30 E_{14} E_{23}) E_{56} + (36 E_{14} E_{55} + 18 E_{66} E_{24}) E_{34} \\
& + ((3 E_{12} + 4 E_{44}) E_{55} + 12 (E_{44} + E_{12}) E_{23}) E_{66} + 6 E_{55} E_{11} E_{23} \Big) E_{13} \\
& + (-4 E_{14} E_{34} - E_{11} E_{23}) E_{56}^2 + (-18 E_{11} E_{23} E_{34} - 24 E_{14} E_{34}^2) E_{56} \\
& + (12 E_{66} E_{12} + 12 E_{55} E_{11}) E_{34}^2 + 4 \left(\frac{9}{2} E_{23} + E_{55} \right) E_{14} E_{66} E_{34} + E_{55} E_{66} E_{11} E_{23} \Big) E_{33} + 4 \\
& E_{13} \left(-\frac{3}{2} E_{55} E_{13}^2 E_{23} \right. \\
& + \left(E_{23} E_{56}^2 + 12 E_{56} E_{34} E_{23} - \frac{15}{2} E_{55} E_{34}^2 - E_{23} \left(\frac{3}{2} E_{23} + E_{55} \right) E_{66} \right) E_{13} \\
& + 2 \left(E_{56}^2 + 3 E_{34} E_{56} - \left(E_{55} + \frac{15}{4} E_{23} \right) E_{66} \right) E_{34}^2 \Big) \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\right. \\
& (24 E_{24} E_{14} + 12 E_{44} E_{12} + 6 E_{22} E_{11} + 6 E_{12}^2) E_{56} + (-6 E_{22} E_{14} - 18 E_{24} E_{12}) E_{66}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -6((2E_{44} + E_{12})E_{14} + E_{24}E_{11})E_{55}E_{33}^2 + \left((6E_{55}E_{24} - 6E_{22}E_{56})E_{13}^2 + \left(-4E_{56}^2E_{24} \right. \right. \\
& + (-24E_{34}E_{24} - 12(E_{44} + E_{12})E_{23})E_{56} + (6E_{66}E_{22} + 6E_{55}(2E_{44} + E_{12}))E_{34} \\
& + 4\left(\frac{9}{2}E_{23} + E_{55}\right)E_{24}E_{66} + 6E_{55}E_{23}E_{14} \left. \right) E_{13} + (-2E_{14}E_{23} - 2E_{12}E_{34})E_{56}^2 \\
& + (-6E_{23}^2E_{11} - 24E_{14}E_{23}E_{34} - 12E_{12}E_{34}^2)E_{56} + 12E_{55}E_{14}E_{34}^2 \\
& + (2E_{12}(9E_{23} + E_{55})E_{66} + 6E_{55}E_{11}E_{23})E_{34} + 2E_{66}E_{23}E_{14}(3E_{23} + E_{55}) \left. \right) E_{33} + 8 \left(\right. \\
& \left. \left(\frac{3}{2}E_{56}E_{23}^2 - \frac{3}{2}E_{23}E_{34}E_{55} \right) E_{13} \right. \\
& + E_{34} \left(E_{23}E_{56}^2 + \frac{9}{2}E_{56}E_{34}E_{23} - \frac{3}{2}E_{55}E_{34}^2 - E_{23}(3E_{23} + E_{55})E_{66} \right) \left. \right) E_{13} \left. \right) \\
& \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\right. \\
& ((24E_{14}^2 + 12E_{11}(E_{44} + E_{12}))E_{56} - 12((E_{44} + E_{12})E_{66} + 2E_{55}E_{11})E_{14})E_{33}^2 + (\\
& ((-12E_{44} - 12E_{12})E_{56} + 24E_{14}E_{55})E_{13}^2 + (-6E_{56}^2E_{14} + (-48E_{14}E_{34} - 12E_{11}E_{23})E_{56} \\
& + ((12E_{12} + 12E_{44})E_{66} + 24E_{55}E_{11})E_{34} + 6E_{66}E_{14}(2E_{23} + E_{55}))E_{13} \\
& - 2(E_{56}^2E_{11} + 6E_{34}E_{11}E_{56} - E_{66}(6E_{14}E_{34} + E_{55}E_{11}))E_{34})E_{33} + 8E_{13} \left(\right. \\
& \left. \left(\frac{3}{2}E_{23}E_{56} - 3E_{55}E_{34} \right) E_{13}^2 + E_{34} \left(E_{56}^2 + \frac{9}{2}E_{34}E_{56} - \left(\frac{3}{2}E_{23} + E_{55} \right) E_{66} \right) E_{13} - \frac{3}{2}E_{66}E_{34}^3 \right) \\
& \left. \right) \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + (((6E_{24}E_{12} + 6E_{22}E_{14})E_{56} - 6E_{55}E_{14}E_{24} - 6E_{66}E_{12}E_{22})E_{33}^2 \\
& + ((-E_{56}^2E_{22} + (-6E_{23}E_{24} - 6E_{34}E_{22})E_{56} + 6E_{55}E_{34}E_{24} + E_{22}(6E_{23} + E_{55})E_{66})E_{13} \\
& - (E_{12}E_{56}^2 + (6E_{12}E_{34} + 6E_{14}E_{23})E_{56} - 6E_{55}E_{14}E_{34} - E_{66}E_{12}(6E_{23} + E_{55}))E_{23})E_{33} \\
& + 2E_{23}E_{13}(E_{23}E_{56}^2 + 6E_{56}E_{34}E_{23} - 3E_{55}E_{34}^2 - E_{23}(3E_{23} + E_{55})E_{66})) \\
& \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) + ((12E_{56}E_{14}E_{11} - 6E_{66}E_{14}^2 - 6E_{55}E_{11}^2)E_{33}^2 - 2 \\
& ((-6E_{55}E_{11} + 6E_{56}E_{14})E_{13} + E_{56}^2E_{11} + 6E_{34}E_{11}E_{56} - E_{66}(6E_{14}E_{34} + E_{55}E_{11}))E_{13} \\
& E_{33} + 2(-3E_{55}E_{13}^2 + (6E_{34}E_{56} - E_{55}E_{66} + E_{56}^2)E_{13} - 3E_{66}E_{34}^2)E_{13}^2) \\
& \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left((-10E_{34}E_{13} + 10E_{14}E_{33}) \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c2u_{3,0}(x, y) \right) \right. \\
& + (5E_{12}E_{33} - 5E_{23}E_{13}) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c2u_{3,0}(x, y) \right) + (5E_{33}E_{11} - 5E_{13}^2) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c2u_{3,0}(x, y) \right) \left. \right)
\end{aligned}$$

$$+ E_{13} \sqrt{5} c_{2RS_32}(x, y) \left(E_{56}^2 - E_{55} E_{66} \right) E_{33} \Big) a h / \left(E_{33}^2 (E_{56}^2 - E_{55} E_{66}) \right)$$

> **m1 (1, 2, 2) ;**

$$a h c^2 \left(E_{12} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{1,1}(x, y) \right) + E_{24} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{1,1}(x, y) \right) + E_{24} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{2,1}(x, y) \right) + E_{22} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{2,1}(x, y) \right) \right. \\ \left. + E_{23} (\sqrt{5} u_{3,2}(x, y) + \sqrt{9} c^2 u_{3,4}(x, y)) \right)$$

> **m122 := simplify(simplify(algsubs(su_c2u_2_1, algsubs(su_c2u_1_1, algsubs(su_gl23, cvar(m1(1, 2, 2))))), size) ;**

$$m122 := \frac{3}{5} a \left(\left((((8 E_{44} + 10 E_{12}) E_{24} + 6 E_{22} E_{14}) E_{56} \right. \right. \\ \left. \left. + (-6 E_{24}^2 - 2 E_{22} (2 E_{44} + E_{12})) E_{66} - 2 (3 E_{24} E_{14} + E_{12} (2 E_{44} + E_{12})) E_{55} \right) E_{33}^2 + \left(\right. \right. \\ \left. \left. (-6 E_{56} E_{14} + 2 E_{66} (2 E_{44} + E_{12})) E_{23}^2 + \left(\left(-\frac{4}{3} E_{44} - E_{12} \right) E_{56}^2 \right. \right. \right. \\ \left. \left. + ((-8 E_{44} - 10 E_{12}) E_{34} - 10 E_{24} E_{13}) E_{56} + (12 E_{66} E_{24} + 6 E_{14} E_{55}) E_{34} \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\left(E_{12} + \frac{4}{3} E_{44} \right) E_{55} + 2 E_{13} E_{22} \right) E_{66} + 4 E_{55} E_{13} (E_{44} + E_{12}) \right) E_{23} \right. \\ \left. + \left(-\frac{1}{3} E_{13} E_{22} - \frac{4}{3} E_{34} E_{24} \right) E_{56}^2 + (-8 E_{24} E_{34}^2 - 6 E_{22} E_{34} E_{13}) E_{56} \right. \\ \left. + (4 E_{55} E_{12} + 4 E_{66} E_{22}) E_{34}^2 + \frac{4}{3} \left(E_{66} + \frac{9}{2} E_{13} \right) E_{55} E_{24} E_{34} + \frac{1}{3} E_{55} E_{66} E_{13} E_{22} \right) E_{33} - \frac{4}{3} \left(\right. \\ \left. \frac{3}{2} E_{66} E_{13} E_{23}^2 + \left(-E_{13} E_{56}^2 - 12 E_{13} E_{34} E_{56} + \frac{15}{2} E_{66} E_{34}^2 + E_{13} \left(\frac{3}{2} E_{13} + E_{66} \right) E_{55} \right) E_{23} \right. \\ \left. + 2 E_{34}^2 \left(-E_{56}^2 - 3 E_{34} E_{56} + \left(E_{66} + \frac{15}{4} E_{13} \right) E_{55} \right) \right) \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c_4 u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\right. \\ \left. (2 E_{12}^2 + 4 E_{44} E_{12} + 8 E_{24} E_{14} + 2 E_{22} E_{11}) E_{56} + ((-2 E_{12} - 4 E_{44}) E_{24} - 2 E_{22} E_{14}) E_{66} \right. \\ \left. - 2 E_{55} (E_{24} E_{11} + 3 E_{14} E_{12}) \right) E_{33}^2 + \left((-2 E_{56} E_{11} + 2 E_{66} E_{14}) E_{23}^2 + \left(-\frac{4}{3} E_{56}^2 E_{14} \right. \right. \\ \left. \left. + (-8 E_{14} E_{34} - 4 (E_{44} + E_{12}) E_{13}) E_{56} + ((2 E_{12} + 4 E_{44}) E_{66} + 2 E_{55} E_{11}) E_{34} \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{4}{3} E_{14} E_{55} + 2 E_{24} E_{13} \right) E_{66} + 6 E_{55} E_{13} E_{14} \right) E_{23} + \left(-\frac{2}{3} E_{12} E_{34} - \frac{2}{3} E_{24} E_{13} \right) E_{56}^2 \right. \\ \left. + (-4 E_{12} E_{34}^2 - 2 E_{22} E_{13}^2 - 8 E_{24} E_{34} E_{13}) E_{56} + 4 E_{66} E_{24} E_{34}^2 \right. \\ \left. + \left(\left(2 E_{13} E_{22} + \frac{2}{3} E_{55} E_{12} \right) E_{66} + 6 E_{55} E_{13} E_{12} \right) E_{34} + \frac{2}{3} E_{55} E_{24} E_{13} (3 E_{13} + E_{66}) \right) E_{33} - \frac{8}{3} \\ \left(\left(-\frac{3}{2} E_{56} E_{13}^2 + \frac{3}{2} E_{66} E_{34} E_{13} \right) E_{23} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + E_{34} \left(-E_{13} E_{56}^2 - \frac{9}{2} E_{13} E_{34} E_{56} + \frac{3}{2} E_{66} E_{34}^2 + E_{55} E_{13} (3 E_{13} + E_{66}) \right) E_{23} \\
& \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\right. \\
& \left((8 E_{24}^2 + 4 E_{22} (E_{44} + E_{12})) E_{56} - 8 \left(E_{66} E_{22} + \frac{1}{2} E_{55} (E_{44} + E_{12}) \right) E_{24} \right) E_{33}^2 + \left(\right. \\
& ((-4 E_{12} - 4 E_{44}) E_{56} + 8 E_{66} E_{24}) E_{23}^2 + (-2 E_{56}^2 E_{24} + (-4 E_{13} E_{22} - 16 E_{34} E_{24}) E_{56} \\
& + (8 E_{66} E_{22} + 4 E_{55} (E_{44} + E_{12})) E_{34} + 2 E_{55} E_{24} (2 E_{13} + E_{66})) E_{23} \\
& \left. + \frac{2}{3} E_{34} (-E_{56}^2 E_{22} - 6 E_{34} E_{22} E_{56} + E_{55} (6 E_{34} E_{24} + E_{66} E_{22})) \right) E_{33} - \frac{8}{3} E_{23} \left(\right. \\
& \left(-\frac{3}{2} E_{56} E_{13} + 3 E_{66} E_{34} \right) E_{23}^2 + \left(-E_{56}^2 - \frac{9}{2} E_{34} E_{56} + \left(\frac{3}{2} E_{13} + E_{66} \right) E_{55} \right) E_{34} E_{23} \\
& \left. + \frac{3}{2} E_{55} E_{34}^3 \right) \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\right. \\
& ((2 E_{24} E_{11} + 2 E_{14} E_{12}) E_{56} - 2 E_{55} E_{12} E_{11} - 2 E_{66} E_{24} E_{14}) E_{33}^2 + \left(\right. \\
& \left(-\frac{1}{3} E_{56}^2 E_{11} + (-2 E_{13} E_{14} - 2 E_{34} E_{11}) E_{56} + 2 E_{66} E_{34} E_{14} + \frac{1}{3} E_{11} (E_{66} + 6 E_{13}) E_{55} \right) E_{23} \\
& \left. + \frac{1}{3} (-E_{12} E_{56}^2 + (-6 E_{12} E_{34} - 6 E_{24} E_{13}) E_{56} + 6 E_{66} E_{34} E_{24} + E_{55} E_{12} (E_{66} + 6 E_{13})) E_{13} \right) \\
& E_{33} - \frac{2}{3} E_{13} E_{23} (-E_{13} E_{56}^2 - 6 E_{13} E_{34} E_{56} + 3 E_{66} E_{34}^2 + E_{55} E_{13} (3 E_{13} + E_{66})) \left. \right) \\
& \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left((-2 E_{55} E_{24}^2 + 4 E_{56} E_{24} E_{22} - 2 E_{66} E_{22}^2) E_{33}^2 + \frac{2}{3} \right. \\
& ((-6 E_{24} E_{56} + 6 E_{66} E_{22}) E_{23} - E_{56}^2 E_{22} - 6 E_{34} E_{22} E_{56} + E_{55} (6 E_{34} E_{24} + E_{66} E_{22})) E_{23} \\
& E_{33} - \frac{2}{3} E_{23}^2 (3 E_{66} E_{23}^2 + (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66} - 6 E_{34} E_{56}) E_{23} + 3 E_{55} E_{34}^2) \left. \right) \\
& \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) - \frac{5}{3} E_{33} (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \left((-2 E_{23} E_{34} + 2 E_{24} E_{33}) \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c2u_{3,0}(x, y) \right) \right. \\
& + (E_{22} E_{33} - E_{23}^2) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c2u_{3,0}(x, y) \right) + (E_{12} E_{33} - E_{23} E_{13}) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c2u_{3,0}(x, y) \right) \\
& \left. \left. + \frac{1}{5} E_{23} \sqrt{5} c2RS_{32}(x, y) \right) \right) h / (E_{33}^2 (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}))
\end{aligned}$$

> **ml (1, 1, 2) ;**

$$a h c^2 \left(E_{14} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{1,1}(x, y) \right) + E_{44} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{1,1}(x, y) \right) + E_{44} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{2,1}(x, y) \right) + E_{24} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{2,1}(x, y) \right) \right)$$

$$+ E_{34} (\sqrt{5} u_{3,2}(x, y) + \sqrt{9} c^2 u_{3,4}(x, y))$$

> **m112:=simplify(simplify(algsubs(su_c2u_2_1,algsubs(su_c2u_1_1,algsubs(su_gl23,cvar(ml(1,1,2))))),size);**

$$m112 := -\frac{6}{5} \left(\left((-6 E_{24} E_{14} - 2 E_{44} E_{12} - 4 E_{44}^2) E_{56} + (E_{14} E_{55} + E_{66} E_{24}) (E_{12} + 5 E_{44}) \right) E_{33}^2 + \left((8 E_{44} + 2 E_{12}) E_{56} - 5 E_{14} E_{55} - 5 E_{66} E_{24} \right) E_{34}^2 + \left(\frac{4}{3} E_{44} + \frac{1}{3} E_{12} \right) E_{56}^2 + (6 E_{14} E_{23} + 6 E_{24} E_{13}) E_{56} + \left(\left(-\frac{4}{3} E_{44} - \frac{1}{3} E_{12} \right) E_{55} - E_{23} (E_{12} + 5 E_{44}) \right) E_{66} - E_{13} E_{55} (E_{12} + 5 E_{44}) \right) E_{34} + \left(\frac{1}{6} E_{14} E_{23} + \frac{1}{6} E_{24} E_{13} \right) E_{56}^2 + 2 E_{44} E_{56} E_{23} E_{13} + \left(\left(-\frac{1}{6} E_{14} E_{23} - \frac{1}{6} E_{24} E_{13} \right) E_{55} - E_{24} E_{23} E_{13} \right) E_{66} - E_{55} E_{14} E_{13} E_{23} \right) E_{33} + \left(-4 E_{34}^3 E_{56} + \left(-\frac{4}{3} E_{56}^2 + \left(5 E_{23} + \frac{4}{3} E_{55} \right) E_{66} + 5 E_{55} E_{13} \right) E_{34}^2 - 8 E_{34} E_{13} E_{56} E_{23} + E_{23} \left(-\frac{2}{3} E_{56}^2 + \left(E_{23} + \frac{2}{3} E_{55} \right) E_{66} + E_{55} E_{13} \right) E_{13} \right) E_{34} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left((-E_{22} E_{14} - E_{24} E_{12} - 6 E_{44} E_{24}) E_{56} + (3 E_{24}^2 + E_{22} E_{44}) E_{66} + E_{55} (E_{24} E_{14} + E_{44} E_{12} + 2 E_{44}^2) \right) E_{33}^2 + \left((6 E_{24} E_{56} - E_{66} E_{22} - E_{55} (E_{12} + 4 E_{44})) E_{34}^2 + \left(E_{56}^2 E_{24} + ((6 E_{44} + E_{12}) E_{23} + E_{13} E_{22}) E_{56} - 6 \left(\frac{1}{6} E_{55} + E_{23} \right) E_{24} E_{66} - E_{55} (E_{24} E_{13} + E_{14} E_{23}) \right) E_{34} + E_{23} \left(\frac{1}{3} E_{44} E_{56}^2 + (E_{24} E_{13} + E_{14} E_{23}) E_{56} - \left(E_{66} \left(E_{23} + \frac{1}{3} E_{55} \right) + E_{55} E_{13} \right) E_{44} \right) \right) E_{33} - 2 E_{34} \left(-E_{55} E_{34}^3 + 3 E_{23} E_{56} E_{34}^2 - E_{23} \left(-\frac{2}{3} E_{56}^2 + \left(2 E_{23} + \frac{2}{3} E_{55} \right) E_{66} + E_{55} E_{13} \right) E_{34} + E_{56} E_{13} E_{23}^2 \right) \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left((-E_{24} E_{11} - E_{14} E_{12} - 6 E_{44} E_{14}) E_{56} + (E_{24} E_{14} + E_{44} E_{12} + 2 E_{44}^2) E_{66} + E_{55} (E_{11} E_{44} + 3 E_{14}^2) \right) E_{33}^2 + \left((6 E_{56} E_{14} + (-E_{12} - 4 E_{44}) E_{66} - E_{55} E_{11}) E_{34}^2 + (E_{56}^2 E_{14} + (E_{11} E_{23} + E_{13} (6 E_{44} + E_{12})) E_{56} + (-E_{14} E_{23} - E_{24} E_{13} - E_{14} E_{55}) E_{66} - 6 E_{55} E_{13} E_{14}) \right)$$

$$\begin{aligned}
& E_{34} + \left(\frac{1}{3} E_{44} E_{56}^2 + (E_{24} E_{13} + E_{14} E_{23}) E_{56} - \left(E_{66} \left(E_{23} + \frac{1}{3} E_{55} \right) + E_{55} E_{13} \right) E_{44} \right) E_{13} E_{33} \\
& - 2 E_{34} \left(-E_{66} E_{34}^3 + 3 E_{13} E_{56} E_{34}^2 - 2 E_{13} \left(-\frac{1}{3} E_{56}^2 + \left(\frac{1}{2} E_{23} + \frac{1}{3} E_{55} \right) E_{66} + E_{55} E_{13} \right) E_{34} \right. \\
& \left. + E_{56} E_{13}^2 E_{23} \right) \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\right. \\
& \left. (-E_{14}^2 - E_{11} E_{44}) E_{56} + E_{14} (E_{44} E_{66} + E_{55} E_{11}) \right) E_{33}^2 + \left((E_{56} E_{11} - E_{66} E_{14}) E_{34}^2 \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{6} E_{56}^2 E_{11} + 2 E_{56} E_{13} E_{14} + \left(-E_{13} E_{44} - \frac{1}{6} E_{55} E_{11} \right) E_{66} - E_{55} E_{11} E_{13} \right) E_{34} \right. \\
& \left. - E_{13} \left(-\frac{1}{6} E_{56}^2 E_{14} - E_{44} E_{13} E_{56} + \left(\frac{1}{6} E_{66} + E_{13} \right) E_{14} E_{55} \right) \right) E_{33} \\
& + E_{13} \left(E_{66} E_{34}^2 - 2 E_{13} E_{34} E_{56} + \left(-\frac{1}{3} E_{56}^2 + E_{55} \left(E_{13} + \frac{1}{3} E_{66} \right) \right) E_{13} \right) E_{34} \\
& \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left((-E_{22} E_{44} - E_{24}^2) E_{56} + E_{24} (E_{66} E_{22} + E_{44} E_{55}) \right) E_{33}^2 + \left(\right. \\
& \left. (E_{22} E_{56} - E_{55} E_{24}) E_{34}^2 \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{6} E_{56}^2 E_{22} + 2 E_{56} E_{23} E_{24} - \left(\frac{1}{6} E_{55} + E_{23} \right) E_{22} E_{66} - E_{55} E_{44} E_{23} \right) E_{34} \right. \\
& \left. - \left(-\frac{1}{6} E_{56}^2 E_{24} - E_{56} E_{44} E_{23} + \left(\frac{1}{6} E_{55} + E_{23} \right) E_{24} E_{66} \right) E_{23} \right) E_{33} \\
& + E_{23} \left(E_{55} E_{34}^2 - 2 E_{56} E_{34} E_{23} + \left(-\frac{1}{3} E_{56}^2 + E_{66} \left(E_{23} + \frac{1}{3} E_{55} \right) \right) E_{23} \right) E_{34} \\
& \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) - \frac{5}{6} \left((2 E_{34}^2 - 2 E_{44} E_{33}) \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c2u_{3,0}(x, y) \right) \right. \\
& \left. + (E_{23} E_{34} - E_{24} E_{33}) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c2u_{3,0}(x, y) \right) + (-E_{14} E_{33} + E_{34} E_{13}) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c2u_{3,0}(x, y) \right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{5} E_{34} \sqrt{5} c2RS_{32}(x, y) \right) (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) E_{33} \Big/ (E_{33}^2 (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}))
\end{aligned}$$

6 Testen der Lösung

Wir wollen testen, ob die Modellierung zulässig ist (was auf Seite 64 behauptet wird). Dazu überprüfen wir, ob die Gleichungen des Reduktionsprozesses das ursprüngliche PDE-System der Tabelle 3 lösen. Dann testen wir noch das Plattenproblem in Schnittgrößen (vgl. (36) und Seite 63) durch das Einsetzen der berechneten Schnittgrößen in $w=u[3,0]$.

Als erstes testen wir die Gleichungen der Tabelle 3.

[Gleichung (5,2):

[> **subs (su_c4u_1_1, su_c4u_2_1, cvar (gls (5, 2))) = 0;**

$$0 = 0$$

[Gleichung (5,1):

> **subs (su_c4u_1_1, su_c4u_2_1, cvar (gls (5, 1))) = 0;**

$$0 = 0$$

[Gleichung (4,3):

> **tt := simplify (subs (su_c4u_3_2, su_c4u_1_1, su_c4u_2_1, cvar (gls (4, 3)))) = 0;**

$$tt := -3 E_{13} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(- \left(\frac{\partial}{\partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) \right) - 3 E_{34} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(- \left(\frac{\partial}{\partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) \right) \\ - 3 E_{34} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(- \left(\frac{\partial}{\partial y} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) \right) - 3 E_{23} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(- \left(\frac{\partial}{\partial y} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) \right) \\ - 3 E_{13} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) - 6 E_{34} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) - 3 E_{23} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) = 0$$

[Das lassen wir Maple noch ein weiteres mal vereinfachen:

> **collect (tt, c4u [3, 0] (x, y));**

$$0 = 0$$

[Gleichung (3,2):

> **tt := algsubs (su_c4u_3_2, simplify (subs (su_c2u_1_1, su_c2u_2_1, su_c4u_1_3, su_c4u_2_3, cvar (gls (3, 2)))) = 0;**

$$tt := \frac{1}{3} \sqrt{7} \sqrt{3} \left(\begin{aligned} & -E_{55} \left(E_{13} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{34} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) \\ & + E_{55} E_{13} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{55} E_{34} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\ & + E_{55} E_{23} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\ & - E_{56} \left(E_{13} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{34} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) \\ & + E_{56} E_{13} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{56} E_{34} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\ & + E_{56} E_{23} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \end{aligned} \right) / E_{33} = 0$$

[Wir lassen die linke Seite noch einmal vereinfachen:

> **simplify (op (1, tt));**

$$0$$

[Gleichung (3,1):

> **tt := algsubs (su_c4u_3_2, simplify (subs (su_c2u_1_1, su_c2u_2_1, su_c4u_1_3, su_c4u_2_3, cvar (gls (3, 1)))) = 0;**

$$\begin{aligned}
tt := & \frac{1}{3} \sqrt{7} \sqrt{3} \left(E_{66} E_{23} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{66} E_{13} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right. \\
& + 2 E_{66} E_{34} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - E_{66} \left(E_{13} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{34} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) \\
& + 2 E_{56} E_{34} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{56} E_{23} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + E_{56} E_{13} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& \left. - E_{56} \left(E_{13} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{34} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) \right) \\
& / E_{33} = 0
\end{aligned}$$

[Wir lassen die linke Seite noch einmal vereinfachen:

[> **simplify(op(1, tt))** ;

0

[Gleichung (2,3):

[> **tt:=algsuubs(su_c4u_3_2, algsuubs(su_c4u_1_3, algsuubs(su_c4u_2_3, algsuubs(su_c2u_2_1, algsuubs(su_c2u_1_1, algsuubs(su_g123, cvar(gls(2,3))=c2RS_32(x,y))))))** ;

[Das ergibt vereinfacht:

[> **simplify(tt)** ;

$$c2RS_32(x, y) = c2RS_32(x, y)$$

[Gleichung c^2*(1,2):

[> **algsuubs(su_c4u_1_1, algsuubs(su_c4u_2_1, algsuubs(su_c2u_1_1, algsuubs(su_c2u_2_1, algsuubs(su_c4u_3_2, algsuubs(su_c4u_1_3, algsuubs(su_c4u_2_3, cvar(truncate(c^2*gl(1,2),4))))))** ;

0

[Gleichung c^2*(1,1):

[> **algsuubs(su_c4u_1_1, algsuubs(su_c4u_2_1, algsuubs(su_c2u_1_1, algsuubs(su_c2u_2_1, algsuubs(su_c4u_3_2, algsuubs(su_c4u_1_3, algsuubs(su_c4u_2_3, cvar(truncate(c^2*gl(1,1),4))))))** ;

0

[Gleichung (1,2):

[> **tt:=algsuubs(su_c2u_1_1, algsuubs(su_c2u_2_1, algsuubs(su_g123, algsuubs(su_g112, algsuubs(su_g111,**

```
cvar(gls(1,2))
))))):
```

Das ergibt vereinfacht:

```
> simplify(tt);
```

0

Gleichung (1,1):

```
> tt:=algsubs(su_c2u_1_1,algsubs(su_c2u_2_1,algsubs(su_g123,alg
subs(su_g112,algsubs(su_g111,
cvar(gls(1,1))
))))):
```

Das ergibt vereinfacht:

```
> simplify(tt);
```

0

Gleichung c^2*(0,3):

```
> tt:=algsubs(su_c2u_1_1,algsubs(su_c2u_2_1,algsubs(su_c4u_1_3,
algsubs(su_c4u_2_3,
cvar(truncate(c^2*gls(0,3),4)=c2RS_30(x,y)
))))):
```

Die Gleichung ist äquivalent zu "nebengl" bzw. "c^2*hauptgl".

```
> simplify(tt-nebengl);
```

0 = 0

Gleichung (0,3) müssen wir nicht testen. Die Hauptdifferentialgleichung wurde ja gerade dadurch definiert, dass wir "su_g111" und "su_g112" in (3,0) eingesetzt haben.

Jetzt testen wir die Schnittgrößen: (vgl. S. 63)

Gleichung (5.beta):

Wir betrachten die Schnittgrößen einzeln:

```
> truncate(c^2*invcvar(m231),5);
```

0

```
> truncate(c^4*invcvar(m031),5);
```

$$-\frac{2 \left(\frac{1}{10} E_{13} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2RS_{32}(x, y) \right) \sqrt{5} + \frac{1}{10} E_{34} \sqrt{5} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2RS_{32}(x, y) \right) \right) h c^4}{E_{33}}$$

=0+O(c^6)

```
> truncate(c^2*invcvar(m232),5);
```

0

```
> truncate(c^4*invcvar(m032),5);
```

$$\frac{2 h \left(-\frac{1}{10} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2RS_{32}(x, y) \right) E_{23} \sqrt{5} - \frac{1}{10} \sqrt{5} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2RS_{32}(x, y) \right) E_{34} \right) c^4}{E_{33}}$$

=0+O(c^6)

=> sqrt(5)/a^2*c^2*m23beta+c^4*m03beta=0+O(c^6) (siehe (5,beta))

Gleichung (4,3):

```
> truncate(c^2*invcvar(m133),5);
```

$$-\frac{1}{5}\sqrt{5} c2RS_{32}(x, y) h a c^2$$

[=0+O(c^6) (vgl. S. 52 unten)

[=> c^2*m133=0+O(c^6) (siehe (4,3))

[Gleichung (3,beta):

beta=1:

> **truncate(c^2*invvar(m031), 4);**

$$2 \left(\frac{1}{10} E_{13} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2RS_{32}(x, y) \right) \sqrt{5} + \frac{1}{10} E_{34} \sqrt{5} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2RS_{32}(x, y) \right) \right) h c^2$$

$$- \frac{\left(-\frac{1}{2} E_{23} E_{34} + \frac{1}{2} E_{24} E_{33} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} u_{3,0}(x, y) \right) + \left(-\frac{3}{2} E_{34} E_{13} + \frac{3}{2} E_{14} E_{33} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} u_{3,0}(x, y) \right)}{E_{33}} - 2 \left(\left(\frac{1}{2} E_{12} + E_{44} \right) E_{33} - E_{34}^2 - \frac{1}{2} E_{23} E_{13} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\frac{1}{2} E_{33} E_{11} - \frac{1}{2} E_{13}^2 \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} u_{3,0}(x, y) \right) \right) h c^4 / E_{33}$$

[Die RS-Terme sind alle von der Ordnung O(c^6). Übrig bleibt der Term:

> **tt:=cvar(colsum(truncate(c^2*invvar(m031), 4), u[3, 0]));**

$$tt := \frac{h \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{23} E_{34}}{E_{33}} - h \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{24}$$

$$+ \frac{3 h \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{34} E_{13}}{E_{33}} - 3 h \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{14}$$

$$- h \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{12} - 2 h \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{44}$$

$$+ \frac{2 h \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{34}^2}{E_{33}} + \frac{h \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{23} E_{13}}{E_{33}}$$

$$- h \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{11} + \frac{h \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{13}^2}{E_{33}}$$

[Überprüfen von Gleichung (3,1):

> **simplify(tt+sqrt(5)*m231/a^2);**

0

[beta=2:

> **truncate(c^2*invvar(m032), 4);**

$$2 h \left(\frac{-\frac{1}{10} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2RS_32(x, y) \right) E_{23} \sqrt{5} - \frac{1}{10} \sqrt{5} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2RS_32(x, y) \right) E_{34}}{E_{33}} c^2 + 2 h \left(\left(\frac{3}{2} E_{23} E_{34} - \frac{3}{2} E_{24} E_{33} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} u_{3,0}(x, y) \right) + \left(-\frac{1}{2} E_{22} E_{33} + \frac{1}{2} E_{23}^2 \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\left(-\frac{1}{2} E_{12} - E_{44} \right) E_{33} + E_{34}^2 + \frac{1}{2} E_{23} E_{13} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} u_{3,0}(x, y) \right) + \left(-\frac{1}{2} E_{14} E_{33} + \frac{1}{2} E_{34} E_{13} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} u_{3,0}(x, y) \right) \right) c^4 / E_{33} \right)$$

[Die RS-Terme sind wieder von der Ordnung $O(c^6)$. Übrig bleibt der Term:

[**> tt:=cvar(colsum(truncate(c^2*invcvar(m032), 4), u[3, 0])) :**

[Überprüfen von Gleichung (3,2):

[**> simplify(tt+sqrt(5)*m232/a^2);**

0

[=> sqrt(5)/a^2*m23beta+c^2*m03beta=0+O(c^6) (siehe (3,beta))

[Gleichung (2,3):

[Wir betrachten die Summanden einzeln:

[**> tt1:=simplify(algsubs(nebengl, simplify(1/a^2/h*(diff(m231, x)+diff(m232, y)))) , size);**

$$tt1 := -\frac{1}{5} \sqrt{5} c2RS_30(x, y)$$

[**> tt2:=simplify(algsubs(nebengl, algsubs(su_c2u_2_1, algsubs(su_c2u_1_1, algsubs(su_gl23, cvar(ml(1, 3, 3)))))) ;**

$$tt2 := -\frac{1}{5} (c2RS_30(x, y) + \sqrt{5} c2RS_32(x, y)) h a$$

[Das ergibt für die Summe:

[**> simplify(-h*tt1+sqrt(5)/a*tt2);**

$$-h c2RS_32(x, y)$$

[=> -1/a^2*m23alpha,alpha+sqrt(5)/a*m133=-h*c2RS_32+O(c^6)=a*c^2*P^2_3+O(c^6) (siehe (2,3))

[Gleichung (1,beta):

[beta=1:

[**> simplify(-1/a*(diff(m111, x)+diff(m112, y))+m031);**

0

[beta=2:

[**> simplify(-1/a*(diff(m112, x)+diff(m122, y))+m032);**

0

[=> 1/a*m1beta alpha,alpha+m03beta=0+O(c^6) (siehe (1,beta))

[Gleichung (0,3):

[**> tt:=simplify(-1/h*(diff(m031, x)+diff(m032, y))=-RS_30(x, y)) :**

[Die Gleichung ist die negative "hauptgl":

[**> simplify(tt+hauptgl);**

Dies stimmt mit der klassischen Kirchhoff-Theorie überein (vgl. S. 65).

Nun zeigen wir: Für Isotropie und Transversale Isotropie kann der Differentialoperator sechster Ordnung in zweiten Ableitungen von "P_3^1" geschrieben werden (vgl. Abschnitt 7.2). Ab Orthotropie gelingt dies nicht mehr.

Durch Einkommentieren der ersten und Auskommentieren der zweiten Zeile kann man die verwendete Haupt-PDE ((60) oder (62)) ändern. Ändern des zweiten Parameters in "simpmat" erlaubt das Durchprobieren aller Materialgesetze.

```
> #simhauptls:=cvar (subs (w(x,y,z)=u[3,0] (x,y) , simpmat (op (1, haup  
tgl2) , 2))) :
```

```
> simhauptls:=op (1, simpmat (hauptgl, 4)) :
```

```
> simnebenls:=op (1, simpmat (nebenl, 4)) :
```

"c4ufactor" gibt die Koeffizienten vor einer partiellen Ableitung ("xn" mal nach x und "yn" mal nach y differenziert) von "c4u[3,0]" zurück. Somit können wir die a_i aus Abschnitt 7.2 bestimmen.

```
> c4ufactor:= proc (t, xn, yn) ;  
    return  
    coeff (t, diff (c4u[3,0] (x,y) , ` $ ` (x, xn) , ` $ ` (y, yn)) , 1) ;  
end proc ;
```

Lösen des Gleichungssystems der oberen Abschnittsmatrix (vgl. S. 65).

"xx" entspricht "c_2", "xy" entspricht "c_1", "yy" entspricht "c_0".

```
> xx:=simplify (c4ufactor (simhauptls, 6, 0) /c4ufactor (simnebenls, 4  
, 0)) ;
```

$$xx := \frac{2(v-6)}{5(-1+v)}$$

```
> xy:=simplify ((c4ufactor (simhauptls, 5, 1) -c4ufactor (simnebenls,  
3, 1) *xx) /c4ufactor (simnebenls, 4, 0)) ;
```

$$xy := 0$$

```
> yy:=simplify ((c4ufactor (simhauptls, 4, 2) -c4ufactor (simnebenls,  
2, 2) *xx -c4ufactor (simnebenls, 3, 1) *xy) /c4ufactor (simnebenls, 4,  
0)) ;
```

$$yy := \frac{2(v-6)}{5(-1+v)}$$

Testen der restlichen vier Gleichungen: (vgl. Abschnitt 7.2)

```
> for k from 0 to 1 do  
    simplify (c4ufactor (simhauptls, 3-k, 3+k) -c4ufactor (simnebenls, 1  
-k, 3+k) *xx -c4ufactor (simnebenls, 2-k, 2+k) *xy -c4ufactor (simnebe  
nls, 3-k, 1+k) *yy, size) ;  
end do ;
```

0

0

```
> simplify (c4ufactor (simhauptls, 1, 5) -c4ufactor (simnebenls, 0, 4) *  
xy -c4ufactor (simnebenls, 1, 3) *yy, size) ;
```

0

```
> simplify(c4ufactor(simhaupt1s, 0, 6) - c4ufactor(simneben1s, 0, 4) *
yy, size);
```

0

Wir wollen nun die Differentialgleichung vierter Ordnung für Isotropie (65) herleiten, indem wir den eben ermittelten Differentialoperator nutzen, um den Term sechster Ordnung in "w" in zweiten Ableitung von "P_3^1" zu schreiben.

"su_RS_iso" ist die gerade berechnete Gleichung, die den Differentialoperator sechster Ordnung ersetzen soll:

```
> su_RS_iso := simplify(2/5*(nu-6)/(-1+nu) * (diff(simpmat(nebengl,
4), x, x) + diff(simpmat(nebengl, 4), y, y)));
```

$$su_RS_iso := \frac{2}{5} \left(3 \left(\frac{\partial^6}{\partial y^2 \partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^6}{\partial x^6} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 3 \left(\frac{\partial^6}{\partial y^4 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^6}{\partial y^6} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) Em(v-6) / ((-1+v)^2 (1+v)) =$$

$$\frac{2}{5} \frac{(v-6) \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c2RS_{30}(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c2RS_{30}(x, y) \right) \right)}{-1+v}$$

Wir überprüfen noch einmal, ob der Term sechster Ordnung tatsächlich dem Term sechster Ordnung in "hauptgl" entspricht:

```
> tt := colsum(op(1, simplify(simpmat(hauptgl, 4))), c4u[3, 0]);
```

$$tt := \frac{2}{5} Em \left(3 \left(\frac{\partial^6}{\partial y^2 \partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) v - 18 \left(\frac{\partial^6}{\partial y^2 \partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 3 \left(\frac{\partial^6}{\partial y^4 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) v - 18 \left(\frac{\partial^6}{\partial y^4 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^6}{\partial x^6} c4u_{3,0}(x, y) \right) v - 6 \left(\frac{\partial^6}{\partial x^6} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^6}{\partial y^6} c4u_{3,0}(x, y) \right) v - 6 \left(\frac{\partial^6}{\partial y^6} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) / ((-1+v)^2 (1+v))$$

```
> simplify(op(1, su_RS_iso) - tt);
```

0

Der Term sechster Ordnung stimmt wie berechnet überein. Wegen des Nenners in "su_RS_iso" kann Maple diese Gleichung jedoch nicht direkt zur algebraischen Substitution nutzen:

```
> algsubs(su_RS_iso, simplify(simpmat(hauptgl, 4)));
Error, (in algsubs) cannot compute degree of pattern in nu
```

So klappt es hingegen:

```
> tt := algsubs((-1+nu)^2*(1+nu)*su_RS_iso, simplify(simpmat(hauptgl, 4)));
```

$$tt := \frac{1}{5} \left(12 \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c2RS_{30}(x, y) \right) + 12 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c2RS_{30}(x, y) \right) + \left(-\sqrt{5} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c2RS_{32}(x, y) \right) \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
& -\sqrt{5} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c2RS_{32}(x, y) \right) - 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c2RS_{30}(x, y) \right) - 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c2RS_{30}(x, y) \right) \Big) v \\
& + \left(10 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c2u_{3,0}(x, y) \right) + 5 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c2u_{3,0}(x, y) \right) + 5 \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c2u_{3,0}(x, y) \right) \right) v Em \\
& + \left(-5 \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c2u_{3,0}(x, y) \right) - 5 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c2u_{3,0}(x, y) \right) - 10 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c2u_{3,0}(x, y) \right) \right) Em + \left(\right. \\
& 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c2RS_{30}(x, y) \right) + 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c2RS_{30}(x, y) \right) + \sqrt{5} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c2RS_{32}(x, y) \right) \\
& \left. + \sqrt{5} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c2RS_{32}(x, y) \right) \right) v^3 \\
& + \left(-12 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c2RS_{30}(x, y) \right) - 12 \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c2RS_{30}(x, y) \right) \right) v^2 \Big) / ((-1+v)^2 (1+v)) = \\
& RS_{30}(x, y)
\end{aligned}$$

Die Gleichung schreiben wir noch ein wenig um:

> **tt:=simplify(simplify(isolate(tt, c2u[3,0](x,y))), size);**

tt :=

$$\begin{aligned}
& 10(-1+v) \left(\left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c2u_{3,0}(x, y) \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c2u_{3,0}(x, y) \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c2u_{3,0}(x, y) \right) \right) Em = 5 \\
& (-1+v)(1+v) \left(\left(-\frac{2v}{5} + \frac{12}{5} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c2RS_{30}(x, y) \right) \right. \\
& \left. + \left(-\frac{2v}{5} + \frac{12}{5} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c2RS_{30}(x, y) \right) - \frac{1}{5} v \sqrt{5} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c2RS_{32}(x, y) \right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{5} v \sqrt{5} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c2RS_{32}(x, y) \right) + RS_{30}(x, y) (-1+v) \right)
\end{aligned}$$

> **tt:=simplify(tt*(-1)*a^2*h/5/(1-nu)^2/(1+nu));**

$$tt := - \frac{a^2 h \left(2 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c2u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c2u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c2u_{3,0}(x, y) \right) \right) Em}{-1+v^2} = \frac{1}{5} a^2$$

$$\begin{aligned}
& h \left(2 v \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c2RS_{30}(x, y) \right) - 12 \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c2RS_{30}(x, y) \right) + 2 v \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c2RS_{30}(x, y) \right) \right. \\
& \left. - 12 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c2RS_{30}(x, y) \right) + v \sqrt{5} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c2RS_{32}(x, y) \right) + v \sqrt{5} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c2RS_{32}(x, y) \right) \right. \\
& \left. + 5 RS_{30}(x, y) - 5 RS_{30}(x, y) v \right) / (-1+v)
\end{aligned}$$

> **tt:=algsubs(c2RS_32(x,y)=-a/h*c^2*P[3,2](x,y), algsubs(c2RS_30(x,y)=-a/h*c^2*P[3,0](x,y), algsubs(RS_30(x,y)=-a/h*P[3,0](x,y), tt)));**

$$tt := - \frac{a^2 h \left(2 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c2u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c2u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c2u_{3,0}(x, y) \right) \right) Em}{-1 + v^2} = \frac{1}{5} a^2$$

$$\left(-2 v a c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} P_{3,0}(x, y) \right) + 12 a c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} P_{3,0}(x, y) \right) - 2 v a c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} P_{3,0}(x, y) \right) \right.$$

$$+ 12 a c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} P_{3,0}(x, y) \right) - v \sqrt{5} a c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} P_{3,2}(x, y) \right) - v \sqrt{5} a c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} P_{3,2}(x, y) \right)$$

$$\left. - 5 a P_{3,0}(x, y) + 5 v a P_{3,0}(x, y) \right) / (-1 + v)$$

> **tt:=simplify(tt, size);**

$$tt := - \frac{a^2 h \left(2 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c2u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c2u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c2u_{3,0}(x, y) \right) \right) Em}{-1 + v^2} = - \left(\right.$$

$$2 c^2 (v - 6) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} P_{3,0}(x, y) \right) + 2 c^2 (v - 6) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} P_{3,0}(x, y) \right) + v \sqrt{5} c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} P_{3,2}(x, y) \right)$$

$$\left. + v \sqrt{5} c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} P_{3,2}(x, y) \right) - 5 P_{3,0}(x, y) (-1 + v) \right) a^3 / (-5 + 5 v)$$

=> Gleichung (65)

Nun betrachten wir die Differentialgleichung in "psi".

c^2*psi ist per Definition:

> **simplify(simplify(diff(su_c2u_2_1, x)-diff(su_c2u_1_1, y)), size);**

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} c2u_{2,1}(x, y) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial y} c2u_{1,1}(x, y) \right) = \frac{1}{5} \left(\right.$$

$$(-6 E_{66} E_{22} + (12 E_{44} + 6 E_{12}) E_{55} - 12 E_{24} E_{56}) E_{33} + 6 E_{66} E_{23}^2$$

$$+ (-6 E_{23} E_{13} - 12 E_{34}^2) E_{55} + 12 E_{56} E_{34} E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\right.$$

$$((-6 E_{12} - 12 E_{44}) E_{66} + 12 E_{56} E_{14} + 6 E_{55} E_{11}) E_{33} + (6 E_{23} E_{13} + 12 E_{34}^2) E_{66}$$

$$- 12 E_{13} E_{34} E_{56} - 6 E_{55} E_{13}^2 \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right)$$

$$+ ((18 E_{14} E_{55} - 18 E_{66} E_{24}) E_{33} - 18 E_{34} (E_{55} E_{13} - E_{66} E_{23})) \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right)$$

$$\left. + ((6 E_{56} E_{11} - 6 E_{66} E_{14}) E_{33} - 6 E_{56} E_{13}^2 + 6 E_{66} E_{34} E_{13}) \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right)$$

$$-6 \left((E_{22} E_{56} - E_{55} E_{24}) E_{33} + E_{23} E_{34} E_{55} - E_{56} E_{23}^2 \right) \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) \Big/ (E_{33} (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}))$$

Für Isotropie ergibt das:

> **simplify(simpmat(diff(su_c2u_2_1, x) - diff(su_c2u_1_1, y), 4));**

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} c2u_{2,1}(x, y) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial y} c2u_{1,1}(x, y) \right) = 0$$

D.h. $c^2 \cdot \psi = 0$ (vgl. S. 66).

9 Reduktion mit psi-Anteilen

Dieser Abschnitt begleitet Kapitel 8 der Diplomarbeit.

Ihm liegt ein Einsetzschemata zu Grunde. Nur die Variable "Schema" muss geändert werden, um eine andere Manipulation an den Gleichungen (1,1) und (1,2) respektive $c^2(1,1)$ und $c^2(1,2)$ durchzuführen (vgl. Kapitel 8). Neues Kompilieren des Abschnitts liefert dann die komplette Reduktion für das veränderte Einsetzschemata.

> **Schema := [3, 0, 0, 2];**

Schema := [3, 0, 0, 2]

Die ersten beiden Positionen des Schemas beeinflussen die Gleichungen (1,1) und $c^2(1,1)$. Die letzten beiden beeinflussen die Gleichungen (1,2) und $c^2(1,2)$. Die jeweils erste der beiden Positionen beeinflusst jeweils die orange markierten Terme in Tabelle 4. Die zweite beeinflusst jeweils die in Tabelle 4 blau markierten Terme. Beispielsweise legt Position drei des Schemas also fest, welche Substitutionen an den orange markierten Termen der Gleichungen (1,2) und $c^2(1,2)$ vorgenommen werden. Eine drei bedeutet, dass der entsprechend farblich markierte $u[1,1]$ -Term durch die entsprechende Substitution (vgl. (68) und (69)) in einen $u[2,1]$ -Term überführt wird, durch die Addition eines passenden psi-Anteils. (Der Term verschiebt sich quasi in die dritte Spalte der Tabelle 3.) Eine zwei bedeutet entsprechend dass ein $u[2,1]$ - in einen $u[1,1]$ -Term überführt wird (vgl. Tabelle 4). Eine 0 bedeutet, dass keine Substitution durchgeführt wird. Natürlich könnte man für einen farblich markierten Term auch beide Substitutionen (2 und 3) durchführen; was aufgrund der unterschiedlichen Vorfaktoren von $c4u[2,1]$ und $c4u[1,1]$ auch zu psi-Anteilen führen würde, obwohl die Substitutionen 2 und 3 invers zueinander sind. Auch anteilige Substitutionen (man überführt beispielsweise nur $\alpha \cdot c4u[1,1]$ mit α in $[0,1]$) wären denkbar. Die hier betrachteten naheliegendsten Möglichkeiten liefern mit [3,0,0,2] jedoch schon einen gültigen Kandidaten für eine monotrope Plattentheorie.

Zunächst implementieren wir die Substitutionen (68) und (69):

> **ein_orange_3 := diff(c4u[1,1](x,y), y,y) - diff(c4Psi(x,y), y) + diff(c4u[2,1](x,y), x,y);**

$$ein_orange_3 := \frac{\partial^2}{\partial y^2} c4u_{1,1}(x, y) = - \left(\frac{\partial}{\partial y} c4Psi(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4u_{2,1}(x, y) \right)$$

> **ein_blau_3 := diff(c4u[1,1](x,y), x,y) - diff(c4Psi(x,y), x) + diff(c4u[2,1](x,y), x,x);**

$$ein_blau_3 := \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4u_{1,1}(x, y) = - \left(\frac{\partial}{\partial x} c4Psi(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c4u_{2,1}(x, y) \right)$$

> **ein_blau_2:=diff(c4u[2,1](x,y),x,x)=diff(c4Psi(x,y),x)+diff(c4u[1,1](x,y),x,y);**

$$ein_blau_2 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} c4u_{2,1}(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} c4Psi(x,y) \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4u_{1,1}(x,y) \right)$$

> **ein_orange_2:=diff(c4u[2,1](x,y),x,y)=diff(c4Psi(x,y),y)+diff(c4u[1,1](x,y),y,y);**

$$ein_orange_2 := \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4u_{2,1}(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial y} c4Psi(x,y) \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c4u_{1,1}(x,y) \right)$$

Aus programmiertechnischen Gründen benötigen wir noch zwei "leere" Substitutionen, welche den Term nicht verändern. Natürlich würde ein Term, der tatsächlich das Symbol "tue" enthält, auch tatsächlich verändert, doch das trifft auf unsere Gleichungen nicht zu.

> **ein_orange_0:=tue=nichts;**

$$ein_orange_0 := tue = nichts$$

> **ein_blau_0:=tue=nichts;**

$$ein_blau_0 := tue = nichts$$

Die Reduktion verläuft, bis auf die Manipulation der Gleichungen (1,1) und (1,2) respektive $c^2(1,1)$ und $c^2(1,2)$, komplett analog zur ersten Reduktion ohne psi-Anteile (vgl. das Vorgehen mit A(3)). Daher verzichten wir hier auf eine erneute Kommentierung jedes einzelnen Schrittes (Man vgl. die Kommentare in A(3)). Die Gleichungen "su_c4u_2_1", "su_c4u_1_1" und "su_c4u_3_2" werden von den Veränderungen der Gleichungen (1,1), (1,2), $c^2(1,1)$ und $c^2(1,2)$ gar nicht beeinflusst und werden daher nicht erneut behandelt.

Gleichung (3,1), (3,2) und $c^2(1,1), c^2(1,2)$:

Gleichung (3,1):

> **gl31:=expand(cvar(gls(3,1))/(-1/3*3^(1/2)*7^(1/2)));**

$$\begin{aligned} gl31 := & \frac{1}{21} \sqrt{3} \sqrt{7} \sqrt{21} E_{66} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2u_{3,0}(x,y) \right) + \frac{1}{21} \sqrt{3} \sqrt{7} \sqrt{21} E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2u_{3,0}(x,y) \right) \\ & + \frac{1}{21} \sqrt{3} \sqrt{7} \sqrt{21} E_{66} c2u_{1,1}(x,y) + \frac{1}{21} \sqrt{3} \sqrt{7} \sqrt{21} E_{56} c2u_{2,1}(x,y) \\ & + \frac{1}{21} \sqrt{3} \sqrt{7} \sqrt{105} E_{66} \left(\frac{\partial}{\partial x} c4u_{3,2}(x,y) \right) + \frac{1}{21} \sqrt{3} \sqrt{7} \sqrt{105} E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial y} c4u_{3,2}(x,y) \right) \\ & + 2 \sqrt{3} \sqrt{7} E_{66} c4u_{1,3}(x,y) + 2 \sqrt{3} \sqrt{7} E_{56} c4u_{2,3}(x,y) \end{aligned}$$

Gleichung (3,2):

> **gl32:=expand(cvar(gls(3,2))/(-1/3*3^(1/2)*7^(1/2)));**

$$\begin{aligned} gl32 := & \frac{1}{21} \sqrt{3} \sqrt{7} \sqrt{21} E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2u_{3,0}(x,y) \right) + \frac{1}{21} \sqrt{3} \sqrt{7} \sqrt{21} E_{55} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2u_{3,0}(x,y) \right) \\ & + \frac{1}{21} \sqrt{3} \sqrt{7} \sqrt{21} E_{56} c2u_{1,1}(x,y) + \frac{1}{21} \sqrt{3} \sqrt{7} \sqrt{21} E_{55} c2u_{2,1}(x,y) \\ & + \frac{1}{21} \sqrt{3} \sqrt{7} \sqrt{105} E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial x} c4u_{3,2}(x,y) \right) + \frac{1}{21} \sqrt{3} \sqrt{7} \sqrt{105} E_{55} \left(\frac{\partial}{\partial y} c4u_{3,2}(x,y) \right) \\ & + 2 \sqrt{3} \sqrt{7} E_{56} c4u_{1,3}(x,y) + 2 \sqrt{3} \sqrt{7} E_{55} c4u_{2,3}(x,y) \end{aligned}$$

Die folgende Konstruktion führt schlicht die Substitutionen aus, die dem Schema entsprechen.

Gleichung $c^2(1,1)$:

```
> parse(cat("glc2_11:=algsubs(ein_blaue", Schema[2], ", algsubs(ei
n_orange", Schema[1], ", cvar(truncate(c^2*gls(1,1),4)))");", st
atement);
```

$$\begin{aligned}
glc2_{11} := & -E_{66} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2u_{3,0}(x, y) \right) - E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2u_{3,0}(x, y) \right) - E_{66} c2u_{1,1}(x, y) \\
& - E_{56} c2u_{2,1}(x, y) + E_{11} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c4u_{1,1}(x, y) \right) + 2 E_{14} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4u_{1,1}(x, y) \right) \\
& + 2 E_{44} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4u_{2,1}(x, y) \right) - E_{44} \left(\frac{\partial}{\partial y} c4Psi(x, y) \right) + E_{24} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c4u_{2,1}(x, y) \right) \\
& + E_{14} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c4u_{2,1}(x, y) \right) + \sqrt{5} E_{34} \left(\frac{\partial}{\partial y} c4u_{3,2}(x, y) \right) + E_{12} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4u_{2,1}(x, y) \right) \\
& - \frac{1}{3} \sqrt{21} E_{56} c4u_{2,3}(x, y) + \sqrt{5} E_{13} \left(\frac{\partial}{\partial x} c4u_{3,2}(x, y) \right) - \frac{1}{3} \sqrt{21} E_{66} c4u_{1,3}(x, y) \\
& - E_{66} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2u_{3,0}(x, y) \right) - E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2u_{3,0}(x, y) \right) - E_{66} c2u_{1,1}(x, y) - E_{56} c2u_{2,1}(x, y) \\
& + E_{11} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c4u_{1,1}(x, y) \right) + 2 E_{14} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4u_{1,1}(x, y) \right) + 2 E_{44} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4u_{2,1}(x, y) \right) \\
& - E_{44} \left(\frac{\partial}{\partial y} c4Psi(x, y) \right) + E_{24} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c4u_{2,1}(x, y) \right) + E_{14} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c4u_{2,1}(x, y) \right) \\
& + \sqrt{5} E_{34} \left(\frac{\partial}{\partial y} c4u_{3,2}(x, y) \right) + E_{12} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4u_{2,1}(x, y) \right) - \frac{1}{3} \sqrt{21} E_{56} c4u_{2,3}(x, y) \\
& + \sqrt{5} E_{13} \left(\frac{\partial}{\partial x} c4u_{3,2}(x, y) \right) - \frac{1}{3} \sqrt{21} E_{66} c4u_{1,3}(x, y)
\end{aligned}$$

Gleichung $c^2(1,2)$:

```
> parse(cat("glc2_12:=algsubs(ein_blaue", Schema[4], ", algsubs(ei
n_orange", Schema[3], ", cvar(truncate(c^2*gls(1,2),4)))");", st
atement);
```

$$\begin{aligned}
glc2_{12} := & -E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2u_{3,0}(x, y) \right) - E_{55} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2u_{3,0}(x, y) \right) - E_{56} c2u_{1,1}(x, y) \\
& - E_{55} c2u_{2,1}(x, y) + E_{14} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c4u_{1,1}(x, y) \right) + E_{12} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4u_{1,1}(x, y) \right) \\
& + 2 E_{44} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4u_{1,1}(x, y) \right) + E_{24} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c4u_{1,1}(x, y) \right) + E_{22} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c4u_{2,1}(x, y) \right) \\
& + E_{44} \left(\frac{\partial}{\partial x} c4Psi(x, y) \right) + \sqrt{5} E_{23} \left(\frac{\partial}{\partial y} c4u_{3,2}(x, y) \right) + 2 E_{24} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4u_{2,1}(x, y) \right) \\
& - \frac{1}{3} \sqrt{21} E_{55} c4u_{2,3}(x, y) + \sqrt{5} E_{34} \left(\frac{\partial}{\partial x} c4u_{3,2}(x, y) \right) - \frac{1}{3} \sqrt{21} E_{56} c4u_{1,3}(x, y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2u_{3,0}(x, y) \right) - E_{55} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2u_{3,0}(x, y) \right) - E_{56} c2u_{1,1}(x, y) - E_{55} c2u_{2,1}(x, y) \\
& + E_{14} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c4u_{1,1}(x, y) \right) + E_{12} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4u_{1,1}(x, y) \right) + 2 E_{44} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4u_{1,1}(x, y) \right) \\
& + E_{24} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c4u_{1,1}(x, y) \right) + E_{22} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c4u_{2,1}(x, y) \right) + E_{44} \left(\frac{\partial}{\partial x} c4Psi(x, y) \right) \\
& + \sqrt{5} E_{23} \left(\frac{\partial}{\partial y} c4u_{3,2}(x, y) \right) + 2 E_{24} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4u_{2,1}(x, y) \right) - \frac{1}{3} \sqrt{21} E_{55} c4u_{2,3}(x, y) \\
& + \sqrt{5} E_{34} \left(\frac{\partial}{\partial x} c4u_{3,2}(x, y) \right) - \frac{1}{3} \sqrt{21} E_{56} c4u_{1,3}(x, y)
\end{aligned}$$

Lösen des Gleichungssystems:

> **sols := mysolve (subs (su_c4u_1_1, su_c4u_2_1, su_c4u_3_2, {g131=0, g132=0, g1c2_11=0, g1c2_12=0}), [c2u[1,1](x,y), c2u[2,1](x,y), c4u[1,3](x,y), c4u[2,3](x,y)]) :**

> **su_c2u_1_1_Psi := simplify (simplify (sols[1]), size) ;**

$$\begin{aligned}
su_c2u_1_1_Psi := c2u_{1,1}(x, y) = & \frac{1}{5} \left(\left(2 E_{56}^2 E_{34} \right. \right. \\
& + ((-12 E_{44} - 6 E_{12}) E_{33} + 6 E_{23} E_{13} + 12 E_{34}^2) E_{56} \\
& - 18 \left(-E_{14} E_{33} + \left(E_{13} + \frac{1}{9} E_{66} \right) E_{34} \right) E_{55} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(E_{23} E_{56}^2 \right. \\
& + (18 E_{23} E_{34} - 18 E_{24} E_{33}) E_{56} - 6 E_{55} \left((-2 E_{44} - E_{12}) E_{33} + 2 E_{34}^2 + \left(\frac{1}{6} E_{66} + E_{13} \right) E_{23} \right) \left. \right) \\
& \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \\
& \left(E_{13} E_{56}^2 + (-6 E_{14} E_{33} + 6 E_{34} E_{13}) E_{56} - 6 E_{55} \left(-E_{33} E_{11} + E_{13} \left(\frac{1}{6} E_{66} + E_{13} \right) \right) \right) \\
& \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + ((-6 E_{22} E_{33} + 6 E_{23}^2) E_{56} - 6 E_{55} (E_{23} E_{34} - E_{24} E_{33})) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 6 E_{33} \left(\right. \\
& \left. \left(-\frac{5}{6} E_{56}^2 + \frac{5}{6} E_{55} E_{66} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} c2u_{3,0}(x, y) \right) \right. \\
& \left. \left. + E_{44} \left(E_{55} \left(\frac{\partial}{\partial y} c4Psi(x, y) \right) + E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial x} c4Psi(x, y) \right) \right) \right) \right) / ((E_{56}^2 - E_{55} E_{66}) E_{33})
\end{aligned}$$

> **su_c2u_2_1_Psi := simplify (simplify (sols[2]), size) ;**

$$su_c2u_2_1_Psi := c2u_{2,1}(x, y) = \frac{1}{5} \left(\left(
\right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left((6 E_{12} + 12 E_{44}) E_{33} - 12 E_{34}^2 - 6 E_{13} \left(\frac{1}{6} E_{55} + E_{23} \right) \right) E_{66} + E_{13} E_{56}^2 \\
& + (-18 E_{14} E_{33} + 18 E_{34} E_{13}) E_{56} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\right. \\
& \left. 18 E_{24} E_{33} - 18 \left(E_{23} + \frac{1}{9} E_{55} \right) E_{34} \right) E_{66} \\
& + 6 E_{56} \left(\frac{1}{3} E_{34} E_{56} + (-2 E_{44} - E_{12}) E_{33} + 2 E_{34}^2 + E_{23} E_{13} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \\
& ((6 E_{22} E_{33} - E_{55} E_{23} - 6 E_{23}^2) E_{66} + E_{23} E_{56}^2 + (6 E_{23} E_{34} - 6 E_{24} E_{33}) E_{56}) \\
& \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + ((-6 E_{34} E_{13} + 6 E_{14} E_{33}) E_{66} + 6 E_{56} (-E_{33} E_{11} + E_{13}^2)) \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) - 6 E_{33} \left(\right. \\
& \left. \left(\frac{5}{6} E_{56}^2 - \frac{5}{6} E_{55} E_{66} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} c2u_{3,0}(x, y) \right) + E_{44} \left(E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial y} c4Psi(x, y) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} c4Psi(x, y) \right) E_{66} \right) \right. \\
& \left. \left. \right) \right) / ((E_{56}^2 - E_{55} E_{66}) E_{33})
\end{aligned}$$

> **su_c4u_1_3_Psi := simplify(simplify(sols[3]), size);**

$$\begin{aligned}
su_c4u_1_3_Psi := c4u_{1,3}(x, y) = & \frac{1}{35} \left(\left(2 \sqrt{21} E_{34} E_{56}^2 \right. \right. \\
& - \sqrt{21} (-E_{23} E_{13} + 2 E_{44} E_{33} + E_{12} E_{33} - 2 E_{34}^2) E_{56} \\
& - 3 \sqrt{21} \left(-E_{14} E_{33} + E_{34} \left(E_{13} + \frac{2}{3} E_{66} \right) \right) E_{55} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + (\sqrt{21} E_{23} E_{56}^2 \\
& + (-3 \sqrt{21} E_{24} E_{33} + 3 \sqrt{21} E_{23} E_{34}) E_{56} \\
& - \sqrt{21} E_{55} ((-2 E_{44} - E_{12}) E_{33} + 2 E_{34}^2 + E_{23} (E_{13} + E_{66}))) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) - \sqrt{21} \\
& (-E_{11} E_{55} E_{33} + E_{56} E_{14} E_{33} + E_{55} E_{13}^2 + E_{55} E_{66} E_{13} - E_{13} E_{56}^2 - E_{13} E_{34} E_{56}) \\
& \left. \left. \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right. \right. \\
& - \sqrt{21} (-E_{24} E_{55} E_{33} - E_{56} E_{23}^2 + E_{56} E_{22} E_{33} + E_{23} E_{34} E_{55}) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& \left. \left. + \sqrt{21} E_{33} E_{44} \left(E_{55} \left(\frac{\partial}{\partial y} c4Psi(x, y) \right) + E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial x} c4Psi(x, y) \right) \right) \right) \right) / ((-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) E_{33})
\end{aligned}$$

> **su_c4u_2_3_Psi := simplify(simplify(sols[4]), size);**

$$\begin{aligned}
su_c4u_2_3_Psi := c4u_{2,3}(x, y) = & \frac{1}{35} \left(\right. \\
& (-\sqrt{21} (-2 E_{44} - E_{12}) E_{33} - 2 \sqrt{21} E_{34}^2 - \sqrt{21} (E_{23} + E_{55}) E_{13}) E_{66} \\
& + \sqrt{21} (E_{56} E_{13} - 3 E_{14} E_{33} + 3 E_{34} E_{13}) E_{56} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\right. \\
& \left. \left(3 \sqrt{21} E_{24} E_{33} - 2 \sqrt{21} E_{34} \left(\frac{3}{2} E_{23} + E_{55} \right) \right) E_{66} \right. \\
& + \sqrt{21} (2 E_{34} E_{56} + (-2 E_{44} - E_{12}) E_{33} + E_{23} E_{13} + 2 E_{34}^2) E_{56} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \\
& ((\sqrt{21} E_{22} E_{33} - \sqrt{21} E_{23} (E_{23} + E_{55})) E_{66} + \sqrt{21} (E_{23} E_{34} - E_{24} E_{33} + E_{23} E_{56}) E_{56}) \\
& \left. \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right. \\
& - \sqrt{21} (E_{66} E_{34} E_{13} + E_{11} E_{56} E_{33} - E_{56} E_{13}^2 - E_{14} E_{66} E_{33}) \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& \left. - \sqrt{21} E_{33} E_{44} \left(E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial y} c4Psi(x, y) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} c4Psi(x, y) \right) E_{66} \right) \right) / ((-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) E_{33} \\
& \left. \right)
\end{aligned}$$

Unterschiede zur vorherigen Version: (vgl. S. 69)

> **simplify(simplify(su_c2u_1_1_Psi-su_c2u_1_1), size);**

$$0 = \frac{6 E_{44} \left(E_{55} \left(\frac{\partial}{\partial y} c4Psi(x, y) \right) + E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial x} c4Psi(x, y) \right) \right)}{-5 E_{55} E_{66} + 5 E_{56}^2}$$

> **simplify(simplify(su_c2u_2_1_Psi-su_c2u_2_1), size);**

$$0 = - \frac{6 E_{44} \left(E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial y} c4Psi(x, y) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} c4Psi(x, y) \right) E_{66} \right)}{-5 E_{55} E_{66} + 5 E_{56}^2}$$

> **simplify(simplify(su_c4u_1_3_Psi-su_c4u_1_3), size);**

$$0 = - \frac{\sqrt{3} \sqrt{7} E_{44} \left(E_{55} \left(\frac{\partial}{\partial y} c4Psi(x, y) \right) + E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial x} c4Psi(x, y) \right) \right)}{-35 E_{55} E_{66} + 35 E_{56}^2}$$

> **simplify(simplify(su_c4u_2_3_Psi-su_c4u_2_3), size);**

$$0 = \frac{\sqrt{3} \sqrt{7} E_{44} \left(E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial y} c4Psi(x, y) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} c4Psi(x, y) \right) E_{66} \right)}{-35 E_{55} E_{66} + 35 E_{56}^2}$$

Gleichung (2,3): (Vorgehen analog zu A(3))

> **tt:=subs(su_c4u_3_2, su_c4u_1_3_Psi, su_c4u_2_3_Psi, su_c2u_1_1_**

Psi, su_c2u_2_1_Psi, cvar(gls(2,3)) :

Hier substituieren wir zunächst $\sqrt{5} \cdot c2u_{3,2}(x,y) + 3 \cdot c4u_{3,4}(x,y)$ durch die Variable "vari", nach der wir dann auflösen können.

> tt2:=algsubs(sqrt(5)*c2u[3,2](x,y)+3*c4u[3,4](x,y)=vari,tt) :

Auflösen der Gleichung:

> su_gl23_Psi:=sqrt(5)*c2u[3,2](x,y)+3*c4u[3,4](x,y)=simplify(simplify(solve(tt2=c2RS_32(x,y),vari)),size);

$$\begin{aligned}
 su_gl23_Psi := & \sqrt{5} c2u_{3,2}(x, y) + 3 c4u_{3,4}(x, y) = \frac{1}{25} \left(\left((-20 E_{44} - 10 E_{12}) E_{56}^2 \right. \right. \\
 & + ((-120 E_{44} - 60 E_{12}) E_{34} - 90 E_{14} E_{23} - 90 E_{24} E_{13}) E_{56} + (90 E_{66} E_{24} + 90 E_{14} E_{55}) E_{34} \\
 & + 10 ((3 E_{23} + E_{55}) E_{66} + 3 E_{55} E_{13}) (2 E_{44} + E_{12}) E_{33} + (40 E_{34}^2 + 20 E_{23} E_{13}) E_{56}^2 \\
 & + 240 \left(\frac{1}{2} E_{34}^2 + E_{23} E_{13} \right) E_{34} E_{56} + ((-40 E_{55} - 150 E_{23}) E_{66} - 150 E_{55} E_{13}) E_{34}^2 \\
 & - 20 \left(\left(\frac{3}{2} E_{23} + E_{55} \right) E_{66} + \frac{3}{2} E_{55} E_{13} \right) E_{13} E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left((-20 E_{56}^2 E_{24} \right. \\
 & + (-120 E_{34} E_{24} + (-60 E_{44} - 30 E_{12}) E_{23} - 30 E_{13} E_{22}) E_{56} \\
 & + (30 E_{66} E_{22} + 30 E_{55} (2 E_{44} + E_{12})) E_{34} + 20 \left(\left(\frac{9}{2} E_{23} + E_{55} \right) E_{66} + \frac{3}{2} E_{55} E_{13} \right) E_{24} \left. \right) E_{33} \\
 & + 40 E_{34} E_{23} E_{56}^2 + 60 (E_{23} E_{13} + 3 E_{34}^2) E_{23} E_{56} \\
 & - 40 E_{34} \left(\frac{3}{2} E_{55} E_{34}^2 + E_{23} \left((3 E_{23} + E_{55}) E_{66} + \frac{3}{2} E_{55} E_{13} \right) \right) \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\left(\right. \right. \\
 & - 20 E_{56}^2 E_{14} + (-120 E_{14} E_{34} - 30 E_{11} E_{23} - 30 E_{13} (2 E_{44} + E_{12})) E_{56} \\
 & + ((60 E_{44} + 30 E_{12}) E_{66} + 30 E_{55} E_{11}) E_{34} + 20 E_{14} \left(\left(\frac{3}{2} E_{23} + E_{55} \right) E_{66} + \frac{9}{2} E_{55} E_{13} \right) \left. \right) E_{33} \\
 & + 40 E_{13} E_{56}^2 E_{34} + 60 (E_{23} E_{13} + 3 E_{34}^2) E_{13} E_{56} \\
 & - 40 \left(\frac{3}{2} E_{66} E_{34}^2 + E_{13} \left(\left(\frac{3}{2} E_{23} + E_{55} \right) E_{66} + 3 E_{55} E_{13} \right) \right) E_{34} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\right. \\
 & (-5 E_{56}^2 E_{11} + (-30 E_{34} E_{11} - 30 E_{13} E_{14}) E_{56} + 30 E_{66} E_{34} E_{14} + 5 E_{11} (E_{66} + 6 E_{13}) E_{55}) \\
 & E_{33} - 10 (-E_{13} E_{56}^2 - 6 E_{13} E_{34} E_{56} + 3 E_{66} E_{34}^2 + E_{55} E_{13} (3 E_{13} + E_{66})) E_{13} \\
 & \left. \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) + \left(\right. \\
 & (-5 E_{56}^2 E_{22} + (-30 E_{34} E_{22} - 30 E_{23} E_{24}) E_{56} + 30 E_{55} E_{34} E_{24} + 5 E_{22} (6 E_{23} + E_{55}) E_{66}) \\
 & E_{33} - 10 E_{23} (-E_{23} E_{56}^2 - 6 E_{56} E_{34} E_{23} + E_{23} (3 E_{23} + E_{55}) E_{66} + 3 E_{55} E_{34}^2) \\
 & \left. \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) - 6 \sqrt{5} E_{33} \left(-\frac{5}{3} \sqrt{5} (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) E_{34} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c2u_{3,0}(x, y) \right) \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{5}{6}\sqrt{5}(-E_{56}^2 + E_{55}E_{66})E_{23}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}c2u_{3,0}(x,y)\right) \\
& -\frac{5}{6}\sqrt{5}E_{13}(-E_{56}^2 + E_{55}E_{66})\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}c2u_{3,0}(x,y)\right) \\
& +\sqrt{5}E_{44}(E_{23}E_{56} - E_{55}E_{34})\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}c4Psi(x,y)\right) \\
& +\sqrt{5}E_{44}(-E_{56}E_{13} + E_{66}E_{34})\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}c4Psi(x,y)\right) \\
& +\sqrt{5}E_{44}(-E_{55}E_{13} + E_{66}E_{23})\left(\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}c4Psi(x,y)\right) + \frac{5}{6}c2RS_{32}(x,y)(-E_{56}^2 + E_{55}E_{66}) \\
& \left. \right) / (E_{33}^2(-E_{56}^2 + E_{55}E_{66}))
\end{aligned}$$

Unterschiede zur vorherigen Version:

> **simplify(simplify(su_gl23-su_gl23_Psi), size);**

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{6}{5}\left((E_{23}E_{56} - E_{55}E_{34})\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}c4Psi(x,y)\right) + (-E_{56}E_{13} + E_{66}E_{34})\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}c4Psi(x,y)\right)\right. \\
& \left. + \left(\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}c4Psi(x,y)\right)(-E_{55}E_{13} + E_{66}E_{23})\right)E_{44} / (E_{33}(-E_{56}^2 + E_{55}E_{66}))
\end{aligned}$$

Gleichung (1,1) und (1,2) werden konsequenterweise nach demselben "Schema" behandelt (vgl. auch S. 68). Die c-Potenzen in den folgenden Gleichungen müssen wir dafür anpassen (vergleiche oben).

> **ein_orange_3:=diff(c2u[1,1](x,y),y,y)=-diff(c2Psi(x,y),y)+diff(c2u[2,1](x,y),x,y);**

$$ein_orange_3 := \frac{\partial^2}{\partial y^2}c2u_{1,1}(x,y) = -\left(\frac{\partial}{\partial y}c2Psi(x,y)\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}c2u_{2,1}(x,y)\right)$$

> **ein_blaue_3:=diff(c2u[1,1](x,y),x,y)=-diff(c2Psi(x,y),x)+diff(c2u[2,1](x,y),x,x);**

$$ein_blau_3 := \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}c2u_{1,1}(x,y) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}c2Psi(x,y)\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}c2u_{2,1}(x,y)\right)$$

> **ein_blaue_2:=diff(c2u[2,1](x,y),x,x)=diff(c2Psi(x,y),x)+diff(c2u[1,1](x,y),x,y);**

$$ein_blau_2 := \frac{\partial^2}{\partial x^2}c2u_{2,1}(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}c2Psi(x,y)\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}c2u_{1,1}(x,y)\right)$$

> **ein_orange_2:=diff(c2u[2,1](x,y),x,y)=diff(c2Psi(x,y),y)+diff(c2u[1,1](x,y),y,y);**

$$ein_orange_2 := \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}c2u_{2,1}(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial y}c2Psi(x,y)\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}c2u_{1,1}(x,y)\right)$$

Gleichung (1,1):

> **parse(cat("gl_11:=alsubs(ein_blaue_", Schema[2], ", alsubs(ein_**

orange_", Schema[1], ", cvar(gls(1,1))");", statement);

$$\begin{aligned}
gl_{11} := & -E_{66} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{3,0}(x,y) \right) - E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{3,0}(x,y) \right) + E_{11} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c2u_{1,1}(x,y) \right) \\
& + 2 E_{14} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c2u_{1,1}(x,y) \right) + 3 E_{13} \left(\frac{\partial}{\partial x} c4u_{3,4}(x,y) \right) - E_{44} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2Psi(x,y) \right) \\
& + 2 E_{44} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c2u_{2,1}(x,y) \right) - \frac{1}{3} \sqrt{33} E_{66} c4u_{1,5}(x,y) + E_{14} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c2u_{2,1}(x,y) \right) \\
& + E_{12} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c2u_{2,1}(x,y) \right) + E_{24} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c2u_{2,1}(x,y) \right) - E_{66} u_{1,1}(x,y) - E_{56} u_{2,1}(x,y) \\
& + \sqrt{5} E_{13} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2u_{3,2}(x,y) \right) + \sqrt{5} E_{34} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2u_{3,2}(x,y) \right) - \frac{1}{3} \sqrt{21} E_{66} c2u_{1,3}(x,y) \\
& - \frac{1}{3} \sqrt{21} E_{56} c2u_{2,3}(x,y) + 3 E_{34} \left(\frac{\partial}{\partial y} c4u_{3,4}(x,y) \right) - \frac{1}{3} \sqrt{33} E_{56} c4u_{2,5}(x,y) \\
& - E_{66} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{3,0}(x,y) \right) - E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{3,0}(x,y) \right) + E_{11} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c2u_{1,1}(x,y) \right) \\
& + 2 E_{14} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c2u_{1,1}(x,y) \right) + 3 E_{13} \left(\frac{\partial}{\partial x} c4u_{3,4}(x,y) \right) - E_{44} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2Psi(x,y) \right) \\
& + 2 E_{44} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c2u_{2,1}(x,y) \right) - \frac{1}{3} \sqrt{33} E_{66} c4u_{1,5}(x,y) + E_{14} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c2u_{2,1}(x,y) \right) \\
& + E_{12} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c2u_{2,1}(x,y) \right) + E_{24} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c2u_{2,1}(x,y) \right) - E_{66} u_{1,1}(x,y) - E_{56} u_{2,1}(x,y) \\
& + \sqrt{5} E_{13} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2u_{3,2}(x,y) \right) + \sqrt{5} E_{34} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2u_{3,2}(x,y) \right) - \frac{1}{3} \sqrt{21} E_{66} c2u_{1,3}(x,y) \\
& - \frac{1}{3} \sqrt{21} E_{56} c2u_{2,3}(x,y) + 3 E_{34} \left(\frac{\partial}{\partial y} c4u_{3,4}(x,y) \right) - \frac{1}{3} \sqrt{33} E_{56} c4u_{2,5}(x,y)
\end{aligned}$$

Gleichung (1,2):

> parse(cat("gl_12:=algs subs(ein_blaue_", Schema[4], ", algs subs(ein_orange_", Schema[3], ", cvar(gls(1,2))");", statement);

$$\begin{aligned}
gl_{12} := & -E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{3,0}(x,y) \right) - E_{55} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{3,0}(x,y) \right) + E_{14} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c2u_{1,1}(x,y) \right) \\
& + E_{12} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c2u_{1,1}(x,y) \right) + 2 E_{44} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c2u_{1,1}(x,y) \right) + E_{24} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c2u_{1,1}(x,y) \right) \\
& - \frac{1}{3} \sqrt{33} E_{56} c4u_{1,5}(x,y) + E_{44} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2Psi(x,y) \right) - E_{55} u_{2,1}(x,y) \\
& + 2 E_{24} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c2u_{2,1}(x,y) \right) + E_{22} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c2u_{2,1}(x,y) \right) - E_{56} u_{1,1}(x,y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{3}\sqrt{21} E_{55} c2u_{2,3}(x, y) + \sqrt{5} E_{34} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2u_{3,2}(x, y) \right) + \sqrt{5} E_{23} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2u_{3,2}(x, y) \right) \\
& -\frac{1}{3}\sqrt{21} E_{56} c2u_{1,3}(x, y) - \frac{1}{3}\sqrt{33} E_{55} c4u_{2,5}(x, y) + 3 E_{34} \left(\frac{\partial}{\partial x} c4u_{3,4}(x, y) \right) \\
& + 3 E_{23} \left(\frac{\partial}{\partial y} c4u_{3,4}(x, y) \right) \\
& -E_{56} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{3,0}(x, y) \right) - E_{55} \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{3,0}(x, y) \right) + E_{14} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c2u_{1,1}(x, y) \right) \\
& + E_{12} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c2u_{1,1}(x, y) \right) + 2 E_{44} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c2u_{1,1}(x, y) \right) + E_{24} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c2u_{1,1}(x, y) \right) \\
& -\frac{1}{3}\sqrt{33} E_{56} c4u_{1,5}(x, y) + E_{44} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2\Psi(x, y) \right) - E_{55} u_{2,1}(x, y) \\
& + 2 E_{24} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c2u_{2,1}(x, y) \right) + E_{22} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c2u_{2,1}(x, y) \right) - E_{56} u_{1,1}(x, y) \\
& -\frac{1}{3}\sqrt{21} E_{55} c2u_{2,3}(x, y) + \sqrt{5} E_{34} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2u_{3,2}(x, y) \right) + \sqrt{5} E_{23} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2u_{3,2}(x, y) \right) \\
& -\frac{1}{3}\sqrt{21} E_{56} c2u_{1,3}(x, y) - \frac{1}{3}\sqrt{33} E_{55} c4u_{2,5}(x, y) + 3 E_{34} \left(\frac{\partial}{\partial x} c4u_{3,4}(x, y) \right) \\
& + 3 E_{23} \left(\frac{\partial}{\partial y} c4u_{3,4}(x, y) \right)
\end{aligned}$$

Nun gehen wir wieder analog zu Abschnitt A(3) vor:

Wieder substituieren wir zunächst die gewünschten Variablen durch Symbole ("suvarix" und "suvari") und lösen dann das System nach den Symbolen.

```
> gl11:=subs(su_c2u_1_1_Psi, su_c2u_2_1_Psi, algsubs(E[13]*diff(su_g123_Psi, x)+E[34]*diff(su_g123_Psi, y), gl_11=0)):
```

```
> gl12:=subs(su_c2u_1_1_Psi, su_c2u_2_1_Psi, algsubs(E[34]*diff(su_g123_Psi, x)+E[23]*diff(su_g123_Psi, y), gl_12=0)):
```

```
> suvarix:=diff(u[3,0](x,y), x)+u[1,1](x,y)+1/3*sqrt(3)*sqrt(7)*c2u[1,3](x,y)+1/3*sqrt(3)*sqrt(11)*c4u[1,5](x,y)=vari_x(x,y);
```

```
suvarix := \left( \frac{\partial}{\partial x} u_{3,0}(x, y) \right) + u_{1,1}(x, y) + \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{7} c2u_{1,3}(x, y) + \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{11} c4u_{1,5}(x, y) =
```

```
vari_x(x, y)
```

```
> suvari:=diff(u[3,0](x,y), y)+u[2,1](x,y)+1/3*sqrt(3)*sqrt(7)*c2u[2,3](x,y)+1/3*sqrt(3)*sqrt(11)*c4u[2,5](x,y)=vari_y(x,y);
```

```
suvari := \left( \frac{\partial}{\partial y} u_{3,0}(x, y) \right) + u_{2,1}(x, y) + \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{7} c2u_{2,3}(x, y) + \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{11} c4u_{2,5}(x, y) =
```

```
vari_y(x, y)
```

```
> gl112:=simplify(algsubs(suvari, algsubs(suvarix, gl11)), size):
```

```
> gl122:=simplify(algsubs(suvari, algsubs(suvarix, gl12)), size):
```

Lösung des Systems:

```

> sols:=mysolve({gl112,gl122},[vari_x(x,y),vari_y(x,y)]):
> su_gl11_Psi:=diff(u[3,0](x,y),x)+u[1,1](x,y)+1/3*sqrt(3)*sqrt
(7)*c2u[1,3](x,y)+1/3*sqrt(3)*sqrt(11)*c4u[1,5](x,y)=simplify
(simplify(op(2,sols[1])),size);

```

su_glll_Psi :=

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{3,0}(x,y) \right) + u_{1,1}(x,y) + \frac{1}{3} \sqrt{3} \sqrt{7} c2u_{1,3}(x,y) + \frac{1}{3} \sqrt{3} \sqrt{11} c4u_{1,5}(x,y) = \frac{1}{5} \left(\left(\left(\right. \right. \right. \\
& (-6 E_{12}^2 - 60 E_{24} E_{14} - 24 E_{44} E_{12} - 24 E_{44}^2 - 6 E_{22} E_{11}) E_{56}^2 + \\
& \left. \left((60 E_{14} E_{12} + 30 E_{24} E_{11} + 120 E_{44} E_{14}) E_{55} + 12 \left(2 E_{44} E_{24} + E_{24} E_{12} + \frac{1}{2} E_{22} E_{14} \right) E_{66} \right) \right. \\
& E_{56} \\
& \left. - 6 (E_{55} (2 E_{11} E_{44} + E_{11} E_{12} + 6 E_{14}^2) + E_{66} (4 E_{44} E_{12} + 4 E_{44}^2 + E_{12}^2 + 4 E_{24} E_{14})) E_{55} \right) \\
& E_{33}^2 + \left(((8 E_{44} + 4 E_{12}) E_{34} + 5 E_{14} E_{23} + 3 E_{24} E_{13}) E_{56}^3 + (\right. \\
& (-10 E_{14} E_{34} - E_{11} E_{23} - 3 E_{13} (2 E_{44} + E_{12})) E_{55} + (24 E_{12} + 48 E_{44}) E_{34}^2 \\
& + (60 E_{14} E_{23} + 60 E_{24} E_{13}) E_{34} + 6 E_{23}^2 E_{11} + 12 E_{13} (2 E_{44} + E_{12}) E_{23} + 6 E_{22} E_{13}^2) E_{56}^2 \\
& \left. + \left((-90 E_{14} E_{34}^2 + ((-4 E_{12} - 8 E_{44}) E_{66} - 30 E_{11} E_{23} - 60 E_{13} (2 E_{44} + E_{12})) E_{34} \right. \right. \\
& \left. + (-3 E_{24} E_{13} - 5 E_{14} E_{23}) E_{66} - 60 E_{23} E_{13} E_{14} - 30 E_{24} E_{13}^2) E_{55} \right. \\
& \left. - 12 \left(\frac{7}{2} E_{24} E_{34}^2 + \left(E_{23} (2 E_{44} + E_{12}) + \frac{1}{2} E_{13} E_{22} \right) E_{34} + E_{24} E_{23} E_{13} + \frac{1}{2} E_{23}^2 E_{14} \right) E_{66} \right) E_{56} \\
& + 6 \left(\left(3 E_{11} E_{34}^2 + 12 E_{14} \left(\frac{5}{36} E_{66} + E_{13} \right) E_{34} + \left(\frac{1}{6} E_{11} E_{23} + \frac{1}{2} E_{13} (2 E_{44} + E_{12}) \right) E_{66} \right. \right. \\
& \left. \left. + (E_{13} (2 E_{44} + E_{12}) + E_{11} E_{23}) E_{13} \right) E_{55} \right. \\
& \left. + 2 E_{66} \left(\left(\frac{3}{2} E_{12} + 3 E_{44} \right) E_{34}^2 + (2 E_{24} E_{13} + 2 E_{14} E_{23}) E_{34} + E_{13} (2 E_{44} + E_{12}) E_{23} \right) \right) E_{55} \\
& E_{33} + (-12 E_{34} E_{23} E_{13} - 8 E_{34}^3) E_{56}^3 \\
& + ((16 E_{34}^2 E_{13} + 4 E_{13}^2 E_{23}) E_{55} - 84 E_{23} E_{34}^2 E_{13} - 12 E_{23}^2 E_{13}^2 - 24 E_{34}^4) E_{56}^2 + 90 E_{34} \\
& \left(\left(\left(E_{13} + \frac{4}{45} E_{66} \right) E_{34}^2 + \left(\frac{2}{15} E_{66} + E_{13} \right) E_{23} E_{13} \right) E_{55} + \frac{1}{5} \left(\frac{7}{3} E_{34}^2 + E_{23} E_{13} \right) E_{23} E_{66} \right) E_{56} - \\
& 6 E_{55} \left(\left(\left(9 E_{13} + \frac{8}{3} E_{66} \right) E_{34}^2 + E_{23} E_{13} \left(E_{13} + \frac{2}{3} E_{66} \right) \right) E_{13} E_{55} \right. \\
& \left. + E_{66} (7 E_{23} E_{34}^2 E_{13} + E_{23}^2 E_{13}^2 + 2 E_{34}^4) \right) \left(\frac{\partial^5}{\partial y^2 \partial x^3} c4u_{3,0}(x,y) \right) + \left(\left(\right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-36 E_{24} E_{12} - 24 E_{22} E_{14} - 72 E_{44} E_{24}) E_{56}^2 + (\\
& (84 E_{24} E_{14} + 6 E_{22} E_{11} + 48 E_{44} E_{12} + 48 E_{44}^2 + 12 E_{12}^2) E_{55} \\
& + 6 E_{66} (E_{22} E_{12} + 2 E_{22} E_{44} + 6 E_{24}^2) E_{56} \\
& - 6 \left(E_{55} (E_{24} E_{11} + 2 E_{14} E_{12} + 4 E_{44} E_{14}) + 4 \left(2 E_{44} E_{24} + \frac{1}{4} E_{22} E_{14} + E_{24} E_{12} \right) E_{66} \right) E_{55} \Big) \\
& E_{33}^2 + \left((10 E_{34} E_{24} + (6 E_{44} + 3 E_{12}) E_{23} + E_{13} E_{22}) E_{56}^3 + (\right. \\
& ((-4 E_{12} - 8 E_{44}) E_{34} - 3 E_{14} E_{23} - 5 E_{24} E_{13}) E_{55} + 60 E_{24} E_{34}^2 \\
& + ((36 E_{12} + 72 E_{44}) E_{23} + 24 E_{13} E_{22}) E_{34} + 24 E_{23}^2 E_{14} + 36 E_{24} E_{23} E_{13}) E_{56}^2 + ((\\
& (-84 E_{44} - 42 E_{12}) E_{34}^2 + (-10 E_{66} E_{24} - 84 E_{14} E_{23} - 84 E_{24} E_{13}) E_{34} \\
& + ((-6 E_{44} - 3 E_{12}) E_{23} - E_{13} E_{22}) E_{66} - 6 E_{23}^2 E_{11} - 24 E_{13} (2 E_{44} + E_{12}) E_{23} - 6 E_{22} E_{13}^2 \\
&) E_{55} - 6 (3 E_{34}^2 E_{22} + 12 E_{34} E_{23} E_{24} + (E_{13} E_{22} + E_{23} (2 E_{44} + E_{12})) E_{23}) E_{66} \Big) E_{56} + 6 \left(\left(\right. \right. \\
& 7 E_{14} E_{34}^2 + \left(\left(\frac{4}{3} E_{44} + \frac{2}{3} E_{12} \right) E_{66} + E_{11} E_{23} + 2 E_{13} (2 E_{44} + E_{12}) \right) E_{34} \\
& + \left(\frac{5}{6} E_{24} E_{13} + \frac{1}{2} E_{14} E_{23} \right) E_{66} + 2 E_{23} E_{13} E_{14} + E_{24} E_{13}^2 \Big) E_{55} \\
& + 4 \left(\frac{5}{4} E_{24} E_{34}^2 + \left(E_{23} (2 E_{44} + E_{12}) + \frac{1}{4} E_{13} E_{22} \right) E_{34} + \frac{1}{4} E_{23}^2 E_{14} + E_{24} E_{23} E_{13} \right) E_{66} \Big) E_{55} \Big) \\
& E_{33} + (-16 E_{23} E_{34}^2 - 4 E_{23}^2 E_{13}) E_{56}^3 \\
& + ((8 E_{34}^3 + 12 E_{34} E_{23} E_{13}) E_{55} - 60 E_{23} E_{34}^3 - 60 E_{23}^2 E_{34} E_{13}) E_{56}^2 + \left(\right. \\
& \left(36 E_{34}^4 + 126 E_{23} \left(E_{13} + \frac{8}{63} E_{66} \right) E_{34}^2 + 18 \left(\frac{2}{9} E_{66} + E_{13} \right) E_{23}^2 E_{13} \right) E_{55} \\
& + 6 E_{66} E_{23}^2 (E_{23} E_{13} + 9 E_{34}^2) \Big) E_{56} - 18 E_{55} E_{34} \\
& \left(\left(\left(\frac{4}{9} E_{66} + \frac{7}{3} E_{13} \right) E_{34}^2 + E_{23} E_{13} \left(E_{13} + \frac{2}{3} E_{66} \right) \right) E_{55} + \frac{5}{3} E_{66} E_{23} (E_{23} E_{13} + E_{34}^2) \right) \Big) \\
& \left(\frac{\partial^5}{\partial y^3 \partial x^2} cAu_{3,0}(x, y) \right) + \left(\left((-12 E_{22} E_{12} - 24 E_{22} E_{44} - 30 E_{24}^2) E_{56}^2 \right. \right. \\
& + ((12 E_{22} E_{14} + 24 E_{24} E_{12} + 48 E_{44} E_{24}) E_{55} + 30 E_{66} E_{22} E_{24}) E_{56} \\
& - 12 \left(E_{55} E_{14} E_{24} + \frac{1}{2} E_{66} (3 E_{24}^2 + E_{22} E_{12} + 2 E_{22} E_{44}) \right) E_{55} \Big) E_{33}^2 + (\\
& (7 E_{23} E_{24} + 3 E_{34} E_{22}) E_{56}^3 + ((-6 E_{34} E_{24} + (-2 E_{44} - E_{12}) E_{23} - E_{13} E_{22}) E_{55}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 18 E_{34}^2 E_{22} + 60 E_{34} E_{23} E_{24} + 12 (E_{13} E_{22} + E_{23} (2 E_{44} + E_{12})) E_{23} E_{56}^2 + ((\\
& - 54 E_{24} E_{34}^2 + (-3 E_{66} E_{22} + (-48 E_{44} - 24 E_{12}) E_{23} - 12 E_{13} E_{22}) E_{34} - 7 E_{66} E_{24} E_{23} \\
& - 24 E_{24} E_{23} E_{13} - 12 E_{23}^2 E_{14}) E_{55} - 30 E_{66} E_{23} (E_{23} E_{24} + E_{34} E_{22})) E_{56} + ((\\
& (6 E_{12} + 12 E_{44}) E_{34}^2 + (12 E_{24} E_{13} + 6 E_{66} E_{24} + 12 E_{14} E_{23}) E_{34} \\
& + (E_{13} E_{22} + E_{23} (2 E_{44} + E_{12})) E_{66}) E_{55} \\
& + 6 (E_{34}^2 E_{22} + 6 E_{34} E_{23} E_{24} + (E_{13} E_{22} + E_{23} (2 E_{44} + E_{12})) E_{23}) E_{66} E_{55} E_{33} \\
& - 10 E_{23}^2 E_{34} E_{56}^3 + 2 E_{23} (E_{23} E_{13} + 4 E_{34}^2) (-6 E_{23} + E_{55}) E_{56}^2 \\
& + 36 E_{34} \left(\left(\frac{3}{2} E_{34}^2 + \left(\frac{5}{18} E_{66} + E_{13} \right) E_{23} \right) E_{55} + \frac{5}{6} E_{66} E_{23}^2 \right) E_{23} E_{56} - 2 E_{55} \\
& \left(\left(6 E_{34}^4 + 9 \left(\frac{4}{9} E_{66} + E_{13} \right) E_{23} E_{34}^2 + E_{66} E_{13} E_{23}^2 \right) E_{55} + 3 E_{66} E_{23}^2 (E_{23} E_{13} + 4 E_{34}^2) \right) \\
& \left(\frac{\partial^5}{\partial y^4 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left((-24 E_{44} E_{14} - 12 E_{24} E_{11} - 12 E_{14} E_{12}) E_{56}^2 \right. \\
& + ((18 E_{11} E_{12} + 48 E_{14}^2 + 36 E_{11} E_{44}) E_{55} + 12 E_{66} E_{24} E_{14}) E_{56} \\
& - 30 \left(E_{55} E_{11} + \frac{2}{5} E_{66} (2 E_{44} + E_{12}) \right) E_{14} E_{55} E_{33}^2 + \left(\right. \\
& (6 E_{14} E_{34} + E_{11} E_{23} + E_{13} (2 E_{44} + E_{12})) E_{56}^3 + ((-3 E_{34} E_{11} - 7 E_{13} E_{14}) E_{55} + 36 E_{14} E_{34}^2 \\
& + (12 E_{11} E_{23} + 12 E_{13} (2 E_{44} + E_{12})) E_{34} + 12 E_{24} E_{13}^2 + 12 E_{23} E_{13} E_{14}) E_{56}^2 + \left(\left(\right. \right. \\
& - 24 E_{11} E_{34}^2 - 96 E_{14} \left(\frac{1}{16} E_{66} + E_{13} \right) E_{34} - 18 \left(\frac{1}{18} E_{66} + E_{13} \right) (E_{13} (2 E_{44} + E_{12}) + E_{11} E_{23}) \\
& \left. \left. \right) E_{55} - 6 ((2 E_{44} + E_{12}) E_{34} + 2 E_{24} E_{13} + 2 E_{14} E_{23}) E_{66} E_{34} \right) E_{56} + 30 E_{55} \left(\right. \\
& \left(E_{11} \left(E_{13} + \frac{1}{10} E_{66} \right) E_{34} + E_{14} E_{13} \left(\frac{7}{30} E_{66} + E_{13} \right) \right) E_{55} \\
& + \frac{2}{5} \left(\frac{3}{2} E_{14} E_{34}^2 + E_{13} (2 E_{44} + E_{12}) E_{34} + E_{23} E_{13} E_{14} \right) E_{66} \left. \right) E_{33} \\
& + (-8 E_{34}^2 E_{13} - 2 E_{13}^2 E_{23}) E_{56}^3 + (-36 E_{34}^3 E_{13} - 24 E_{34} E_{23} E_{13}^2 + 10 E_{55} E_{34} E_{13}^2) E_{56}^2 \\
& + \left(18 \left(E_{13} + \frac{1}{9} E_{66} \right) E_{13} (E_{23} E_{13} + 4 E_{34}^2) E_{55} + 12 E_{66} E_{34}^4 + 18 E_{66} E_{23} E_{34}^2 E_{13} \right) E_{56} \\
& - 30 E_{55} \left(\left(E_{13} + \frac{1}{3} E_{66} \right) E_{13} E_{55} + \frac{2}{5} E_{66} \left(\frac{3}{2} E_{34}^2 + E_{23} E_{13} \right) \right) E_{34} E_{13} \left(\frac{\partial^5}{\partial y \partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + \left(12 (-E_{22} E_{56} + E_{55} E_{24}) \left(-\frac{1}{2} E_{66} E_{22} + E_{24} E_{56} \right) E_{33}^2 + (2 E_{23} E_{22} E_{56}^3 \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (E_{23} E_{24} + E_{34} E_{22}) (-12 E_{23} + E_{55}) E_{56}^2 \\
& + ((-6 E_{34}^2 E_{22} - 24 E_{34} E_{23} E_{24} - 2 E_{66} E_{23} E_{22}) E_{55} - 12 E_{66} E_{22} E_{23}^2) E_{56} \\
& + E_{55} ((6 E_{24} E_{34}^2 + E_{66} E_{34} E_{22} + E_{66} E_{24} E_{23}) E_{55} + 6 E_{66} E_{23} (E_{23} E_{24} + E_{34} E_{22})) E_{33} - \\
& 2 (-E_{23} E_{56} + E_{55} E_{34}) E_{23} (-E_{23} E_{56}^2 - 6 E_{56} E_{34} E_{23} + (3 E_{34}^2 + E_{66} E_{23}) E_{55} + 3 E_{66} E_{23}^2) \\
& \left) \left(\frac{\partial^5}{\partial y^5} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\right. \\
& (-6 E_{55} E_{66} E_{14}^2 + 18 E_{55} E_{56} E_{14} E_{11} - 6 E_{55}^2 E_{11}^2 - 6 E_{56}^2 E_{14}^2) E_{33}^2 + \left(\right. \\
& (E_{13} E_{14} + E_{34} E_{11}) E_{56}^3 + (6 E_{11} E_{34}^2 + 12 E_{14} E_{13} E_{34} - 2 E_{55} E_{11} E_{13}) E_{56}^2 \\
& + \left. \left(-18 (E_{13} E_{14} + E_{34} E_{11}) \left(\frac{1}{18} E_{66} + E_{13} \right) E_{55} - 6 E_{34}^2 E_{66} E_{14} \right) E_{56} \right. \\
& + \left. 12 E_{55} \left(E_{11} \left(\frac{1}{6} E_{66} + E_{13} \right) E_{55} + E_{66} E_{34} E_{14} \right) E_{13} \right) E_{33} - \\
& 6 (-E_{34} E_{56} + E_{55} E_{13}) \left(-\frac{1}{3} E_{13} E_{56}^2 - 2 E_{13} E_{34} E_{56} + \left(E_{13} + \frac{1}{3} E_{66} \right) E_{13} E_{55} + E_{66} E_{34}^2 \right) E_{13} \\
& \left) \left(\frac{\partial^5}{\partial x^5} c4u_{3,0}(x, y) \right) - \left(5 \right. \\
& ((-3 E_{24} E_{56} + E_{55} (2 E_{44} + E_{12})) E_{33} + 3 E_{56} E_{34} E_{23} - E_{55} (2 E_{34}^2 + E_{23} E_{13})) \\
& (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c2u_{3,0}(x, y) \right) - 15 \\
& \left(\left(\left(\frac{2}{3} E_{44} + \frac{1}{3} E_{12} \right) E_{56} - E_{14} E_{55} \right) E_{33} + \left(-\frac{2}{3} E_{34}^2 - \frac{1}{3} E_{23} E_{13} \right) E_{56} + E_{34} E_{13} E_{55} \right) \\
& (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c2u_{3,0}(x, y) \right) - 12 E_{44} \left(\right. \\
& \left. \left(-\frac{1}{2} E_{56}^2 E_{24} + \left(E_{55} (2 E_{44} + E_{12}) - \frac{1}{2} E_{66} E_{22} \right) E_{56} + \frac{1}{2} E_{55} E_{66} E_{24} - E_{55}^2 E_{14} \right) E_{33} \right. \\
& + \left. (-E_{23} E_{56} + E_{55} E_{34}) \left(E_{55} E_{13} - \frac{1}{2} E_{34} E_{56} - \frac{1}{2} E_{66} E_{23} \right) \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4Psi(x, y) \right) + 6 E_{44} (\\
& ((-2 E_{44} - E_{12}) E_{56}^2 + 2 E_{24} E_{56} E_{66} + (E_{55} E_{11} - E_{66} (2 E_{44} + E_{12})) E_{55}) E_{33} + E_{56}^2 E_{23} E_{13} \\
& - 2 E_{66} E_{56} E_{23} E_{34} - (E_{55} E_{13}^2 - (E_{23} E_{13} + E_{34}^2) E_{66}) E_{55} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4Psi(x, y) \right) \\
& + 5 ((E_{55} E_{11} - E_{56} E_{14}) E_{33} - E_{55} E_{13}^2 + E_{13} E_{34} E_{56}) (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c2u_{3,0}(x, y) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -5 \left((E_{22} E_{56} - E_{55} E_{24}) E_{33} + E_{23} E_{34} E_{55} - E_{56} E_{23}^2 \right) (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c2u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + 6 \\
& \left((-E_{55} E_{14} E_{66} - E_{56}^2 E_{14} + E_{55} E_{11} E_{56}) E_{33} - (E_{56} E_{13} - E_{66} E_{34}) (-E_{34} E_{56} + E_{55} E_{13}) \right) \\
& E_{44} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4Psi(x, y) \right) \\
& - 6 \left((2 E_{55} E_{56} E_{24} - E_{56}^2 E_{22}) E_{33} + (-E_{23} E_{56} + E_{55} E_{34})^2 \right) E_{44} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4Psi(x, y) \right) + \\
& (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \left((E_{55} \sqrt{5} E_{34} - E_{56} \sqrt{5} E_{23}) \left(\frac{\partial}{\partial y} c2RS_{32}(x, y) \right) \right. \\
& \left. + (E_{55} E_{13} \sqrt{5} - E_{56} \sqrt{5} E_{34}) \left(\frac{\partial}{\partial x} c2RS_{32}(x, y) \right) \right) \\
& + 5 E_{33} E_{44} \left(E_{55} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2Psi(x, y) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} c2Psi(x, y) \right) E_{56} \right) \left. \right) E_{33} \Bigg/ \left((-E_{56}^2 + E_{55} E_{66})^2 \right. \\
& \left. E_{33}^2 \right)
\end{aligned}$$

> su_gl12_Psi:=diff(u[3,0](x,y),y)+u[2,1](x,y)+1/3*sqrt(3)*sqrt(7)*c2u[2,3](x,y)+1/3*sqrt(3)*sqrt(11)*c4u[2,5](x,y)=simplify(simplify(op(2,sols[2])),size);

su_gl12_Psi :=

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{3,0}(x, y) \right) + u_{2,1}(x, y) + \frac{1}{3} \sqrt{3} \sqrt{7} c2u_{2,3}(x, y) + \frac{1}{3} \sqrt{3} \sqrt{11} c4u_{2,5}(x, y) = \frac{1}{5} \left(\left(\left(\left(\left(\left(-6 E_{12}^2 - 60 E_{24} E_{14} - 24 E_{44} E_{12} - 24 E_{44}^2 - 6 E_{22} E_{11} \right) E_{56}^2 + \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left(30 E_{22} E_{14} + 120 E_{44} E_{24} + 60 E_{24} E_{12} \right) E_{66} + 24 E_{55} \left(\frac{1}{4} E_{24} E_{11} + E_{44} E_{14} + \frac{1}{2} E_{14} E_{12} \right) \right) \right. \\
& \left. E_{56} \right. \\
& \left. - 24 \left(\left(\frac{1}{4} E_{22} E_{12} + \frac{1}{2} E_{22} E_{44} + \frac{3}{2} E_{24}^2 \right) E_{66} + E_{55} \left(E_{24} E_{14} + E_{44}^2 + \frac{1}{4} E_{12}^2 + E_{44} E_{12} \right) \right) E_{66} \right) \\
& E_{33}^2 + \left((8 E_{44} + 4 E_{12}) E_{34} + 3 E_{14} E_{23} + 5 E_{24} E_{13} \right) E_{56}^3 + \left(\left(-10 E_{34} E_{24} - E_{13} E_{22} - 6 \left(\frac{1}{2} E_{12} + E_{44} \right) E_{23} \right) E_{66} + (24 E_{12} + 48 E_{44}) E_{34}^2 \right. \\
& \left. + (60 E_{14} E_{23} + 60 E_{24} E_{13}) E_{34} + 6 E_{22} E_{13}^2 + 24 \left(\frac{1}{2} E_{12} + E_{44} \right) E_{23} E_{13} + 6 E_{23}^2 E_{11} \right) E_{56}^2 \\
& + \left(\left(-90 E_{24} E_{34}^2 + \left(-4 E_{12} - 8 E_{44} \right) E_{55} - 30 E_{13} E_{22} - 120 \left(\frac{1}{2} E_{12} + E_{44} \right) E_{23} \right) E_{34} \right. \\
& \left. + (-5 E_{24} E_{13} - 3 E_{14} E_{23}) E_{55} - 60 E_{24} E_{23} E_{13} - 30 E_{23}^2 E_{14} \right) E_{66}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -24 \left(\frac{7}{4} E_{14} E_{34}^2 + \left(\left(\frac{1}{2} E_{12} + E_{44} \right) E_{13} + \frac{1}{4} E_{11} E_{23} \right) E_{34} + \frac{1}{4} E_{24} E_{13}^2 + \frac{1}{2} E_{23} E_{13} E_{14} \right) E_{55} \\
& E_{56} + 6 \left(\left(3 E_{34}^2 E_{22} + \frac{5}{3} \left(E_{55} + \frac{36}{5} E_{23} \right) E_{24} E_{34} + \left(\frac{1}{6} E_{13} E_{22} + \left(\frac{1}{2} E_{12} + E_{44} \right) E_{23} \right) E_{55} \right. \right. \\
& \left. \left. + E_{23} E_{13} E_{22} + 2 \left(\frac{1}{2} E_{12} + E_{44} \right) E_{23}^2 \right) E_{66} \right. \\
& \left. + 4 E_{55} \left(\left(\frac{3}{2} E_{44} + \frac{3}{4} E_{12} \right) E_{34}^2 + (E_{24} E_{13} + E_{14} E_{23}) E_{34} + \left(\frac{1}{2} E_{12} + E_{44} \right) E_{23} E_{13} \right) \right) E_{66} \right) E_{33} \\
& + (-12 E_{34} E_{23} E_{13} - 8 E_{34}^3) E_{56}^3 \\
& + ((16 E_{23} E_{34}^2 + 4 E_{23}^2 E_{13}) E_{66} - 24 E_{34}^4 - 84 E_{23} E_{34}^2 E_{13} - 12 E_{23}^2 E_{13}^2) E_{56}^2 + 12 E_{34} \\
& \left(\left(\left(\frac{15}{2} E_{23} + \frac{2}{3} E_{55} \right) E_{34}^2 + E_{13} E_{23} \left(\frac{15}{2} E_{23} + E_{55} \right) \right) E_{66} + \frac{3}{2} E_{55} E_{13} \left(\frac{7}{3} E_{34}^2 + E_{23} E_{13} \right) \right) E_{56} \\
& - 4 \left(\left(\left(4 E_{55} + \frac{27}{2} E_{23} \right) E_{34}^2 + E_{13} E_{23} \left(\frac{3}{2} E_{23} + E_{55} \right) \right) E_{23} E_{66} \right. \\
& \left. + \frac{3}{2} E_{55} (7 E_{23} E_{34}^2 E_{13} + E_{23}^2 E_{13}^2 + 2 E_{34}^4) \right) E_{66} \left(\frac{\partial^5}{\partial y^3 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\left(\right. \right. \\
& (-72 E_{44} E_{14} - 36 E_{14} E_{12} - 24 E_{24} E_{11}) E_{56}^2 + \left(\right. \\
& (84 E_{24} E_{14} + 6 E_{22} E_{11} + 48 E_{44} E_{12} + 48 E_{44}^2 + 12 E_{12}^2) E_{66} \\
& \left. \left. + 12 E_{55} \left(\frac{1}{2} E_{11} E_{12} + 3 E_{14}^2 + E_{11} E_{44} \right) \right) \right) E_{56} \\
& - 24 \left(\left(\frac{1}{2} E_{24} E_{12} + \frac{1}{4} E_{22} E_{14} + E_{44} E_{24} \right) E_{66} + 2 \left(\frac{1}{8} E_{24} E_{11} + E_{44} E_{14} + \frac{1}{2} E_{14} E_{12} \right) E_{55} \right) E_{66} \\
& E_{33}^2 + \left((10 E_{14} E_{34} + (6 E_{44} + 3 E_{12}) E_{13} + E_{11} E_{23}) E_{56}^3 + (\right. \\
& ((-4 E_{12} - 8 E_{44}) E_{34} - 3 E_{24} E_{13} - 5 E_{14} E_{23}) E_{66} + 60 E_{14} E_{34}^2 \\
& \left. \left. + ((36 E_{12} + 72 E_{44}) E_{13} + 24 E_{11} E_{23}) E_{34} + 36 E_{23} E_{13} E_{14} + 24 E_{24} E_{13}^2 \right) E_{56}^2 + \left(\left(\right. \right. \\
& (-84 E_{44} - 42 E_{12}) E_{34}^2 + (-84 E_{24} E_{13} - 84 E_{14} E_{23} - 10 E_{14} E_{55}) E_{34} \\
& \left. \left. + ((-6 E_{44} - 3 E_{12}) E_{13} - E_{11} E_{23}) E_{55} - 6 E_{22} E_{13}^2 - 48 \left(\frac{1}{2} E_{12} + E_{44} \right) E_{23} E_{13} - 6 E_{23}^2 E_{11} \right. \right. \\
& \left. \left. \right) E_{66} - 12 \left(\frac{3}{2} E_{11} E_{34}^2 + 6 E_{14} E_{13} E_{34} + \left(\left(\frac{1}{2} E_{12} + E_{44} \right) E_{13} + \frac{1}{2} E_{11} E_{23} \right) E_{13} \right) E_{55} \right) E_{56} + 8 \\
& E_{66} \left(\left(\frac{21}{4} E_{24} E_{34}^2 + \left(\left(\frac{1}{2} E_{12} + E_{44} \right) E_{55} + \frac{3}{4} E_{13} E_{22} + 3 \left(\frac{1}{2} E_{12} + E_{44} \right) E_{23} \right) E_{34} \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{5}{8} E_{14} E_{23} + \frac{3}{8} E_{24} E_{13} \right) E_{55} + \frac{3}{2} E_{24} E_{23} E_{13} + \frac{3}{4} E_{23}^2 E_{14} \Big) E_{66} \\
& + 6 E_{55} \left(\frac{5}{8} E_{14} E_{34}^2 + \left(\left(\frac{1}{2} E_{12} + E_{44} \right) E_{13} + \frac{1}{8} E_{11} E_{23} \right) E_{34} + \frac{1}{8} E_{24} E_{13}^2 + \frac{1}{2} E_{23} E_{13} E_{14} \right) \Big) \Big) \\
& E_{33} + (-4 E_{13}^2 E_{23} - 16 E_{34}^2 E_{13}) E_{56}^3 \\
& + ((8 E_{34}^3 + 12 E_{34} E_{23} E_{13}) E_{66} - 60 E_{34}^3 E_{13} - 60 E_{34} E_{23} E_{13}^2) E_{56}^2 + \left(\right. \\
& \left. \left(36 E_{34}^4 + 16 \left(E_{55} + \frac{63}{8} E_{23} \right) E_{13} E_{34}^2 + 4 \left(\frac{9}{2} E_{23} + E_{55} \right) E_{13}^2 E_{23} \right) E_{66} \right. \\
& \left. + 6 E_{55} E_{13}^2 (E_{23} E_{13} + 9 E_{34}^2) \right) E_{56} - 12 E_{34} \\
& \left(\left(\left(\frac{7}{2} E_{23} + \frac{2}{3} E_{55} \right) E_{34}^2 + E_{13} E_{23} \left(\frac{3}{2} E_{23} + E_{55} \right) \right) E_{66} + \frac{5}{2} E_{55} E_{13} (E_{23} E_{13} + E_{34}^2) \right) E_{66} \\
& \left(\frac{\partial^5}{\partial y^2 \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\left((-30 E_{14}^2 - 12 E_{11} E_{12} - 24 E_{11} E_{44}) E_{56}^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + ((24 E_{14} E_{12} + 12 E_{24} E_{11} + 48 E_{44} E_{14}) E_{66} + 30 E_{55} E_{14} E_{11}) E_{56} \right. \right. \\
& \left. \left. - 12 E_{66} \left(E_{66} E_{24} E_{14} + E_{55} \left(E_{11} E_{44} + \frac{1}{2} E_{11} E_{12} + \frac{3}{2} E_{14}^2 \right) \right) \right) \right) E_{33}^2 + \left(\right. \\
& (3 E_{34} E_{11} + 7 E_{13} E_{14}) E_{56}^3 + ((-6 E_{14} E_{34} + (-2 E_{44} - E_{12}) E_{13} - E_{11} E_{23}) E_{66} \\
& + 18 E_{11} E_{34}^2 + 60 E_{14} E_{13} E_{34} + (24 E_{44} + 12 E_{12}) E_{13}^2 + 12 E_{23} E_{13} E_{11}) E_{56}^2 + ((\\
& -54 E_{14} E_{34}^2 + (-3 E_{55} E_{11} + (-48 E_{44} - 24 E_{12}) E_{13} - 12 E_{11} E_{23}) E_{34} - 12 E_{24} E_{13}^2 \\
& - 24 E_{23} E_{13} E_{14} - 7 E_{55} E_{13} E_{14}) E_{66} - 30 E_{55} E_{13} (E_{13} E_{14} + E_{34} E_{11})) E_{56} + 2 \left(\left(\right. \right. \\
& (6 E_{44} + 3 E_{12}) E_{34}^2 + (6 E_{24} E_{13} + 3 E_{14} E_{55} + 6 E_{14} E_{23}) E_{34} \\
& \left. \left. + \left(\left(\frac{1}{2} E_{12} + E_{44} \right) E_{13} + \frac{1}{2} E_{11} E_{23} \right) E_{55} \right) E_{66} \right. \\
& \left. + 6 E_{55} \left(\frac{1}{2} E_{11} E_{34}^2 + 3 E_{14} E_{13} E_{34} + \left(\left(\frac{1}{2} E_{12} + E_{44} \right) E_{13} + \frac{1}{2} E_{11} E_{23} \right) E_{13} \right) \right) E_{66} \Big) E_{33} \\
& - 10 E_{34} E_{13}^2 E_{56}^3 + 2 E_{13} (E_{23} E_{13} + 4 E_{34}^2) (-6 E_{13} + E_{66}) E_{56}^2 \\
& + 10 E_{34} E_{13} \left(\left(\frac{27}{5} E_{34}^2 + \left(E_{55} + \frac{18}{5} E_{23} \right) E_{13} \right) E_{66} + 3 E_{55} E_{13}^2 \right) E_{56} - 2 \\
& \left(\left(6 E_{34}^4 + 4 E_{13} \left(\frac{9}{4} E_{23} + E_{55} \right) E_{34}^2 + E_{55} E_{13}^2 E_{23} \right) E_{66} + 3 E_{55} E_{13}^2 (E_{23} E_{13} + 4 E_{34}^2) \right) E_{66} \\
& \left. \right) \left(\frac{\partial^5}{\partial y \partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\left((-12 E_{22} E_{14} - 24 E_{44} E_{24} - 12 E_{24} E_{12}) E_{56}^2 \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + ((18 E_{22} E_{12} + 36 E_{22} E_{44} + 48 E_{24}^2) E_{66} + 12 E_{55} E_{14} E_{24}) E_{56} \\
& - 24 \left(\frac{5}{4} E_{66} E_{22} + \left(\frac{1}{2} E_{12} + E_{44} \right) E_{55} \right) E_{66} E_{24} \Big) E_{33}^2 + \left(\right. \\
& \left. \left(6 E_{34} E_{24} + E_{13} E_{22} + 2 \left(\frac{1}{2} E_{12} + E_{44} \right) E_{23} \right) E_{56}^3 + \left((-3 E_{34} E_{22} - 7 E_{23} E_{24}) E_{66} \right. \right. \\
& \left. \left. + 36 E_{24} E_{34}^2 + \left(12 E_{13} E_{22} + 24 \left(\frac{1}{2} E_{12} + E_{44} \right) E_{23} \right) E_{34} + 12 E_{24} E_{23} E_{13} + 12 E_{23}^2 E_{14} \right) \right. \\
& \left. E_{56}^2 + \left(\left(\right. \right. \right. \\
& \left. \left. -24 E_{34}^2 E_{22} - 6 E_{24} (E_{55} + 16 E_{23}) E_{34} - 2 \left(\frac{1}{2} E_{13} E_{22} + \left(\frac{1}{2} E_{12} + E_{44} \right) E_{23} \right) (18 E_{23} + E_{55}) \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \right) E_{66} - 12 E_{34} E_{55} \left(\left(\frac{1}{2} E_{12} + E_{44} \right) E_{34} + E_{14} E_{23} + E_{24} E_{13} \right) \right) \right) E_{56} + 24 \left(\right. \\
& \left. \left(\frac{1}{8} E_{22} (10 E_{23} + E_{55}) E_{34} + \frac{7}{24} \left(\frac{30}{7} E_{23} + E_{55} \right) E_{23} E_{24} \right) E_{66} \right. \\
& \left. + E_{55} \left(\frac{3}{4} E_{24} E_{34}^2 + \left(\frac{1}{2} E_{12} + E_{44} \right) E_{23} E_{34} + \frac{1}{2} E_{24} E_{23} E_{13} \right) \right) \Big) E_{66} \Big) E_{33} \\
& + (-2 E_{23}^2 E_{13} - 8 E_{23} E_{34}^2) E_{56}^3 + (-24 E_{23}^2 E_{34} E_{13} + 10 E_{23}^2 E_{34} E_{66} - 36 E_{23} E_{34}^3) E_{56}^2 \\
& + (2 E_{23} (E_{23} E_{13} + 4 E_{34}^2) (9 E_{23} + E_{55}) E_{66} + 12 E_{55} E_{34}^4 + 18 E_{55} E_{34}^2 E_{13} E_{23}) E_{56} \\
& - 10 E_{34} E_{23} E_{66} \left(E_{23} (3 E_{23} + E_{55}) E_{66} + \frac{6}{5} E_{55} \left(\frac{3}{2} E_{34}^2 + E_{23} E_{13} \right) \right) \Big) \left(\frac{\partial^5}{\partial y^4 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + \left(12 (-E_{56} E_{11} + E_{66} E_{14}) \left(E_{56} E_{14} - \frac{1}{2} E_{55} E_{11} \right) E_{33}^2 + (2 E_{13} E_{11} E_{56}^3 \right. \\
& \left. - (E_{13} E_{14} + E_{34} E_{11}) (-12 E_{13} + E_{66}) E_{56}^2 \right. \\
& \left. + ((-2 E_{55} E_{11} E_{13} - 6 E_{11} E_{34}^2 - 24 E_{14} E_{13} E_{34}) E_{66} - 12 E_{55} E_{13}^2 E_{11}) E_{56} \right. \\
& \left. + ((E_{55} E_{34} E_{11} + E_{55} E_{13} E_{14} + 6 E_{14} E_{34}^2) E_{66} + 6 E_{55} E_{13} (E_{13} E_{14} + E_{34} E_{11})) E_{66} \right) E_{33} - \\
& 2 E_{13} (-E_{56} E_{13} + E_{66} E_{34}) (-E_{13} E_{56}^2 - 6 E_{13} E_{34} E_{56} + (E_{55} E_{13} + 3 E_{34}^2) E_{66} + 3 E_{55} E_{13}^2) \\
& \Big) \left(\frac{\partial^5}{\partial x^5} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\right. \\
& (-6 E_{66}^2 E_{22}^2 - 6 E_{24}^2 E_{56}^2 + 18 E_{24} E_{56} E_{22} E_{66} - 6 E_{55} E_{24}^2 E_{66}) E_{33}^2 + \left(\right. \\
& (E_{23} E_{24} + E_{34} E_{22}) E_{56}^3 + (6 E_{34}^2 E_{22} - 2 E_{66} E_{23} E_{22} + 12 E_{34} E_{23} E_{24}) E_{56}^2 \\
& + (- (E_{23} E_{24} + E_{34} E_{22}) (18 E_{23} + E_{55}) E_{66} - 6 E_{34}^2 E_{55} E_{24}) E_{56} \\
& + 2 (E_{22} (6 E_{23} + E_{55}) E_{66} + 6 E_{55} E_{34} E_{24}) E_{23} E_{66} \Big) E_{33} - \\
& 2 E_{23} (-E_{23} E_{56}^2 - 6 E_{56} E_{34} E_{23} + E_{23} (3 E_{23} + E_{55}) E_{66} + 3 E_{55} E_{34}^2) (-E_{34} E_{56} + E_{66} E_{23}) \Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial^5}{\partial y^5} c4u_{3,0}(x, y) \right) - 24 E_{33} \left(-\frac{5}{12} (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \right. \\
& \left. \left(\left(\left(\frac{1}{2} E_{12} + E_{44} \right) E_{56} - \frac{3}{2} E_{66} E_{24} \right) E_{33} + \left(-\frac{1}{2} E_{23} E_{13} - E_{34}^2 \right) E_{56} + \frac{3}{2} E_{66} E_{34} E_{23} \right) \right. \\
& \left. \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c2u_{3,0}(x, y) \right) + \frac{5}{12} (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \right. \\
& \left. \left(\left(-\frac{3}{2} E_{56} E_{14} + \left(\frac{1}{2} E_{12} + E_{44} \right) E_{66} \right) E_{33} + \frac{3}{2} E_{13} E_{34} E_{56} - \frac{1}{2} E_{66} (2 E_{34}^2 + E_{23} E_{13}) \right) \right. \\
& \left. \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c2u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\right. \right. \\
& \left. \left. \left(-\frac{1}{4} E_{56}^2 E_{14} + \left(\left(\frac{1}{2} E_{12} + E_{44} \right) E_{66} - \frac{1}{4} E_{55} E_{11} \right) E_{56} - \frac{1}{2} E_{24} E_{66}^2 + \frac{1}{4} E_{55} E_{14} E_{66} \right) E_{33} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} (-E_{56} E_{13} + E_{66} E_{34}) \left(E_{66} E_{23} - \frac{1}{2} E_{34} E_{56} - \frac{1}{2} E_{55} E_{13} \right) \right) E_{44} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4Psi(x, y) \right) + \frac{1}{2} \left(\right. \\
& \left. \left(\left(\frac{1}{2} E_{12} + E_{44} \right) E_{56}^2 - E_{56} E_{14} E_{55} + \left(-\frac{1}{2} E_{66} E_{22} + \left(\frac{1}{2} E_{12} + E_{44} \right) E_{55} \right) E_{66} \right) E_{33} \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} E_{56}^2 E_{23} E_{13} + E_{56} E_{34} E_{13} E_{55} + \frac{1}{2} (E_{66} E_{23}^2 - (E_{23} E_{13} + E_{34}^2) E_{55}) E_{66} \right) E_{44} \\
& \left. \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4Psi(x, y) \right) - \right. \\
& \frac{5}{24} (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) ((E_{56} E_{11} - E_{66} E_{14}) E_{33} - E_{56} E_{13}^2 + E_{66} E_{34} E_{13}) \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c2u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + \\
& \frac{5}{24} (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) ((-E_{24} E_{56} + E_{66} E_{22}) E_{33} - E_{66} E_{23}^2 + E_{56} E_{34} E_{23}) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c2u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - \frac{1}{4} E_{44} \\
& ((-E_{55} E_{66} E_{24} + E_{22} E_{56} E_{66} - E_{56}^2 E_{24}) E_{33} - (E_{23} E_{56} - E_{55} E_{34}) (-E_{34} E_{56} + E_{66} E_{23})) \\
& \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4Psi(x, y) \right) \\
& + \frac{1}{4} ((-E_{56}^2 E_{11} + 2 E_{14} E_{56} E_{66}) E_{33} + (-E_{56} E_{13} + E_{66} E_{34})^2) E_{44} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4Psi(x, y) \right) - \frac{5}{24} \\
& (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \left(\left(-\frac{1}{5} E_{66} E_{23} \sqrt{5} + \frac{1}{5} E_{56} \sqrt{5} E_{34} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} c2RS_{32}(x, y) \right) \right. \\
& \left. + \left(-\frac{1}{5} E_{66} \sqrt{5} E_{34} + \frac{1}{5} E_{56} E_{13} \sqrt{5} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} c2RS_{32}(x, y) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$+ E_{44} E_{33} \left(\left(\left(\frac{\partial}{\partial x} c2\Psi(x, y) \right) E_{66} + \left(\frac{\partial}{\partial y} c2\Psi(x, y) \right) E_{56} \right) \right) \Bigg) \Bigg) / (E_{33}^2 (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66})^2)$$

Unterschiede zur vorherigen Version:

> **simplify(simplify(su_gl11_Psi-su_gl11), size);**

$$0 = \frac{6}{5} E_{44} \left(\left((3 E_{14} E_{33} - 3 E_{34} E_{13}) E_{55}^2 \right. \right. \\ + \left((2 E_{44} + E_{12}) E_{33} - 2 E_{34}^2 - E_{23} E_{13} \right) E_{56} + 3 E_{66} (E_{23} E_{34} - E_{24} E_{33}) \left. \right) E_{55} \\ + E_{56} \left((2 E_{23} E_{34} - 2 E_{24} E_{33}) E_{56} + E_{66} (E_{23}^2 - E_{22} E_{33}) \right) \left(\frac{\partial^5}{\partial y^3 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + (\\ (2 E_{44} + E_{12}) E_{33} - 2 E_{34}^2 - E_{23} E_{13} \left. \right) E_{55}^2 \\ + \left((E_{23} E_{34} - E_{24} E_{33}) E_{56} + E_{66} (E_{23}^2 - E_{22} E_{33}) \right) E_{55} + E_{56}^2 (E_{23}^2 - E_{22} E_{33}) \\ \left(\frac{\partial^5}{\partial y^4 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left((E_{33} E_{11} - E_{13}^2) E_{55}^2 \right. \\ + \left((-5 E_{34} E_{13} + 5 E_{14} E_{33}) E_{56} + \left((-2 E_{44} - E_{12}) E_{33} + E_{23} E_{13} + 2 E_{34}^2 \right) E_{66} \right) E_{55} \\ + 3 E_{66} E_{56} (E_{23} E_{34} - E_{24} E_{33}) \left(\frac{\partial^5}{\partial y^2 \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + (\\ (-2 E_{13}^2 + 2 E_{33} E_{11}) E_{56} - E_{66} (E_{14} E_{33} - E_{34} E_{13}) \left. \right) E_{55} \\ + \left((-2 E_{34} E_{13} + 2 E_{14} E_{33}) E_{56} + \left((-2 E_{44} - E_{12}) E_{33} + E_{23} E_{13} + 2 E_{34}^2 \right) E_{66} \right) E_{56} \\ \left(\frac{\partial^5}{\partial y \partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\ + \left((E_{24} E_{33} - E_{23} E_{34}) E_{55} + E_{56} (E_{23}^2 - E_{22} E_{33}) \right) E_{55} \left(\frac{\partial^5}{\partial y^5} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\ - E_{56} (E_{56} (-E_{33} E_{11} + E_{13}^2) + E_{66} (E_{14} E_{33} - E_{34} E_{13})) \left(\frac{\partial^5}{\partial x^5} c4u_{3,0}(x, y) \right) + (\\ (2 E_{34} E_{13} - 2 E_{14} E_{33}) E_{55}^2 \\ + \left((2 E_{12} + 4 E_{44}) E_{33} - 2 E_{23} E_{13} - E_{34}^2 \right) E_{56} - E_{66} (E_{23} E_{34} - E_{24} E_{33}) \left. \right) E_{55} \\ + \left((E_{23} E_{34} - E_{24} E_{33}) E_{56} + E_{66} (E_{23}^2 - E_{22} E_{33}) \right) E_{56} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4\Psi(x, y) \right) + \left(\\ (-E_{33} E_{11} + E_{13}^2) E_{55}^2 - \left((-2 E_{44} - E_{12}) E_{33} + E_{34}^2 + E_{23} E_{13} \right) E_{66} E_{55} \right. \\ \left. + 2 \left(\left(\frac{1}{2} E_{12} + E_{44} \right) E_{33} - \frac{1}{2} E_{23} E_{13} \right) E_{56} + E_{66} (E_{23} E_{34} - E_{24} E_{33}) \right) E_{56} \Bigg)$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4Psi(x, y) \right) + ((E_{56} (-E_{33} E_{11} + E_{13}^2) + E_{66} (E_{14} E_{33} - E_{34} E_{13})) E_{55} \\
& + (E_{14} E_{33} - E_{34} E_{13}) E_{56}^2 + E_{56} E_{66} E_{34}^2) \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4Psi(x, y) \right) \\
& + (E_{55}^2 E_{34}^2 - 2 (E_{23} E_{34} - E_{24} E_{33}) E_{56} E_{55} + E_{56}^2 (E_{23}^2 - E_{22} E_{33})) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4Psi(x, y) \right) \\
& - \frac{5}{6} \left(E_{55} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2Psi(x, y) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} c2Psi(x, y) \right) E_{56} \right) E_{33} (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \Big/ (E_{33} \\
& (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66})^2)
\end{aligned}$$

> **simplify(simplify(su_gll2_Psi-su_gll2), size);**

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{6}{5} \left(((-3 E_{23} E_{34} + 3 E_{24} E_{33}) E_{66}^2 \right. \\
& + (((2 E_{44} + E_{12}) E_{33} - 2 E_{34}^2 - E_{23} E_{13}) E_{56} + 3 E_{55} (-E_{14} E_{33} + E_{34} E_{13})) E_{66} \\
& + ((2 E_{34} E_{13} - 2 E_{14} E_{33}) E_{56} + E_{55} (-E_{33} E_{11} + E_{13}^2)) E_{56} \left. \left(\frac{\partial^5}{\partial y^2 \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) + (\\
& ((-2 E_{23}^2 + 2 E_{22} E_{33}) E_{56} + E_{55} (E_{23} E_{34} - E_{24} E_{33})) E_{66} \\
& - E_{56} ((2 E_{23} E_{34} - 2 E_{24} E_{33}) E_{56} + E_{55} ((2 E_{44} + E_{12}) E_{33} - 2 E_{34}^2 - E_{23} E_{13}))) \\
& \left(\frac{\partial^5}{\partial y^4 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + ((E_{22} E_{33} - E_{23}^2) E_{66}^2 \\
& + ((-5 E_{23} E_{34} + 5 E_{24} E_{33}) E_{56} - E_{55} ((2 E_{44} + E_{12}) E_{33} - 2 E_{34}^2 - E_{23} E_{13})) E_{66} \\
& + 3 E_{55} E_{56} (-E_{14} E_{33} + E_{34} E_{13})) \left(\frac{\partial^5}{\partial y^3 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + (\\
& ((2 E_{44} + E_{12}) E_{33} - 2 E_{34}^2 - E_{23} E_{13}) E_{66}^2 \\
& + ((-E_{14} E_{33} + E_{34} E_{13}) E_{56} + E_{55} (-E_{33} E_{11} + E_{13}^2)) E_{66} + E_{56}^2 (-E_{33} E_{11} + E_{13}^2)) \\
& \left(\frac{\partial^5}{\partial y \partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + ((E_{22} E_{33} - E_{23}^2) E_{56} + E_{55} (E_{23} E_{34} - E_{24} E_{33})) E_{56} \left(\frac{\partial^5}{\partial y^5} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + E_{66} (E_{56} (-E_{33} E_{11} + E_{13}^2) + E_{66} (E_{14} E_{33} - E_{34} E_{13})) \left(\frac{\partial^5}{\partial x^5} c4u_{3,0}(x, y) \right) + (\\
& (-2 E_{23} E_{34} + 2 E_{24} E_{33}) E_{66}^2 \\
& + (((-2 E_{12} - 4 E_{44}) E_{33} + E_{34}^2 + 2 E_{23} E_{13}) E_{56} + E_{55} (-E_{14} E_{33} + E_{34} E_{13})) E_{66}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -((-E_{14} E_{33} + E_{34} E_{13}) E_{56} + E_{55} (-E_{33} E_{11} + E_{13}^2)) E_{56} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4Psi(x, y) \right) + (\\
& (E_{22} E_{33} - E_{23}^2) E_{66}^2 - E_{55} ((2 E_{44} + E_{12}) E_{33} - E_{34}^2 - E_{23} E_{13}) E_{66} \\
& - (((2 E_{44} + E_{12}) E_{33} - E_{23} E_{13}) E_{56} + 2 E_{55} (-E_{14} E_{33} + E_{34} E_{13})) E_{56} \\
& \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4Psi(x, y) \right) + (((E_{22} E_{33} - E_{23}^2) E_{56} + E_{55} (E_{23} E_{34} - E_{24} E_{33})) E_{66} \\
& + (E_{23} E_{34} - E_{24} E_{33}) E_{56}^2 - E_{56} E_{55} E_{34}^2) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4Psi(x, y) \right) \\
& + (-E_{66}^2 E_{34}^2 + 2 (-E_{14} E_{33} + E_{34} E_{13}) E_{56} E_{66} - E_{56}^2 (-E_{33} E_{11} + E_{13}^2)) \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4Psi(x, y) \right) \\
& - \frac{5}{6} E_{33} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} c2Psi(x, y) \right) E_{66} + \left(\frac{\partial}{\partial y} c2Psi(x, y) \right) E_{56} \right) (E_{56}^2 - E_{55} E_{66}) E_{44} / (E_{33} \\
& (E_{56}^2 - E_{55} E_{66})^2)
\end{aligned}$$

Nun Gleichung (0,3): (wieder ist das Vorgehen analog zu A(3))

Mit "su_gll1" und "su_gll2" bilden wir den folgenden Ausdruck "tt":

```
> tt := E[66]*diff(su_gll1_Psi, x) + E[56]*diff(su_gll1_Psi, y) +
      E[56]*diff(su_gll2_Psi, x) + E[55]*diff(su_gll2_Psi, y) :
```

"op(1,tt)" gibt die linke Seite vom Symbol "tt" (eine Gleichung !) zurück.

```
> op(1, tt) ;
```

$$\begin{aligned}
& E_{66} \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{1,1}(x, y) \right) + \frac{1}{3} \sqrt{3} \sqrt{7} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2u_{1,3}(x, y) \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{3} \sqrt{3} \sqrt{11} \left(\frac{\partial}{\partial x} c4u_{1,5}(x, y) \right) \right) + E_{56} \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{1,1}(x, y) \right) \right) \\
& + \frac{1}{3} \sqrt{3} \sqrt{7} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2u_{1,3}(x, y) \right) + \frac{1}{3} \sqrt{3} \sqrt{11} \left(\frac{\partial}{\partial y} c4u_{1,5}(x, y) \right) + E_{56} \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u_{3,0}(x, y) \right) \right. \\
& \left. + \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{2,1}(x, y) \right) + \frac{1}{3} \sqrt{3} \sqrt{7} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2u_{2,3}(x, y) \right) + \frac{1}{3} \sqrt{3} \sqrt{11} \left(\frac{\partial}{\partial x} c4u_{2,5}(x, y) \right) \right) + E_{55} \left(\right. \\
& \left. \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{2,1}(x, y) \right) + \frac{1}{3} \sqrt{3} \sqrt{7} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2u_{2,3}(x, y) \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{3} \sqrt{3} \sqrt{11} \left(\frac{\partial}{\partial y} c4u_{2,5}(x, y) \right) \right)
\end{aligned}$$

Die linke Seite von "tt" ist gerade die linke Seite von (0,3), was die Differenz unten verrät, also ist die rechte Seite von "tt" auch gleich der rechten Seite von (0,3). Diese Gleichung ist unsere gesuchte PDE ("hauptgl_Psi") in u[3,0].

```
> simplify(op(1, tt) - cvar(gls(0, 3))) ;
```

0

Wir definieren "hauptgl". "RS_30" ist die rechte Seite von (0,3) und steht wiederum abkürzend

für "-a*P_3^0/h".

> **hauptgl_Psi:=op(2,tt)=RS_30(x,y):**

Wir lassen Maple die "hauptgl_Psi" möglichst kompakt darstellen:

> **simplify(simplify(hauptgl_Psi),size);**

$$\frac{1}{5} \left(\left((-48 E_{44}^2 - 12 E_{12}^2 - 120 E_{24} E_{14} - 48 E_{44} E_{12} - 12 E_{22} E_{11}) E_{56} \right. \right. \\ + (72 E_{44} E_{24} + 36 E_{24} E_{12} + 12 E_{22} E_{14}) E_{66} + 12 E_{55} (3 E_{14} E_{12} + E_{24} E_{11} + 6 E_{44} E_{14}) \\ E_{33}^2 + (((8 E_{12} + 16 E_{44}) E_{34} + 8 E_{14} E_{23} + 8 E_{24} E_{13}) E_{56}^2 + ((96 E_{44} + 48 E_{12}) E_{34}^2 \\ + (120 E_{14} E_{23} + 120 E_{24} E_{13}) E_{34} + 12 E_{23}^2 E_{11} + 24 E_{13} (2 E_{44} + E_{12}) E_{23} + 12 E_{22} E_{13}^2) \\ E_{56} + (-72 E_{66} E_{24} - 72 E_{14} E_{55}) E_{34}^2 + (\\ ((-16 E_{44} - 8 E_{12}) E_{55} + (-36 E_{12} - 72 E_{44}) E_{23} - 12 E_{13} E_{22}) E_{66} \\ - 12 (E_{11} E_{23} + 3 E_{13} (2 E_{44} + E_{12})) E_{55}) E_{34} \\ + ((-8 E_{24} E_{13} - 8 E_{14} E_{23}) E_{55} - 12 E_{23}^2 E_{14} - 36 E_{24} E_{23} E_{13}) E_{66} \\ - 12 E_{13} E_{55} (E_{24} E_{13} + 3 E_{14} E_{23}) E_{33} + (-24 E_{34} E_{23} E_{13} - 16 E_{34}^3) E_{56}^2 \\ + (-168 E_{23} E_{34}^2 E_{13} - 48 E_{34}^4 - 24 E_{23}^2 E_{13}^2) E_{56} \\ + 48 \left(\left(\frac{1}{3} E_{55} + \frac{3}{2} E_{23} \right) E_{66} + \frac{3}{2} E_{55} E_{13} \right) E_{34}^2 + E_{13} \left(\left(\frac{1}{2} E_{55} + E_{23} \right) E_{66} + E_{55} E_{13} \right) E_{23} \Big) E_{34} \\ \Big) \left(\frac{\partial^6}{\partial y^3 \partial x^3} c4u_{3,0}(x,y) \right) + \left((-96 E_{44} E_{24} - 48 E_{24} E_{12} - 36 E_{22} E_{14}) E_{56} \right. \\ + (54 E_{24}^2 + 12 E_{22} E_{12} + 24 E_{22} E_{44}) E_{66} + 6 E_{55} (4 E_{44} E_{12} + 4 E_{44}^2 + E_{12}^2 + 6 E_{24} E_{14}) \\ E_{33}^2 + \left((16 E_{34} E_{24} + (8 E_{44} + 4 E_{12}) E_{23} + 2 E_{13} E_{22}) E_{56}^2 + \right. \\ (96 E_{24} E_{34}^2 + ((96 E_{44} + 48 E_{12}) E_{23} + 36 E_{13} E_{22}) E_{34} + 36 E_{23}^2 E_{14} + 48 E_{24} E_{23} E_{13}) E_{56} \\ + (-24 E_{66} E_{22} - 24 E_{55} (2 E_{44} + E_{12})) E_{34}^2 \\ + \left(-16 \left(E_{55} + \frac{27}{4} E_{23} \right) E_{24} E_{66} - 36 E_{55} (E_{24} E_{13} + E_{14} E_{23}) \right) E_{34} \\ + (((-4 E_{12} - 8 E_{44}) E_{23} - 2 E_{13} E_{22}) E_{55} - 12 (E_{13} E_{22} + E_{23} (2 E_{44} + E_{12})) E_{23}) E_{66} \\ - 12 E_{55} E_{13} E_{23} (2 E_{44} + E_{12}) \Big) E_{33} + (-6 E_{23}^2 E_{13} - 24 E_{23} E_{34}^2) E_{56}^2 \\ + (-84 E_{23}^2 E_{34} E_{13} - 96 E_{23} E_{34}^3) E_{56} + 24 E_{55} E_{34}^4 \\ + 60 \left(\left(\frac{13}{10} E_{23} + \frac{2}{5} E_{55} \right) E_{66} + E_{55} E_{13} \right) E_{23} E_{34}^2 + 6 E_{13} ((2 E_{23} + E_{55}) E_{66} + E_{55} E_{13}) E_{23}^2 \Big) \\ \left(\frac{\partial^6}{\partial y^4 \partial x^2} c4u_{3,0}(x,y) \right) + \left((-36 E_{24} E_{11} - 48 E_{14} E_{12} - 96 E_{44} E_{14}) E_{56} \right.$$

$$\begin{aligned}
& + (6 E_{12}^2 + 24 E_{44}^2 + 24 E_{44} E_{12} + 36 E_{24} E_{14}) E_{66} + 12 \left(\frac{9}{2} E_{14}^2 + E_{11} E_{12} + 2 E_{11} E_{44} \right) E_{55} \\
& E_{33}^2 + ((16 E_{14} E_{34} + 2 E_{11} E_{23} + 4 E_{13} (2 E_{44} + E_{12})) E_{56}^2 + \\
& (96 E_{14} E_{34}^2 + (36 E_{11} E_{23} + 48 E_{13} (2 E_{44} + E_{12})) E_{34} + 36 E_{24} E_{13}^2 + 48 E_{23} E_{13} E_{14}) E_{56} \\
& + ((-48 E_{44} - 24 E_{12}) E_{66} - 24 E_{55} E_{11}) E_{34}^2 \\
& + ((-36 E_{24} E_{13} - 36 E_{14} E_{23} - 16 E_{14} E_{55}) E_{66} - 108 E_{55} E_{13} E_{14}) E_{34} \\
& + ((-2 E_{11} E_{23} - 4 E_{13} (2 E_{44} + E_{12})) E_{55} - 12 E_{13} (2 E_{44} + E_{12}) E_{23}) E_{66} \\
& - 12 E_{13} (E_{13} (2 E_{44} + E_{12}) + E_{11} E_{23}) E_{55} E_{33} + (-6 E_{13}^2 E_{23} - 24 E_{34}^2 E_{13}) E_{56}^2 \\
& + (-84 E_{34} E_{23} E_{13}^2 - 96 E_{34}^3 E_{13}) E_{56} + 24 E_{66} E_{34}^4 \\
& + \left(24 E_{13} \left(\frac{5}{2} E_{23} + E_{55} \right) E_{66} + 78 E_{55} E_{13}^2 \right) E_{34}^2 \\
& + 12 E_{13}^2 \left(\left(\frac{1}{2} E_{23} + \frac{1}{2} E_{55} \right) E_{66} + E_{55} E_{13} \right) E_{23} \left(\frac{\partial^6}{\partial y^2 \partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\right. \\
& ((-24 E_{22} E_{44} - 12 E_{22} E_{12} - 36 E_{24}^2) E_{56} + 12 (3 E_{66} E_{22} + E_{55} (2 E_{44} + E_{12})) E_{24}) E_{33}^2 + \\
& \left. \left(4 E_{34} E_{22} + 8 E_{23} E_{24} \right) E_{56}^2 \right. \\
& + (24 E_{34}^2 E_{22} + 72 E_{34} E_{23} E_{24} + 12 (E_{13} E_{22} + E_{23} (2 E_{44} + E_{12})) E_{23}) E_{56} \\
& - 24 E_{34}^2 E_{55} E_{24} + (-4 E_{22} (9 E_{23} + E_{55}) E_{66} - 12 E_{55} E_{23} (2 E_{44} + E_{12})) E_{34} \\
& - 12 \left(\left(3 E_{23} + \frac{2}{3} E_{55} \right) E_{66} + E_{55} E_{13} \right) E_{24} E_{23} \left. \right) E_{33} - 12 (E_{34} E_{23} E_{56}^2 \\
& + (5 E_{23} E_{34}^2 + E_{23}^2 E_{13}) E_{56} - (2 E_{55} E_{34}^2 + ((3 E_{23} + E_{55}) E_{66} + E_{55} E_{13}) E_{23}) E_{34}) E_{23} \left. \right) \\
& \left(\frac{\partial^6}{\partial y^5 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\right. \\
& \left((-36 E_{14}^2 - 24 E_{11} E_{44} - 12 E_{11} E_{12}) E_{56} + 36 E_{14} \left(\left(\frac{2}{3} E_{44} + \frac{1}{3} E_{12} \right) E_{66} + E_{55} E_{11} \right) \right) E_{33}^2 \\
& + \left(8 E_{13} E_{14} + 4 E_{34} E_{11} \right) E_{56}^2 \\
& + (24 E_{11} E_{34}^2 + 72 E_{14} E_{13} E_{34} + 12 (E_{13} (2 E_{44} + E_{12}) + E_{11} E_{23}) E_{13}) E_{56} \\
& - 24 E_{34}^2 E_{66} E_{14} + ((-4 E_{55} E_{11} - 12 E_{13} (2 E_{44} + E_{12})) E_{66} - 36 E_{55} E_{11} E_{13}) E_{34} \\
& - 36 E_{13} \left(\left(\frac{1}{3} E_{23} + \frac{2}{9} E_{55} \right) E_{66} + E_{55} E_{13} \right) E_{14} \left. \right) E_{33} - 12 E_{13} \left(E_{13} E_{56}^2 E_{34} \right. \\
& \left. + (5 E_{34}^2 E_{13} + E_{13}^2 E_{23}) E_{56} - 3 \left(\frac{2}{3} E_{66} E_{34}^2 + E_{13} \left(\left(\frac{1}{3} E_{55} + \frac{1}{3} E_{23} \right) E_{66} + E_{55} E_{13} \right) \right) E_{34} \right) \left. \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial^6}{\partial y \partial x^5} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left((6 E_{66} E_{14}^2 + 6 E_{55} E_{11}^2 - 12 E_{56} E_{14} E_{11}) E_{33}^2 + \right. \\
& 2 \left(E_{56}^2 E_{11} + (6 E_{13} E_{14} + 6 E_{34} E_{11}) E_{56} - 6 E_{66} E_{34} E_{14} - 6 E_{11} \left(\frac{1}{6} E_{66} + E_{13} \right) E_{55} \right) E_{13} E_{33} \\
& \left. - 2 E_{13}^2 \left(E_{13} E_{56}^2 + 6 E_{13} E_{34} E_{56} - 3 E_{66} E_{34}^2 - 3 \left(E_{13} + \frac{1}{3} E_{66} \right) E_{13} E_{55} \right) \right) \\
& \left(\frac{\partial^6}{\partial x^6} c4u_{3,0}(x, y) \right) + ((6 E_{55} E_{24}^2 - 12 E_{56} E_{24} E_{22} + 6 E_{66} E_{22}^2) E_{33}^2 \\
& + 2 (E_{56}^2 E_{22} + (6 E_{23} E_{24} + 6 E_{34} E_{22}) E_{56} - 6 E_{55} E_{34} E_{24} - E_{22} (6 E_{23} + E_{55}) E_{66}) E_{23} E_{33} \\
& - 2 (E_{23} E_{56}^2 + 6 E_{56} E_{34} E_{23} - 3 E_{55} E_{34}^2 - E_{23} (3 E_{23} + E_{55}) E_{66}) E_{23}^2) \left(\frac{\partial^6}{\partial y^6} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - 12 \left(\frac{5}{6} (E_{56}^2 - E_{55} E_{66}) ((2 E_{44} + E_{12}) E_{33} - 2 E_{34}^2 - E_{23} E_{13}) \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c2u_{3,0}(x, y) \right) - \right. \\
& E_{44} \left(\left(-E_{24} E_{56} - \frac{1}{2} E_{66} E_{22} + \frac{1}{2} E_{55} (2 E_{44} + E_{12}) \right) E_{33} - \frac{1}{2} E_{55} E_{13} E_{23} + E_{56} E_{34} E_{23} \right. \\
& \left. \left. - E_{55} E_{34}^2 + \frac{1}{2} E_{66} E_{23}^2 \right) \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4Psi(x, y) \right) + E_{44} \left(\right. \right. \\
& \left. \left. \left(-E_{56} E_{14} + \left(\frac{1}{2} E_{12} + E_{44} \right) E_{66} - \frac{1}{2} E_{55} E_{11} \right) E_{33} + \frac{1}{2} E_{55} E_{13}^2 - E_{66} E_{34}^2 - \frac{1}{2} E_{66} E_{23} E_{13} \right. \right. \\
& \left. \left. + E_{13} E_{34} E_{56} \right) \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4Psi(x, y) \right) \right) \\
& - \frac{5}{3} (E_{23} E_{34} - E_{24} E_{33}) (E_{56}^2 - E_{55} E_{66}) \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c2u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + \frac{5}{12} (E_{22} E_{33} - E_{23}^2) (E_{56}^2 - E_{55} E_{66}) \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c2u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + \frac{5}{12} (E_{56}^2 - E_{55} E_{66}) (E_{33} E_{11} - E_{13}^2) \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c2u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - \frac{5}{3} (E_{56}^2 - E_{55} E_{66}) (-E_{14} E_{33} + E_{34} E_{13}) \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c2u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + \frac{1}{2} E_{44} ((E_{22} E_{56} - E_{55} E_{24}) E_{33} + E_{23} E_{34} E_{55} - E_{56} E_{23}^2) \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4Psi(x, y) \right) \\
& - \frac{1}{2} E_{44} ((E_{56} E_{11} - E_{66} E_{14}) E_{33} - E_{56} E_{13}^2 + E_{66} E_{34} E_{13}) \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4Psi(x, y) \right) \\
& + \frac{3}{2} E_{44} ((E_{66} E_{24} - E_{14} E_{55}) E_{33} + E_{34} (-E_{66} E_{23} + E_{55} E_{13})) \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4Psi(x, y) \right) + \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

$$\sqrt{5} (E_{56}^2 - E_{55} E_{66}) \left(2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c2RS_32(x, y) \right) E_{34} + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c2RS_32(x, y) \right) E_{23} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c2RS_32(x, y) \right) E_{13} \right) E_{33} \Big/ (E_{33}^2 (E_{56}^2 - E_{55} E_{66})) = RS_30(x, y)$$

Unterschiede zu "hauptgl" aus A(3):

> **simplify(simplify(hauptgl_Psi-hauptgl), size);**

$$\frac{6}{5} \left((E_{66} E_{22} + (-2 E_{44} - E_{12}) E_{55} + 2 E_{24} E_{56}) E_{33} - E_{66} E_{23}^2 + E_{55} (2 E_{34}^2 + E_{23} E_{13}) - 2 E_{56} E_{34} E_{23} \right) \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4Psi(x, y) \right) + ((E_{66} (2 E_{44} + E_{12}) - 2 E_{56} E_{14} - E_{55} E_{11}) E_{33} + (-2 E_{34}^2 - E_{23} E_{13}) E_{66} + 2 E_{13} E_{34} E_{56} + E_{55} E_{13}^2) \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4Psi(x, y) \right) + ((E_{22} E_{56} - E_{55} E_{24}) E_{33} + E_{23} E_{34} E_{55} - E_{56} E_{23}^2) \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4Psi(x, y) \right) + ((-E_{56} E_{11} + E_{66} E_{14}) E_{33} - E_{66} E_{34} E_{13} + E_{56} E_{13}^2) \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4Psi(x, y) \right) - 3 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4Psi(x, y) \right) ((-E_{66} E_{24} + E_{14} E_{55}) E_{33} + E_{34} (-E_{55} E_{13} + E_{66} E_{23})) E_{44} \Big/ (E_{33} (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66})) = 0$$

Gleichung c^2*(0,3) bzw. "nebenl" ändert sich nicht.

Wir stellen die Gleichung für "psi" (71) auf:

Wir bilden:

> **Psi_gl:=simplify(simplify(-diff(su_c2u_1_1_Psi,y)+diff(su_c2u_2_1_Psi,x)), size);**

$$Psi_gl := - \left(\frac{\partial}{\partial y} c2u_{1,1}(x, y) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} c2u_{2,1}(x, y) \right) = \frac{1}{5} \left((-6 E_{66} E_{22} + (6 E_{12} + 12 E_{44}) E_{55} - 12 E_{24} E_{56}) E_{33} + 6 E_{66} E_{23}^2 + (-12 E_{34}^2 - 6 E_{23} E_{13}) E_{55} + 12 E_{56} E_{34} E_{23} \right) \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + ((-12 E_{44} - 6 E_{12}) E_{66} + 12 E_{56} E_{14} + 6 E_{55} E_{11}) E_{33} + (12 E_{34}^2 + 6 E_{23} E_{13}) E_{66} - 6 E_{55} E_{13}^2 - 12 E_{13} E_{34} E_{56}) \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + ((18 E_{14} E_{55} - 18 E_{66} E_{24}) E_{33} + 18 E_{34} (-E_{55} E_{13} + E_{66} E_{23})) \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right)$$

$$\begin{aligned}
& + ((6 E_{56} E_{11} - 6 E_{66} E_{14}) E_{33} + 6 E_{66} E_{34} E_{13} - 6 E_{56} E_{13}^2) \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + ((6 E_{55} E_{24} - 6 E_{22} E_{56}) E_{33} + 6 E_{56} E_{23}^2 - 6 E_{23} E_{34} E_{55}) \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + 6 E_{33} E_{44} \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c4Psi(x, y) \right) E_{66} + E_{55} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c4Psi(x, y) \right) + 2 E_{56} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4Psi(x, y) \right) \right) \\
& / (E_{33} (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}))
\end{aligned}$$

Mit der Definition von Psi ist das äquivalent zu:

> **Psi_gl2 := -c2Psi(x, y) + op(2, simplify(simplify(-diff(su_c2u_1_1_Psi, y) + diff(su_c2u_2_1_Psi, x)), size)) = 0;**

$$\begin{aligned}
Psi_gl2 := & -c2Psi(x, y) + \frac{1}{5} \left((-6 E_{66} E_{22} + (6 E_{12} + 12 E_{44}) E_{55} - 12 E_{24} E_{56}) E_{33} \right. \\
& + 6 E_{66} E_{23}^2 + (-12 E_{34}^2 - 6 E_{23} E_{13}) E_{55} + 12 E_{56} E_{34} E_{23} \left. \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + (\right. \\
& ((-12 E_{44} - 6 E_{12}) E_{66} + 12 E_{56} E_{14} + 6 E_{55} E_{11}) E_{33} + (12 E_{34}^2 + 6 E_{23} E_{13}) E_{66} \\
& - 6 E_{55} E_{13}^2 - 12 E_{13} E_{34} E_{56}) \left. \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right. \\
& + ((18 E_{14} E_{55} - 18 E_{66} E_{24}) E_{33} + 18 E_{34} (-E_{55} E_{13} + E_{66} E_{23})) \left. \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right. \\
& + ((6 E_{56} E_{11} - 6 E_{66} E_{14}) E_{33} + 6 E_{66} E_{34} E_{13} - 6 E_{56} E_{13}^2) \left. \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right. \\
& + ((6 E_{55} E_{24} - 6 E_{22} E_{56}) E_{33} + 6 E_{56} E_{23}^2 - 6 E_{23} E_{34} E_{55}) \left. \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right. \\
& + 6 E_{33} E_{44} \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c4Psi(x, y) \right) E_{66} + E_{55} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c4Psi(x, y) \right) + 2 E_{56} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4Psi(x, y) \right) \right) \\
& / (E_{33} (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66})) = 0
\end{aligned}$$

Unterschiede zur vorherigen "Psi_gl" aus A(3):

> **simplify(simplify(Psi_gl + diff(su_c2u_1_1, y) - diff(su_c2u_2_1, x)), size);**

$$0 = \frac{6 E_{44} \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c4Psi(x, y) \right) E_{66} + E_{55} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c4Psi(x, y) \right) + 2 E_{56} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4Psi(x, y) \right) \right)}{5 E_{55} E_{66} - 5 E_{56}^2}$$

Wir untersuchen noch die Symmetrie der Kopplungsterme: (vgl. Ausführungen auf S. 69)

> **t1 := simplify(hauptgl_Psi - hauptgl);**

$$t1 := -\frac{6}{5} \left(-3 E_{55} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4Psi(x, y) \right) E_{34} E_{13} + E_{55} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4Psi(x, y) \right) E_{33} E_{11} \right)$$

$$\begin{aligned}
& - E_{55} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4Psi(x, y) \right) E_{23} E_{13} + E_{55} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4Psi(x, y) \right) E_{33} E_{24} \\
& - E_{55} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4Psi(x, y) \right) E_{34} E_{23} + E_{55} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4Psi(x, y) \right) E_{33} E_{12} \\
& + 2 E_{55} E_{44} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4Psi(x, y) \right) E_{33} + 3 E_{55} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4Psi(x, y) \right) E_{33} E_{14} \\
& + 2 E_{56} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4Psi(x, y) \right) E_{33} E_{14} + \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4Psi(x, y) \right) E_{33} E_{11} E_{56} \\
& - 2 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4Psi(x, y) \right) E_{33} E_{56} E_{24} - 2 E_{56} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4Psi(x, y) \right) E_{34} E_{13} \\
& - \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4Psi(x, y) \right) E_{33} E_{22} E_{56} + 2 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4Psi(x, y) \right) E_{23} E_{56} E_{34} \\
& + E_{66} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4Psi(x, y) \right) E_{23} E_{13} - 2 E_{66} E_{44} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4Psi(x, y) \right) E_{33} \\
& - E_{66} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4Psi(x, y) \right) E_{33} E_{12} - E_{66} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4Psi(x, y) \right) E_{33} E_{22} \\
& + E_{66} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4Psi(x, y) \right) E_{34} E_{13} - E_{66} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4Psi(x, y) \right) E_{33} E_{14} \\
& - 3 E_{66} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4Psi(x, y) \right) E_{33} E_{24} + 3 E_{66} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4Psi(x, y) \right) E_{34} E_{23} \\
& + E_{66} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4Psi(x, y) \right) E_{23}^2 + 2 E_{66} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4Psi(x, y) \right) E_{34}^2 \\
& - E_{55} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4Psi(x, y) \right) E_{13}^2 - 2 E_{55} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4Psi(x, y) \right) E_{34}^2 \\
& + \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4Psi(x, y) \right) E_{23}^2 E_{56} - \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4Psi(x, y) \right) E_{56} E_{13}^2 \Big/ (E_{33} (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66})) \\
& = 0
\end{aligned}$$

Der Unterschied zwischen "hauptgl_Psi" und "hauptgl" (also "t1") ist gerade der c4Psi-Term in "hauptgl_Psi", wie die unten stehende Zeile zeigt. Dieser ist vom Schema abhängig.

> **simplify(colsum(op(1, hauptgl_Psi), c4Psi) - op(1, t1));**

0

Der c4u[3,0]-Anteil in der "Psi_gl" (im Folgenden "t2") ist hingegen vom Schema unabhängig.

> **t2:=simplify(colsum(op(2, Psi_gl), c4u[3,0]), size);**

$$t2 := \frac{1}{5} \left((-6 E_{66} E_{22} + (6 E_{12} + 12 E_{44}) E_{55} - 12 E_{24} E_{56}) E_{33} + 6 E_{66} E_{23}^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
& + (-12 E_{34}^2 - 6 E_{23} E_{13}) E_{55} + 12 E_{56} E_{34} E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + (\\
& ((-12 E_{44} - 6 E_{12}) E_{66} + 12 E_{56} E_{14} + 6 E_{55} E_{11}) E_{33} + (12 E_{34}^2 + 6 E_{23} E_{13}) E_{66} \\
& - 6 E_{55} E_{13}^2 - 12 E_{13} E_{34} E_{56} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + ((18 E_{14} E_{55} - 18 E_{66} E_{24}) E_{33} + 18 E_{34} (-E_{55} E_{13} + E_{66} E_{23})) \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + ((6 E_{56} E_{11} - 6 E_{66} E_{14}) E_{33} + 6 E_{66} E_{34} E_{13} - 6 E_{56} E_{13}^2) \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - 6 ((E_{22} E_{56} - E_{55} E_{24}) E_{33} + E_{23} E_{34} E_{55} - E_{56} E_{23}^2) \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) \Big/ (E_{33} \\
& (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}))
\end{aligned}$$

Für [3,0,0,2] und [2,0,0,3] sind diese Anteile bis auf einen konstanten Faktor (gerade dem Faktor, welcher vor dem zu substituierenden Term in (1,1) bzw. (1,2) steht) identisch:

> **simplify(subs(c4Psi(x,y)=c4u[3,0](x,y),op(1,t1))/t2);**

$$-E_{44}$$

Wir stellen nun noch die psi-PDE für Isotropie auf:

> **simplify(simpmat(Psi_gl,4));**

$$-\left(\frac{\partial}{\partial y} c2u_{1,1}(x,y)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} c2u_{2,1}(x,y)\right) = \frac{6}{5} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c4Psi(x,y)\right) + \frac{6}{5} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c4Psi(x,y)\right)$$

"test" ist die PDE, welche der zweiten PDE der Kienzler Plattentheorie entspricht (vgl. Ende Abschnitt 8.2).

> **test:=-diff(c2u[1,1](x,y),y)+diff(c2u[2,1](x,y),x) = 6/5*diff(c4Psi(x,y),`\$`(x,2))+6/5*diff(c4Psi(x,y),`\$`(y,2));**

$$test := -\left(\frac{\partial}{\partial y} c2u_{1,1}(x,y)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} c2u_{2,1}(x,y)\right) = \frac{6}{5} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c4Psi(x,y)\right) + \frac{6}{5} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c4Psi(x,y)\right)$$

Generell gilt: Die additiven Anteile zu den Reduktionsgleichung (vgl. S. 69) zum Schema [x,y,z,w] (Additiv gegenüber den Gleichungen aus dem Kapitel Reduktion A(3), also die Anteile die wir hier Unterschiede genannt haben) sind jeweils die Summe der additiven Anteile der Schemen [x,0,0,0], [0,y,0,0], [0,0,z,0] und [0,0,0,w].

Die Schemen der Form [0,?,?,0] erzeugen aufgrund der Vorfaktoren keine Anteile, die für Isotropie relevant sind. Ihr Anteil ist immer 0. Schemen der Form [?,0,0,?] liefern einen Beitrag bei Isotropie. Nur der Anteil [3,0,0,2] liefert die korrekte PDE für "psi" für den Spezialfall der Isotropie:

> **simplify(simplify(simpmat(Psi_gl,4))-test);**

$$0 = 0$$

Das heißt, dass alle Schemen der Form [3,?,?,2] für eine monotrope Theorie in Frage kommen.

10 Tensorarstellung des Differentialgleichungssystems mit

psi-Anteilen

Wir überprüfen die Richtigkeit der angegebenen Darstellung von "hauptgl_Psi" in Tensornotation ((70) und (71)). Zunächst die Hauptdifferentialgleichung mit Psi-Anteilen (70):

```
> T:=0:
T_Psi:=0:
for alpha from 1 to 2 do
for beta from 1 to 2 do
for Gamma from 1 to 2 do
for delta from 1 to 2 do

T:=T+5*c^2*ET4[3,3,3,3]*(ET4[2,3,2,3]*ET4[1,3,1,3]-ET4[2,3,1,3]^2)

*(ET4[alpha,beta,Gamma,delta]*ET4[3,3,3,3]-ET4[alpha,beta,3,3]*ET4[Gamma,delta,3,3])

*diffit(diffit(diffit(diffit(w(x,y,z),alpha),beta),Gamma),delta);
for epsilon from 1 to 2 do
for zeta from 1 to 2 do

T:=T+5*c^2*ET4[3,3,3,3]*(ET4[2,3,2,3]*ET4[1,3,1,3]-ET4[2,3,1,3]^2)

*(ET4[alpha,beta,Gamma,delta]*ET4[3,3,3,3]-ET4[alpha,beta,3,3]*ET4[Gamma,delta,3,3])

*diffit(diffit(diffit(diffit(-2/5*c^2*ET4[epsilon,zeta,3,3]/ET4[3,3,3,3]

*diffit(diffit(w(x,y,z),epsilon),zeta),alpha),beta),Gamma),delta);
T_Psi:=T_Psi+levi(3,alpha,beta)*ET4[alpha,3,Gamma,3]

*(ET4[3,3,3,3]*ET4[delta,epsilon,zeta,beta]-ET4[delta,epsilon,3,3]*ET4[zeta,beta,3,3])

*diffit(diffit(diffit(diffit(c4Psi(x,y),delta),epsilon),zeta),Gamma);
for xi from 1 to 2 do
for theta from 1 to 2 do
for iota from 1 to 2 do
for kappa from 1 to 2 do

T:=T+6*c^4*levi(3,alpha,beta)*levi(3,Gamma,delta)*ET4[alpha,3
```

```

, Gamma, 3]

*(ET4[beta, epsilon, zeta, xi]*ET4[3, 3, 3, 3]-ET4[beta, epsilon, 3, 3]
]*ET4[zeta, xi, 3, 3])

*(ET4[delta, theta, iota, kappa]*ET4[3, 3, 3, 3]-ET4[delta, theta, 3,
3]*ET4[iota, kappa, 3, 3])

*diffit(diffit(diffit(diffit(diffit(w(x, y, z), epsilon),
xi), zeta), theta), iota), kappa);
    od;
    od;
    od;
    od;
  od;
  od;
od;
od;
od;
od;
T_Psi:=T_Psi*(-6)*ET4[1, 2, 1, 2]*ET4[3, 3, 3, 3]:
> T2:=5*ET4[3, 3, 3, 3]*(ET4[2, 3, 2, 3]*ET4[1, 3, 1, 3]-ET4[2, 3, 1, 3]^2)
*a/h*ET4[3, 3, 3, 3]*P[3, 0](x, y, z):
for alpha    from 1 to 2 do
for beta     from 1 to 2 do

T2:=T2+5*ET4[3, 3, 3, 3]*(ET4[2, 3, 2, 3]*ET4[1, 3, 1, 3]-ET4[2, 3, 1, 3]
^2)
          *a/h*(1/sqrt(5)*c^2*ET4[alpha, beta, 3, 3]
          *diffit(diffit(P[3, 2](x, y, z), alpha), beta));

od;
od;
> unassign('beta', 'epsilon', 'zeta', 'xi', 'theta');
> unassign('alpha', 'Gamma', 'delta', 'iota', 'kappa');

```

"test" ist die mutmaßlich zu "hauptgl_Psi" äquivalente Gleichung. Der Anteil "T_Psi" ist neu gegenüber dem Abschnitt "Tensordarstellung der Hauptdifferentialgleichung" A(4).

```
> test:=T+T_Psi=T2:
```

Zum Vergleichen müssen wir noch einige Substitutionen durchführen und die Hauptgleichung mit einem konstanten Faktor multiplizieren.

```
> tt:=simplify(algsubs(w(x, y, z)=u[3, 0](x, y), test)-invcvar(algsu
bs(c2RS_32(x, y)=-a*c^2/h*P[3, 2](x, y, z), algsubs(RS_30(x, y)=-a/
h*P[3, 0](x, y, z), hauptgl_Psi))*(-5)*E[33]^2*(E[55]*E[66]-E[56]
^2)));
```

$$tt := \left(E_{55} E_{66} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} P_{3,2}(x, y, z) \right) E_{23} + 2 E_{55} E_{66} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} P_{3,2}(x, y, z) \right) E_{34} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + E_{55} E_{66} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} P_{3,2}(x, y, z) \right) E_{13} - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} P_{3,2}(x, y, z) \right) E_{23} E_{56}^2 \\
& - 2 E_{56}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} P_{3,2}(x, y, z) \right) E_{34} - E_{56}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} P_{3,2}(x, y, z) \right) E_{13} \Big) c^2 a \sqrt{5} E_{33} / h = E_{33} \\
& (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) a \sqrt{5} c^2 \\
& \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} P_{3,2}(x, y, z) \right) E_{23} + 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} P_{3,2}(x, y, z) \right) E_{34} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} P_{3,2}(x, y, z) \right) E_{13} \right) / h
\end{aligned}$$

[Dies lassen wir noch einmal vereinfachen:

[> **isolate(tt, P);**

$$0 = 0$$

[Nun die neue Differentialgleichung (71):

[> **T:=0:**

T2:=0:

for alpha from 1 to 2 do

for beta from 1 to 2 do

T:=T+ET4[alpha, 3, beta, 3]*diffit(diffit(c4Psi(x, y), alpha), beta);

for Gamma from 1 to 2 do

for delta from 1 to 2 do

for epsilon from 1 to 2 do

for zeta from 1 to 2 do

T2:=T2+levi(3, alpha, beta)*ET4[alpha, 3, Gamma, 3]

***(ET4[3, 3, 3, 3]*ET4[delta, epsilon, zeta, beta]-ET4[delta, epsilon, 3, 3]*ET4[zeta, beta, 3, 3])**

***diffit(diffit(diffit(diffit(c4u[3, 0](x, y), delta), epsilon), zeta), Gamma);**

od;

od;

od;

od;

od;

od;

T:=T*(-6)*ET4[3, 3, 3, 3]*ET4[1, 2, 1, 2]:

T2:=T2*6:

[> **unassign('alpha', 'beta', 'Gamma', 'delta', 'epsilon', 'zeta');**

["test" ist wiederum die zu "Psi_gl2" mutmaßlich äquivalente Darstellung.

[> **test:=5*ET4[3, 3, 3, 3]*(ET4[2, 3, 2, 3]*ET4[1, 3, 1, 3]-ET4[2, 3, 1, 3]^2)*c2Psi(x, y)+T+T2=0;**

$$test := 5 E_{33} (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) c2Psi(x, y)$$

$$\begin{aligned}
& - 6 E_{33} E_{44} \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c4Psi(x, y) \right) E_{66} + E_{55} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c4Psi(x, y) \right) + 2 E_{56} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4Psi(x, y) \right) \right) \\
& + 6 E_{66} (E_{14} E_{33} - E_{34} E_{13}) \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + 6 E_{66} (E_{12} E_{33} - E_{23} E_{13}) \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + 12 E_{66} (E_{44} E_{33} - E_{34}^2) \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + 18 E_{66} (E_{24} E_{33} - E_{23} E_{34}) \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + 6 E_{66} (E_{22} E_{33} - E_{23}^2) \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + 12 E_{56} (E_{24} E_{33} - E_{23} E_{34}) \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + 6 E_{56} (E_{22} E_{33} - E_{23}^2) \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) - 6 E_{56} (E_{33} E_{11} - E_{13}^2) \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - 12 E_{56} (E_{14} E_{33} - E_{34} E_{13}) \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - 6 E_{55} (E_{33} E_{11} - E_{13}^2) \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - 18 E_{55} (E_{14} E_{33} - E_{34} E_{13}) \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - 12 E_{55} (E_{44} E_{33} - E_{34}^2) \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - 6 E_{55} (E_{12} E_{33} - E_{23} E_{13}) \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - 6 E_{55} (E_{24} E_{33} - E_{23} E_{34}) \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) = 0
\end{aligned}$$

Wieder ist für den Vergleich noch die Multiplikation mit einem konstanten Faktor erforderlich.

```
> simplify(Psi_g12*(-5)*E[33]*(E[55]*E[66]-E[56]^2)-test);
0 = 0
```

11 Schnittgrößen in u[3,0] mit psi-Anteilen

Erneut (vgl. A(5)) schreiben wir die Schnittgrößen um. Dieses mal mittels der neuen Substitutionsgleichungen "su_?_Psi". Ziel ist wiederum eine Darstellung aller Schnittgröße des Plattenproblems nur in u[3,0] und (dieses Mal auch) Psi. Wir berechnen jeweils die Unterschiede zu den alten Schnittgrößen (vgl. S. 70). Das Vorgehen ist ansonsten völlig analog

zum Abschnitt A(5).

> **m031_Psi:=simplify(simplify(algs subs(su_gll1_Psi,algs subs(su_gll12_Psi,cvar(ml(0,3,1))))),size);**

$$\begin{aligned}
m031_Psi := & -\frac{1}{5} \left(\left((-6 E_{12}^2 - 60 E_{24} E_{14} - 24 E_{44} E_{12} - 24 E_{44}^2 - 6 E_{22} E_{11}) E_{56} \right. \right. \\
& + (24 E_{24} E_{12} + 6 E_{22} E_{14} + 48 E_{44} E_{24}) E_{66} + 6 E_{55} (E_{24} E_{11} + 2 E_{14} E_{12} + 4 E_{44} E_{14}) E_{33}^2 \\
& + \left((24 E_{12} + 48 E_{44}) E_{56} - 30 E_{66} E_{24} - 42 E_{14} E_{55} \right) E_{34}^2 + (8 E_{44} + 4 E_{12}) E_{56}^2 \\
& + (60 E_{14} E_{23} + 60 E_{24} E_{13}) E_{56} + (-6 E_{66} E_{22} - 12 E_{55} (2 E_{44} + E_{12})) E_{13} \\
& - 4 (2 E_{44} + E_{12}) (6 E_{23} + E_{55}) E_{66} - 6 E_{55} E_{11} E_{23} E_{34} + (5 E_{24} E_{13} + 3 E_{14} E_{23}) E_{56}^2 \\
& + (6 E_{22} E_{13}^2 + 12 E_{13} (2 E_{44} + E_{12}) E_{23} + 6 E_{23}^2 E_{11}) E_{56} - 6 E_{55} E_{24} E_{13}^2 \\
& + \left(-5 \left(E_{55} + \frac{24}{5} E_{23} \right) E_{24} E_{66} - 12 E_{55} E_{23} E_{14} \right) E_{13} - 3 E_{66} E_{14} E_{23} (2 E_{23} + E_{55}) \Big) E_{33} \\
& - 24 E_{56} E_{34}^4 + \left(-8 E_{56}^2 + 42 E_{55} E_{13} + 8 \left(E_{55} + \frac{15}{4} E_{23} \right) E_{66} \right) E_{34}^3 - 84 E_{56} E_{23} E_{34}^2 E_{13} \\
& + 18 E_{23} E_{13} \left(-\frac{2}{3} E_{56}^2 + E_{55} E_{13} + \frac{2}{3} E_{66} \left(\frac{5}{2} E_{23} + E_{55} \right) \right) E_{34} - 12 E_{56} E_{23}^2 E_{13}^2 \Big) \\
& \left(\frac{\partial^5}{\partial y^3 \partial x^2} c4u_{3,0}(x,y) \right) + \left((-72 E_{44} E_{14} - 36 E_{14} E_{12} - 24 E_{24} E_{11}) E_{56} \right. \\
& + (24 E_{24} E_{14} + 24 E_{44} E_{12} + 6 E_{12}^2 + 24 E_{44}^2) E_{66} + 6 E_{55} (2 E_{11} E_{44} + E_{11} E_{12} + 6 E_{14}^2) \\
& E_{33}^2 + \left((60 E_{56} E_{14} + (-36 E_{44} - 18 E_{12}) E_{66} - 18 E_{55} E_{11}) E_{34}^2 + \left(10 E_{56}^2 E_{14} \right. \right. \\
& + ((36 E_{12} + 72 E_{44}) E_{13} + 24 E_{11} E_{23}) E_{56} + (-72 E_{14} E_{55} - 24 E_{66} E_{24}) E_{13} \\
& - 10 \left(E_{55} + \frac{12}{5} E_{23} \right) E_{66} E_{14} \Big) E_{34} + ((6 E_{44} + 3 E_{12}) E_{13} + E_{11} E_{23}) E_{56}^2 \\
& + (24 E_{24} E_{13}^2 + 36 E_{23} E_{13} E_{14}) E_{56} - 6 E_{55} (2 E_{44} + E_{12}) E_{13}^2 \\
& + (-3 (2 E_{44} + E_{12}) (E_{55} + 4 E_{23}) E_{66} - 6 E_{55} E_{11} E_{23}) E_{13} - E_{55} E_{66} E_{11} E_{23} \Big) E_{33} \\
& + 12 E_{66} E_{34}^4 - 60 E_{56} E_{34}^3 E_{13} + 54 \left(-\frac{8}{27} E_{56}^2 + E_{55} E_{13} + \frac{8}{27} \left(\frac{21}{8} E_{23} + E_{55} \right) E_{66} \right) E_{13} E_{34}^2 \\
& - 60 E_{56} E_{34} E_{13}^2 E_{23} + 6 E_{23} E_{13}^2 \left(-\frac{2}{3} E_{56}^2 + E_{55} E_{13} + \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} E_{23} + E_{55} \right) E_{66} \right) \Big) \\
& \left(\frac{\partial^5}{\partial y^2 \partial x^3} c4u_{3,0}(x,y) \right) + \left((-12 E_{22} E_{14} - 24 E_{44} E_{24} - 12 E_{24} E_{12}) E_{56} \right. \\
& + (12 E_{22} E_{44} + 6 E_{22} E_{12} + 18 E_{24}^2) E_{66} + 12 E_{55} E_{14} E_{24} E_{33}^2 + (
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (36 E_{24} E_{56} - 6 E_{66} E_{22} - 6 E_{55} (2 E_{44} + E_{12})) E_{34}^2 + (6 E_{56}^2 E_{24} \\
& + (12 E_{13} E_{22} + 12 E_{23} (2 E_{44} + E_{12})) E_{56} - 12 E_{55} E_{24} E_{13} - 6 E_{24} (6 E_{23} + E_{55}) E_{66} \\
& - 12 E_{55} E_{23} E_{14}) E_{34} + (E_{13} E_{22} + E_{23} (2 E_{44} + E_{12})) E_{56}^2 \\
& + (12 E_{23}^2 E_{14} + 12 E_{24} E_{23} E_{13}) E_{56} - E_{66} (E_{13} E_{22} + E_{23} (2 E_{44} + E_{12})) (6 E_{23} + E_{55}) E_{33} \\
& + 12 E_{55} E_{34}^4 - 36 E_{56} E_{34}^3 E_{23} + 18 E_{23} \left(-\frac{4}{9} E_{56}^2 + E_{55} E_{13} + \frac{4}{9} (3 E_{23} + E_{55}) E_{66} \right) E_{34}^2 \\
& - 24 E_{56} E_{34} E_{13} E_{23}^2 + 2 (-E_{56}^2 + (3 E_{23} + E_{55}) E_{66}) E_{23}^2 E_{13} \left(\frac{\partial^5}{\partial y^4 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\right. \\
& \left. \left(-30 E_{14}^2 - 12 E_{11} E_{12} - 24 E_{11} E_{44} \right) E_{56} + 30 E_{14} \left(\left(\frac{4}{5} E_{44} + \frac{2}{5} E_{12} \right) E_{66} + E_{55} E_{11} \right) \right) E_{33}^2 \\
& + \left((18 E_{56} E_{11} - 18 E_{66} E_{14}) E_{34}^2 + \right. \\
& (3 E_{56}^2 E_{11} + 60 E_{56} E_{13} E_{14} + ((-12 E_{12} - 24 E_{44}) E_{66} - 30 E_{55} E_{11}) E_{13} - 3 E_{55} E_{66} E_{11}) \\
& E_{34} - 30 \left(-\frac{7}{30} E_{56}^2 E_{14} + \left(\left(-\frac{2}{5} E_{12} - \frac{4}{5} E_{44} \right) E_{13} - \frac{2}{5} E_{11} E_{23} \right) E_{56} \right. \\
& + \left(E_{55} E_{13} + \frac{7}{30} E_{66} \left(\frac{12}{7} E_{23} + E_{55} \right) \right) E_{14} \left. \right) E_{13} \left. \right) E_{33} + 30 \left(\frac{3}{5} E_{66} E_{34}^3 - \frac{8}{5} E_{13} E_{56} E_{34}^2 \right. \\
& + \left. \left(-\frac{1}{3} E_{56}^2 + E_{55} E_{13} + \frac{1}{3} E_{66} \left(\frac{6}{5} E_{23} + E_{55} \right) \right) E_{13} E_{34} - \frac{2}{5} E_{56} E_{13}^2 E_{23} \right) E_{13} \left. \right) \\
& \left(\frac{\partial^5}{\partial y \partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) + ((6 E_{66} E_{22} E_{24} - 6 E_{24}^2 E_{56}) E_{33}^2 + ((6 E_{22} E_{56} - 6 E_{55} E_{24}) E_{34}^2 \\
& + (E_{56}^2 E_{22} + 12 E_{56} E_{23} E_{24} - E_{22} (6 E_{23} + E_{55}) E_{66}) E_{34} \\
& - E_{23} E_{24} (-E_{56}^2 + E_{66} (6 E_{23} + E_{55}))) E_{33} \\
& + 2 E_{23} (3 E_{55} E_{34}^2 - 6 E_{56} E_{34} E_{23} + E_{23} (-E_{56}^2 + (3 E_{23} + E_{55}) E_{66})) E_{34} \\
& \left(\frac{\partial^5}{\partial y^5} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left((6 E_{66} E_{14}^2 - 12 E_{56} E_{14} E_{11} + 6 E_{55} E_{11}^2) E_{33}^2 \right. \\
& - 12 \left((-E_{56} E_{11} + E_{66} E_{14}) E_{34} - \frac{1}{6} E_{56}^2 E_{11} - E_{56} E_{13} E_{14} + E_{11} \left(\frac{1}{6} E_{66} + E_{13} \right) E_{55} \right) E_{13} E_{33} \\
& + 6 E_{66} E_{13}^2 E_{34}^2 - 12 E_{13}^3 E_{34} E_{56} - 2 E_{13}^3 E_{56}^2 + 6 \left(E_{13} + \frac{1}{3} E_{66} \right) E_{13}^3 E_{55} \left. \right) \\
& \left(\frac{\partial^5}{\partial x^5} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\right. \\
& 5 ((2 E_{44} + E_{12}) E_{33} - 2 E_{34}^2 - E_{23} E_{13}) (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c2u_{3,0}(x, y) \right) + 6 E_{44} (
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (E_{56} E_{14} + (-2 E_{44} - E_{12}) E_{66} + E_{55} E_{11}) E_{33} - E_{13} E_{34} E_{56} + E_{13} E_{66} E_{23} - E_{55} E_{13}^2 \\
& + E_{66} E_{34}^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4Psi(x, y) \right) - 12 \\
& \left(\left(\left(\frac{1}{2} E_{12} + E_{44} \right) E_{56} + \frac{1}{2} E_{66} E_{24} - E_{14} E_{55} \right) E_{33} - \frac{1}{2} E_{13} E_{23} E_{56} + \left(E_{55} E_{13} - \frac{1}{2} E_{66} E_{23} \right) E_{34} \right) \\
& E_{44} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4Psi(x, y) \right) + 5 (E_{33} E_{11} - E_{13}^2) (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c2u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - 5 (E_{23} E_{34} - E_{24} E_{33}) (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c2u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - 15 (-E_{14} E_{33} + E_{34} E_{13}) (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c2u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + 6 ((E_{56} E_{11} - E_{66} E_{14}) E_{33} - E_{56} E_{13}^2 + E_{66} E_{34} E_{13}) E_{44} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4Psi(x, y) \right) \\
& - 6 E_{44} (E_{56} E_{24} E_{33} + E_{55} E_{34}^2 - E_{56} E_{34} E_{23}) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4Psi(x, y) \right) + (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \\
& \left(E_{34} \sqrt{5} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2RS_{32}(x, y) \right) + 5 E_{33} E_{44} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2Psi(x, y) \right) + E_{13} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2RS_{32}(x, y) \right) \sqrt{5} \right) \\
& \left. \right) E_{33} \Big/ ((-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) E_{33}^2)
\end{aligned}$$

> **simplify(simplify(m031_Psi-m031), size);**

$$\begin{aligned}
& -\frac{6}{5} E_{44} \left(((E_{66} E_{22} + 2 E_{24} E_{56} - E_{55} (2 E_{44} + E_{12})) E_{33} - E_{66} E_{23}^2 - 2 E_{56} E_{34} E_{23} \right. \\
& \left. + E_{55} (2 E_{34}^2 + E_{23} E_{13})) \left(\frac{\partial^5}{\partial y^4 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + (\right. \\
& (E_{66} (2 E_{44} + E_{12}) - 2 E_{56} E_{14} - E_{55} E_{11}) E_{33} + (-2 E_{34}^2 - E_{23} E_{13}) E_{66} + 2 E_{13} E_{34} E_{56} \\
& \left. + E_{55} E_{13}^2 \right) \left(\frac{\partial^5}{\partial y^2 \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + ((3 E_{66} E_{24} - 3 E_{14} E_{55}) E_{33} + 3 E_{34} (E_{55} E_{13} - E_{66} E_{23})) \left(\frac{\partial^5}{\partial y^3 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + ((-E_{56} E_{11} + E_{66} E_{14}) E_{33} - E_{66} E_{34} E_{13} + E_{56} E_{13}^2) \left(\frac{\partial^5}{\partial y \partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + ((E_{22} E_{56} - E_{55} E_{24}) E_{33} + E_{23} E_{34} E_{55} - E_{56} E_{23}^2) \left(\frac{\partial^5}{\partial y^5} c4u_{3,0}(x, y) \right) + (\\
& (E_{56} E_{14} + (-2 E_{44} - E_{12}) E_{66} + E_{55} E_{11}) E_{33} - E_{13} E_{34} E_{56} + (E_{23} E_{13} + E_{34}^2) E_{66} - E_{55} E_{13}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4\Psi(x, y) \right) + (\\
& (-E_{66} E_{24} + (-2 E_{44} - E_{12}) E_{56} + 2 E_{14} E_{55}) E_{33} + E_{66} E_{34} E_{23} - 2 E_{34} E_{13} E_{55} + E_{13} E_{23} E_{56}) \\
& \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4\Psi(x, y) \right) + ((E_{56} E_{11} - E_{66} E_{14}) E_{33} - E_{56} E_{13}^2 + E_{66} E_{34} E_{13}) \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4\Psi(x, y) \right) \\
& + (E_{56} E_{34} E_{23} - E_{56} E_{24} E_{33} - E_{55} E_{34}^2) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4\Psi(x, y) \right) \\
& + \frac{5}{6} E_{33} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2\Psi(x, y) \right) (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \Big/ (E_{33} (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}))
\end{aligned}$$

> **m032_Psi:=simplify(simplify(algsubs(su_gl11_Psi,algsubs(su_gl12_Psi,cvar(ml(0,3,2))))),size);**

$$\begin{aligned}
m032_Psi := & \left(\left(\left(\left(12 E_{24} E_{14} + \frac{24}{5} E_{44} E_{12} + \frac{24}{5} E_{44}^2 + \frac{6}{5} E_{22} E_{11} + \frac{6}{5} E_{12}^2 \right) E_{56} \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \left. \left(-\frac{24}{5} E_{14} E_{12} - \frac{6}{5} E_{24} E_{11} - \frac{48}{5} E_{44} E_{14} \right) E_{55} - \frac{6}{5} E_{66} (4 E_{44} E_{24} + E_{22} E_{14} + 2 E_{24} E_{12}) \right) \right. \right. \\
& E_{33}^2 + \left(\left(\left(-\frac{24}{5} E_{12} - \frac{48}{5} E_{44} \right) E_{56} + 6 E_{14} E_{55} + \frac{42}{5} E_{66} E_{24} \right) E_{34}^2 + \left(\left(-\frac{8}{5} E_{44} - \frac{4}{5} E_{12} \right) E_{56}^2 \right. \right. \\
& + (-12 E_{24} E_{13} - 12 E_{14} E_{23}) E_{56} + \left. \left. \left(\frac{6}{5} E_{55} E_{11} + \frac{12}{5} E_{66} (2 E_{44} + E_{12}) \right) E_{23} \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{4}{5} (2 E_{44} + E_{12}) (E_{66} + 6 E_{13}) E_{55} + \frac{6}{5} E_{66} E_{13} E_{22} \right) E_{34} + \left(-\frac{3}{5} E_{24} E_{13} - E_{14} E_{23} \right) E_{56}^2 \right. \\
& + \left. \left. \left(-\frac{6}{5} E_{23}^2 E_{11} - \frac{12}{5} E_{13} (2 E_{44} + E_{12}) E_{23} - \frac{6}{5} E_{22} E_{13}^2 \right) E_{56} + \frac{6}{5} E_{66} E_{23}^2 E_{14} \right. \right. \\
& + \left. \left. \left(\left(E_{66} + \frac{24}{5} E_{13} \right) E_{14} E_{55} + \frac{12}{5} E_{66} E_{24} E_{13} \right) E_{23} + \frac{3}{5} E_{55} E_{24} E_{13} (2 E_{13} + E_{66}) \right) E_{33} \right. \\
& + \frac{24}{5} E_{56} E_{34}^4 + \left(\frac{8}{5} E_{56}^2 - \frac{42}{5} E_{66} E_{23} - \frac{8}{5} \left(E_{66} + \frac{15}{4} E_{13} \right) E_{55} \right) E_{34}^3 + \frac{84}{5} E_{56} E_{23} E_{34}^2 E_{13} \\
& - \frac{12}{5} E_{23} E_{13} \left(-E_{56}^2 + \frac{3}{2} E_{66} E_{23} + E_{55} \left(\frac{5}{2} E_{13} + E_{66} \right) \right) E_{34} + \frac{12}{5} E_{56} E_{23}^2 E_{13}^2 \Big) \\
& \left(\frac{\partial^5}{\partial y^2 \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\left(\left(\left(\frac{24}{5} E_{22} E_{14} + \frac{36}{5} E_{24} E_{12} + \frac{72}{5} E_{44} E_{24} \right) E_{56} \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \left. \left(-\frac{6}{5} E_{12}^2 - \frac{24}{5} E_{44}^2 - \frac{24}{5} E_{24} E_{14} - \frac{24}{5} E_{44} E_{12} \right) E_{55} - \frac{6}{5} E_{66} (E_{22} E_{12} + 2 E_{22} E_{44} + 6 E_{24}^2) \right) \right. \right. \\
& E_{33}^2 + \left(\left(-12 E_{24} E_{56} + \left(\frac{18}{5} E_{12} + \frac{36}{5} E_{44} \right) E_{55} + \frac{18}{5} E_{66} E_{22} \right) E_{34}^2 + \left(-2 E_{56}^2 E_{24} \right. \right. \\
& + \left. \left. \left(-\frac{36}{5} E_{12} - \frac{72}{5} E_{44} \right) E_{23} - \frac{24}{5} E_{13} E_{22} \right) E_{56} + \left(\frac{72}{5} E_{66} E_{24} + \frac{24}{5} E_{14} E_{55} \right) E_{23} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \left(\frac{12}{5} E_{13} + E_{66} \right) E_{55} E_{24} \Big) E_{34} + \left(\left(-\frac{3}{5} E_{12} - \frac{6}{5} E_{44} \right) E_{23} - \frac{1}{5} E_{13} E_{22} \right) E_{56}^2 \\
& + \left(-\frac{24}{5} E_{23}^2 E_{14} - \frac{36}{5} E_{24} E_{23} E_{13} \right) E_{56} + \frac{6}{5} E_{66} (2 E_{44} + E_{12}) E_{23}^2 \\
& + \left(\frac{3}{5} (2 E_{44} + E_{12}) (E_{66} + 4 E_{13}) E_{55} + \frac{6}{5} E_{66} E_{13} E_{22} \right) E_{23} + \frac{1}{5} E_{55} E_{66} E_{13} E_{22} \Big) E_{33} \\
& - \frac{12}{5} E_{55} E_{34}^4 + 12 E_{56} E_{34}^3 E_{23} - \frac{16}{5} \left(-E_{56}^2 + \frac{27}{8} E_{66} E_{23} + \left(E_{66} + \frac{21}{8} E_{13} \right) E_{55} \right) E_{23} E_{34}^2 \\
& + 12 E_{56} E_{34} E_{13} E_{23}^2 - \frac{4}{5} E_{23}^2 \left(-E_{56}^2 + \frac{3}{2} E_{66} E_{23} + \left(\frac{3}{2} E_{13} + E_{66} \right) E_{55} \right) E_{13} \Big) \\
& \left(\frac{\partial^5}{\partial y^3 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\left(\left(\frac{24}{5} E_{44} E_{14} + \frac{12}{5} E_{24} E_{11} + \frac{12}{5} E_{14} E_{12} \right) E_{56} \right. \right. \\
& + \left. \left. \left(-\frac{6}{5} E_{11} E_{12} - \frac{12}{5} E_{11} E_{44} - \frac{18}{5} E_{14}^2 \right) E_{55} - \frac{12}{5} E_{66} E_{24} E_{14} \right) E_{33}^2 + \left(\right. \right. \\
& \left. \left. \left(-\frac{36}{5} E_{56} E_{14} + \frac{6}{5} E_{55} E_{11} + \frac{6}{5} E_{66} (2 E_{44} + E_{12}) \right) E_{34}^2 + \left(-\frac{6}{5} E_{56}^2 E_{14} \right. \right. \\
& + \left. \left. \left(-\frac{12}{5} E_{11} E_{23} - \frac{12}{5} E_{13} (2 E_{44} + E_{12}) \right) E_{56} + \frac{12}{5} E_{66} E_{14} E_{23} + \frac{6}{5} E_{14} (E_{66} + 6 E_{13}) E_{55} \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{12}{5} E_{66} E_{24} E_{13} \right) E_{34} + \left(-\frac{1}{5} E_{11} E_{23} - \frac{1}{5} E_{13} (2 E_{44} + E_{12}) \right) E_{56}^2 \right. \\
& + \left. \left. \left(-\frac{12}{5} E_{23} E_{13} E_{14} - \frac{12}{5} E_{24} E_{13}^2 \right) E_{56} + \frac{1}{5} E_{55} (E_{66} + 6 E_{13}) (E_{13} (2 E_{44} + E_{12}) + E_{11} E_{23}) \right) \right. \\
& \left. E_{33} - \frac{12}{5} E_{66} E_{34}^4 + \frac{36}{5} E_{56} E_{34}^3 E_{13} - \frac{8}{5} \left(-E_{56}^2 + \frac{9}{4} E_{66} E_{23} + E_{55} (3 E_{13} + E_{66}) \right) E_{13} E_{34}^2 \right. \\
& + \left. \frac{24}{5} E_{56} E_{34} E_{13}^2 E_{23} - \frac{2}{5} (-E_{56}^2 + E_{55} (3 E_{13} + E_{66})) E_{13}^2 E_{23} \right) \left(\frac{\partial^5}{\partial y \partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\right. \\
& \left(\left(\frac{24}{5} E_{22} E_{44} + \frac{12}{5} E_{22} E_{12} + 6 E_{24}^2 \right) E_{56} - \frac{12}{5} \left(E_{55} (2 E_{44} + E_{12}) + \frac{5}{2} E_{66} E_{22} \right) E_{24} \right) E_{33}^2 + \left(\right. \\
& \left. \left(-\frac{18}{5} E_{22} E_{56} + \frac{18}{5} E_{55} E_{24} \right) E_{34}^2 + \right. \\
& \left. \left(-\frac{3}{5} E_{56}^2 E_{22} - 12 E_{56} E_{23} E_{24} + \left(\left(\frac{24}{5} E_{44} + \frac{12}{5} E_{12} \right) E_{55} + 6 E_{66} E_{22} \right) E_{23} + \frac{3}{5} E_{55} E_{66} E_{22} \right) \right. \\
& \left. E_{34} + \frac{7}{5} E_{23} \left(-E_{56}^2 E_{24} + \left(\left(-\frac{24}{7} E_{44} - \frac{12}{7} E_{12} \right) E_{23} - \frac{12}{7} E_{13} E_{22} \right) E_{56} \right. \right. \\
& + \left. \left. E_{24} \left(\frac{30}{7} E_{66} E_{23} + E_{55} \left(E_{66} + \frac{12}{7} E_{13} \right) \right) \right) \right) E_{33} - 2 \left(\frac{9}{5} E_{55} E_{34}^3 - \frac{24}{5} E_{23} E_{56} E_{34}^2 \right. \\
& + \left. \left. \left(-E_{56}^2 + 3 E_{66} E_{23} + E_{55} \left(\frac{6}{5} E_{13} + E_{66} \right) \right) E_{23} E_{34} - \frac{6}{5} E_{56} E_{13} E_{23}^2 \right) E_{23} \Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial^5}{\partial y^4 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\left(-\frac{6}{5} E_{55} E_{14} E_{11} + \frac{6}{5} E_{14}^2 E_{56} \right) E_{33}^2 + \left(\frac{6}{5} E_{66} E_{14} - \frac{6}{5} E_{56} E_{11} \right) E_{34}^2 \right. \\
& + \left(-\frac{1}{5} E_{56}^2 E_{11} - \frac{12}{5} E_{56} E_{13} E_{14} + \frac{1}{5} E_{11} (E_{66} + 6 E_{13}) E_{55} \right) E_{34} \\
& + \left. \frac{1}{5} (-E_{56}^2 + E_{55} (E_{66} + 6 E_{13})) E_{14} E_{13} \right) E_{33} \\
& - \frac{2}{5} (3 E_{66} E_{34}^2 - 6 E_{13} E_{34} E_{56} + (-E_{56}^2 + E_{55} (3 E_{13} + E_{66})) E_{13}) E_{34} E_{13} \\
& \left(\frac{\partial^5}{\partial x^5} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\left(-\frac{6}{5} E_{55} E_{24}^2 + \frac{12}{5} E_{56} E_{24} E_{22} - \frac{6}{5} E_{66} E_{22}^2 \right) E_{33}^2 \right. \\
& + \frac{2}{5} E_{23} ((6 E_{55} E_{24} - 6 E_{22} E_{56}) E_{34} - E_{56}^2 E_{22} - 6 E_{56} E_{23} E_{24} + E_{22} (6 E_{23} + E_{55}) E_{66}) E_{33} \\
& - \left. \frac{2}{5} E_{23}^2 (3 E_{55} E_{34}^2 - 6 E_{56} E_{34} E_{23} + E_{23} (-E_{56}^2 + (3 E_{23} + E_{55}) E_{66})) \right) \left(\frac{\partial^5}{\partial y^5} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + E_{33} \left((-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) ((-2 E_{44} - E_{12}) E_{33} + E_{23} E_{13} + 2 E_{34}^2) \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c2u_{3,0}(x, y) \right) + \frac{6}{5} \right. \\
& ((E_{24} E_{56} + (-2 E_{44} - E_{12}) E_{55} + E_{66} E_{22}) E_{33} + E_{55} E_{34}^2 - E_{66} E_{23}^2 - E_{56} E_{34} E_{23} \\
& + E_{55} E_{13} E_{23}) E_{44} \left. \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4Psi(x, y) \right) - \frac{6}{5} \right. \\
& ((2 E_{44} + E_{12}) E_{56} - 2 E_{66} E_{24} + E_{14} E_{55}) E_{33} + (-E_{55} E_{13} + 2 E_{66} E_{23}) E_{34} - E_{13} E_{23} E_{56} \\
& E_{44} \left. \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4Psi(x, y) \right) - (E_{14} E_{33} - E_{34} E_{13}) (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c2u_{3,0}(x, y) \right) \right. \\
& + 3 (E_{23} E_{34} - E_{24} E_{33}) (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c2u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - (E_{22} E_{33} - E_{23}^2) (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c2u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + \frac{6}{5} ((E_{22} E_{56} - E_{55} E_{24}) E_{33} + E_{23} E_{34} E_{55} - E_{56} E_{23}^2) E_{44} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4Psi(x, y) \right) \\
& - \frac{6}{5} E_{44} (E_{56} E_{14} E_{33} + E_{66} E_{34}^2 - E_{13} E_{34} E_{56}) \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4Psi(x, y) \right) + \left(\right. \\
& E_{33} E_{44} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2Psi(x, y) \right) - \frac{1}{5} \sqrt{5} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2RS_{32}(x, y) \right) E_{34} - \frac{1}{5} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2RS_{32}(x, y) \right) E_{23} \sqrt{5} \\
& \left. \left. \right) (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \right) \Big) h / ((-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) E_{33}^2)
\end{aligned}$$

> **simplify(simplify(m032_Psi-m032), size);**

$$\begin{aligned}
& -\frac{6}{5} h E_{44} \left(((E_{55} (2 E_{44} + E_{12}) - 2 E_{24} E_{56} - E_{66} E_{22}) E_{33} + (-2 E_{34}^2 - E_{23} E_{13}) E_{55} \right. \\
& \quad \left. + E_{66} E_{23}^2 + 2 E_{56} E_{34} E_{23} \right) \left(\frac{\partial^5}{\partial y^3 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\right. \\
& \quad \left(E_{55} E_{11} + 2 E_{56} E_{14} - 2 \left(\frac{1}{2} E_{12} + E_{44} \right) E_{66} \right) E_{33} - E_{55} E_{13}^2 - 2 E_{13} E_{34} E_{56} \\
& \quad \left. + E_{66} (2 E_{34}^2 + E_{23} E_{13}) \right) \left(\frac{\partial^5}{\partial y \partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& \quad + ((-E_{22} E_{56} + E_{55} E_{24}) E_{33} + E_{56} E_{23}^2 - E_{23} E_{34} E_{55}) \left(\frac{\partial^5}{\partial y^4 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& \quad + ((3 E_{14} E_{55} - 3 E_{66} E_{24}) E_{33} + 3 E_{34} (-E_{55} E_{13} + E_{66} E_{23})) \left(\frac{\partial^5}{\partial y^2 \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& \quad + ((E_{56} E_{11} - E_{66} E_{14}) E_{33} - E_{56} E_{13}^2 + E_{66} E_{34} E_{13}) \left(\frac{\partial^5}{\partial x^5} c4u_{3,0}(x, y) \right) + (\\
& \quad (E_{55} (2 E_{44} + E_{12}) - E_{66} E_{22} - E_{24} E_{56}) E_{33} + (-E_{34}^2 - E_{23} E_{13}) E_{55} + E_{66} E_{23}^2 + E_{56} E_{34} E_{23} \\
& \quad \left. \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4Psi(x, y) \right) + \\
& \quad ((2 E_{44} + E_{12}) E_{56} - 2 E_{66} E_{24} + E_{14} E_{55}) E_{33} - E_{13} E_{23} E_{56} - E_{34} E_{13} E_{55} + 2 E_{66} E_{34} E_{23} \\
& \quad \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4Psi(x, y) \right) \\
& \quad + ((-E_{22} E_{56} + E_{55} E_{24}) E_{33} + E_{56} E_{23}^2 - E_{23} E_{34} E_{55}) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4Psi(x, y) \right) \\
& \quad + (E_{56} E_{14} E_{33} + E_{66} E_{34}^2 - E_{13} E_{34} E_{56}) \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4Psi(x, y) \right) \\
& \quad - \frac{5}{6} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2Psi(x, y) \right) E_{33} (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \Big/ (E_{33} (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}))
\end{aligned}$$

> **m231_Psi:=simplify(simplify(subs(su_c4u_1_3_Psi,su_c4u_2_3_Psi,i,algsubs(su_c4u_3_2,cvar(ml(2,3,1))))),size);**

$$\begin{aligned}
m231_Psi & := -\frac{1}{5} \sqrt{5} h \left((-2 E_{44} - E_{12}) E_{33} + E_{23} E_{13} + 2 E_{34}^2 \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& \quad + (-3 E_{14} E_{33} + 3 E_{34} E_{13}) \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + (-E_{33} E_{11} + E_{13}^2) \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& \quad + \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) (E_{23} E_{34} - E_{24} E_{33}) - E_{33} E_{44} \left(\frac{\partial}{\partial y} c4Psi(x, y) \right) \Big/ E_{33}
\end{aligned}$$

> **simplify(simplify(m231_Psi-m231),size);**

$$\frac{1}{5} a^2 h \sqrt{5} E_{44} \left(\frac{\partial}{\partial y} c4Psi(x, y) \right)$$

> **m232_Psi:=simplify(simplify(subs(su_c4u_1_3_Psi, su_c4u_2_3_Psi, algsubs(su_c4u_3_2, cvar(ml(2, 3, 2))))), size);**

$$m232_Psi := \frac{1}{5} \sqrt{5} h a^2 \left(((2 E_{44} + E_{12}) E_{33} - 2 E_{34}^2 - E_{23} E_{13}) \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + (E_{14} E_{33} - E_{34} E_{13}) \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + (E_{22} E_{33} - E_{23}^2) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + (3 E_{24} E_{33} - 3 E_{23} E_{34}) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) - E_{33} E_{44} \left(\frac{\partial}{\partial x} c4Psi(x, y) \right) \right) / E_{33}$$

> **simplify(simplify(m232_Psi-m232), size);**

$$-\frac{1}{5} a^2 h \sqrt{5} E_{44} \left(\frac{\partial}{\partial x} c4Psi(x, y) \right)$$

> **simplify(algsubs(nebengl, simplify(1/a^2/h*(diff(m231_Psi, x)+diff(m232_Psi, y))))), size);**

$$-\frac{1}{5} \sqrt{5} c2RS_{30}(x, y)$$

> **m133_Psi:=simplify(algsubs(su_c2u_2_1_Psi, algsubs(su_c2u_1_1_Psi, algsubs(su_gl23_Psi, cvar(ml(1, 3, 3))))));**

$$m133_Psi := \frac{1}{5} \left(-4 E_{34}^2 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) - \sqrt{5} c2RS_{32}(x, y) E_{33} - 4 E_{34} E_{13} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{12} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} + E_{11} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} + 4 E_{14} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} + 4 E_{24} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} - 2 E_{13} E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) - E_{23}^2 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 4 E_{44} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} + E_{22} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} - 4 E_{34} E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) - E_{13}^2 \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) h a / E_{33}$$

> **simplify(simplify(m133_Psi-m133), size);**

0

> **simplify(algsubs(nebengl, algsubs(su_c2u_2_1_Psi, algsubs(su_c2u_1_1_Psi, algsubs(su_gl23_Psi, cvar(ml(1, 3, 3))))));**

$$-\frac{1}{5} (\sqrt{5} c2RS_{32}(x, y) + c2RS_{30}(x, y)) h a$$

> **m111_Psi:=simplify(simplify(algsubs(su_c2u_2_1_Psi, algsubs(su_c2u_1_1_Psi, algsubs(su_gl23_Psi, cvar(ml(1, 1, 1))))), size);**

$$\begin{aligned}
m111_Psi := & 2 a \left(\left(\left(\left(\left(\frac{12}{5} E_{44} + 3 E_{12} \right) E_{14} + \frac{9}{5} E_{24} E_{11} \right) E_{56} \right. \right. \right. \\
& + \left(-\frac{9}{5} E_{24} E_{14} - \frac{3}{5} E_{12} (2 E_{44} + E_{12}) \right) E_{66} - \frac{3}{5} (3 E_{14}^2 + E_{11} (2 E_{44} + E_{12})) E_{55} \left. \right) E_{33}^2 + \left(\right. \\
& \left. \left(-\frac{9}{5} E_{24} E_{56} + \frac{3}{5} E_{55} (2 E_{44} + E_{12}) \right) E_{13}^2 + \left(\left(-\frac{2}{5} E_{44} - \frac{3}{10} E_{12} \right) E_{56}^2 \right. \right. \\
& + \left. \left(\left(-\frac{12}{5} E_{44} - 3 E_{12} \right) E_{34} - 3 E_{14} E_{23} \right) E_{56} \right. \\
& + \left. \left(\left(\frac{2}{5} E_{44} + \frac{3}{10} E_{12} \right) E_{55} + \frac{9}{5} E_{34} E_{24} + \frac{6}{5} (E_{44} + E_{12}) E_{23} \right) E_{66} + \frac{3}{5} E_{55} (E_{11} E_{23} + 6 E_{14} E_{34}) \right. \\
& \left. \right) E_{13} + \left(-\frac{1}{10} E_{11} E_{23} - \frac{2}{5} E_{14} E_{34} \right) E_{56}^2 + \left(-\frac{12}{5} E_{14} E_{34}^2 - \frac{9}{5} E_{11} E_{23} E_{34} \right) E_{56} \\
& + \left(\left(\frac{2}{5} E_{14} E_{34} + \frac{1}{10} E_{11} E_{23} \right) E_{55} + \frac{6}{5} E_{12} E_{34}^2 + \frac{9}{5} E_{14} E_{23} E_{34} \right) E_{66} + \frac{6}{5} E_{55} E_{11} E_{34}^2 \left. \right) E_{33} - \frac{3}{5} \\
& E_{13} \left(E_{55} E_{13}^2 E_{23} + \left(-\frac{2}{3} E_{23} E_{56}^2 - 8 E_{56} E_{34} E_{23} + \left(E_{23} + \frac{2}{3} E_{55} \right) E_{23} E_{66} + 5 E_{55} E_{34}^2 \right) E_{13} \right. \\
& + 5 E_{34}^2 \left(-\frac{4}{15} E_{56}^2 - \frac{4}{5} E_{34} E_{56} + E_{66} \left(E_{23} + \frac{4}{15} E_{55} \right) \right) \left. \right) \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\left(\right. \right. \\
& \left. \left(\frac{12}{5} E_{24} E_{14} + \frac{3}{5} E_{22} E_{11} + \frac{6}{5} E_{44} E_{12} + \frac{3}{5} E_{12}^2 \right) E_{56} + \left(-\frac{3}{5} E_{22} E_{14} - \frac{9}{5} E_{24} E_{12} \right) E_{66} \right. \\
& - \frac{3}{5} ((2 E_{44} + E_{12}) E_{14} + E_{24} E_{11}) E_{55} \left. \right) E_{33}^2 + \left(\left(\frac{3}{5} E_{55} E_{24} - \frac{3}{5} E_{22} E_{56} \right) E_{13}^2 + \left(-\frac{2}{5} E_{56}^2 E_{24} \right. \right. \\
& + \left. \left(-\frac{12}{5} E_{34} E_{24} - \frac{6}{5} (E_{44} + E_{12}) E_{23} \right) E_{56} + \left(\frac{9}{5} E_{23} E_{24} + \frac{2}{5} E_{55} E_{24} + \frac{3}{5} E_{34} E_{22} \right) E_{66} \right. \\
& + \frac{3}{5} ((2 E_{44} + E_{12}) E_{34} + E_{14} E_{23}) E_{55} \left. \right) E_{13} + \left(-\frac{1}{5} E_{12} E_{34} - \frac{1}{5} E_{14} E_{23} \right) E_{56}^2 \\
& + \left(-\frac{6}{5} E_{12} E_{34}^2 - \frac{3}{5} E_{23}^2 E_{11} - \frac{12}{5} E_{14} E_{23} E_{34} \right) E_{56} \\
& + \left(\left(\frac{1}{5} E_{12} E_{34} + \frac{1}{5} E_{14} E_{23} \right) E_{55} + \frac{3}{5} E_{23}^2 E_{14} + \frac{9}{5} E_{12} E_{23} E_{34} \right) E_{66} \\
& + \frac{3}{5} E_{34} E_{55} (2 E_{14} E_{34} + E_{11} E_{23}) \left. \right) E_{33} - \frac{6}{5} E_{13} \left((E_{23} E_{34} E_{55} - E_{56} E_{23}^2) E_{13} \right. \\
& + 2 E_{34} \left(-\frac{1}{3} E_{23} E_{56}^2 - \frac{3}{2} E_{56} E_{34} E_{23} + \left(E_{23} + \frac{1}{3} E_{55} \right) E_{23} E_{66} + \frac{1}{2} E_{55} E_{34}^2 \right) \left. \right) \\
& \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\right. \\
& \left. \left(\left(\frac{12}{5} E_{14}^2 + \frac{6}{5} E_{11} (E_{44} + E_{12}) \right) E_{56} - \frac{12}{5} E_{14} \left(\left(\frac{1}{2} E_{12} + \frac{1}{2} E_{44} \right) E_{66} + E_{55} E_{11} \right) \right) \right. E_{33}^2 + \left(\right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\left(-\frac{6}{5} E_{44} - \frac{6}{5} E_{12} \right) E_{56} + \frac{12}{5} E_{14} E_{55} \right) E_{13}^2 + \left(-\frac{3}{5} E_{56}^2 E_{14} + \left(-\frac{24}{5} E_{14} E_{34} - \frac{6}{5} E_{11} E_{23} \right) E_{56} \right. \\
& + \left. \left(\frac{3}{5} E_{14} E_{55} + \left(\frac{6}{5} E_{44} + \frac{6}{5} E_{12} \right) E_{34} + \frac{6}{5} E_{14} E_{23} \right) E_{66} + \frac{12}{5} E_{55} E_{34} E_{11} \right) E_{13} \\
& + \frac{1}{5} E_{34} \left(-E_{56}^2 E_{11} - 6 E_{34} E_{11} E_{56} + E_{66} (6 E_{14} E_{34} + E_{55} E_{11}) \right) E_{33} - \frac{12}{5} E_{13} \left(\right. \\
& \left. -\frac{1}{2} E_{23} E_{56} + E_{55} E_{34} \right) E_{13}^2 + \frac{1}{2} E_{34} \left(-\frac{2}{3} E_{56}^2 - 3 E_{34} E_{56} + \left(E_{23} + \frac{2}{3} E_{55} \right) E_{66} \right) E_{13} \\
& + \frac{1}{2} E_{66} E_{34}^3 \left. \right) \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\right. \\
& \left. \left(\frac{3}{5} E_{22} E_{14} + \frac{3}{5} E_{24} E_{12} \right) E_{56} - \frac{3}{5} E_{55} E_{14} E_{24} - \frac{3}{5} E_{66} E_{12} E_{22} \right) E_{33}^2 + \left(\right. \\
& \left. -\frac{1}{10} E_{56}^2 E_{22} + \left(-\frac{3}{5} E_{34} E_{22} - \frac{3}{5} E_{23} E_{24} \right) E_{56} + \frac{3}{5} \left(\frac{1}{6} E_{55} + E_{23} \right) E_{22} E_{66} + \frac{3}{5} E_{55} E_{34} E_{24} \right) E_{13} \\
& + \frac{3}{5} \left(-\frac{1}{6} E_{12} E_{56}^2 + (-E_{12} E_{34} - E_{14} E_{23}) E_{56} + \left(\frac{1}{6} E_{55} + E_{23} \right) E_{12} E_{66} + E_{55} E_{14} E_{34} \right) E_{23} \\
& E_{33} - \frac{3}{5} E_{13} \left(-\frac{1}{3} E_{23} E_{56}^2 - 2 E_{56} E_{34} E_{23} + \left(E_{23} + \frac{1}{3} E_{55} \right) E_{23} E_{66} + E_{55} E_{34}^2 \right) E_{23} \\
& \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\left(-\frac{3}{5} E_{55} E_{11}^2 + \frac{6}{5} E_{56} E_{14} E_{11} - \frac{3}{5} E_{66} E_{14}^2 \right) E_{33}^2 + \right. \\
& \left. \frac{6}{5} E_{13} \left((E_{55} E_{11} - E_{56} E_{14}) E_{13} - \frac{1}{6} E_{56}^2 E_{11} - E_{34} E_{11} E_{56} + \frac{1}{6} E_{66} (6 E_{14} E_{34} + E_{55} E_{11}) \right) E_{33} \right. \\
& \left. - \frac{3}{5} E_{13}^2 \left(E_{55} E_{13}^2 + \left(\frac{1}{3} E_{55} E_{66} - \frac{1}{3} E_{56}^2 - 2 E_{34} E_{56} \right) E_{13} + E_{66} E_{34}^2 \right) \right) \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + \left((-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) (-E_{14} E_{33} + E_{34} E_{13}) \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c2u_{3,0}(x, y) \right) \right. \\
& - \frac{1}{2} (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) (E_{12} E_{33} - E_{23} E_{13}) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c2u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - \frac{1}{2} (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) (E_{33} E_{11} - E_{13}^2) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c2u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + \frac{3}{5} ((E_{12} E_{56} - E_{14} E_{55}) E_{33} + E_{13} (-E_{23} E_{56} + E_{55} E_{34})) E_{44} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c4Psi(x, y) \right) \\
& - \frac{3}{5} E_{44} ((E_{56} E_{11} - E_{66} E_{14}) E_{33} - E_{56} E_{13}^2 + E_{66} E_{34} E_{13}) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c4Psi(x, y) \right) \\
& - \frac{3}{5} E_{44} ((E_{55} E_{11} - E_{66} E_{12}) E_{33} - E_{55} E_{13}^2 + E_{13} E_{66} E_{23}) \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4Psi(x, y) \right)
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{10}\sqrt{5}(-E_{56}^2 + E_{55}E_{66})c2RS_{32}(x,y)E_{13}E_{33}h / (E_{33}^2(-E_{56}^2 + E_{55}E_{66}))$$

> **simplify(simplify(m111_Psi-m111), size);**

$$\begin{aligned} & \frac{6}{5}h \left((E_{12}E_{56} - E_{14}E_{55})E_{33} + E_{13}(-E_{23}E_{56} + E_{55}E_{34}) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c4Psi(x,y) \right) \right. \\ & \quad + ((-E_{56}E_{11} + E_{66}E_{14})E_{33} - E_{66}E_{34}E_{13} + E_{56}E_{13}^2) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c4Psi(x,y) \right) \\ & \quad \left. - ((E_{55}E_{11} - E_{66}E_{12})E_{33} - E_{55}E_{13}^2 + E_{13}E_{66}E_{23}) \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4Psi(x,y) \right) \right) E_{44}a / (E_{33} \\ & \quad (-E_{56}^2 + E_{55}E_{66})) \end{aligned}$$

> **m122_Psi:=simplify(simplify(algsubs(su_c2u_2_1_Psi,algsubs(su_c2u_1_1_Psi,algsubs(su_gl23_Psi,cvar(ml(1,2,2))))), size);**

$$\begin{aligned} m122_Psi := & \frac{6}{5}a \left(((-4E_{44} - 5E_{12})E_{24} - 3E_{22}E_{14})E_{56} \right. \\ & + (3E_{24}^2 + E_{22}(2E_{44} + E_{12}))E_{66} + (3E_{24}E_{14} + E_{12}(2E_{44} + E_{12}))E_{55}E_{33}^2 + \left(\right. \\ & (3E_{56}E_{14} - E_{66}(2E_{44} + E_{12}))E_{23}^2 + \left(\left(\frac{2}{3}E_{44} + \frac{1}{2}E_{12} \right) E_{56}^2 \right. \\ & + ((4E_{44} + 5E_{12})E_{34} + 5E_{24}E_{13})E_{56} + \left(\left(-\frac{1}{2}E_{12} - \frac{2}{3}E_{44} \right) E_{55} - 6E_{34}E_{24} - E_{13}E_{22} \right) E_{66} \\ & - 2E_{55} \left(\frac{3}{2}E_{14}E_{34} + (E_{44} + E_{12})E_{13} \right) \left. \right) E_{23} + \left(\frac{2}{3}E_{34}E_{24} + \frac{1}{6}E_{13}E_{22} \right) E_{56}^2 \\ & + (3E_{22}E_{34}E_{13} + 4E_{24}E_{34}^2)E_{56} + \left(\left(-\frac{2}{3}E_{34}E_{24} - \frac{1}{6}E_{13}E_{22} \right) E_{55} - 2E_{34}^2E_{22} \right) E_{66} \\ & + (-3E_{24}E_{34}E_{13} - 2E_{12}E_{34}^2)E_{55} \left. \right) E_{33} + \left(E_{66}E_{13}E_{23}^2 \right. \\ & + \left(-\frac{2}{3}E_{13}E_{56}^2 - 8E_{13}E_{34}E_{56} + \left(\frac{2}{3}E_{55}E_{13} + 5E_{34}^2 \right) E_{66} + E_{55}E_{13}^2 \right) E_{23} \\ & + 5 \left(-\frac{4}{15}E_{56}^2 - \frac{4}{5}E_{34}E_{56} + \left(E_{13} + \frac{4}{15}E_{66} \right) E_{55} \right) E_{34}^2 \left. \right) E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x,y) \right) + \left(\right. \\ & (-E_{12}^2 - E_{22}E_{11} - 4E_{24}E_{14} - 2E_{44}E_{12})E_{56} + ((2E_{44} + E_{12})E_{24} + E_{22}E_{14})E_{66} \\ & + E_{55}(E_{24}E_{11} + 3E_{14}E_{12})E_{33}^2 + \left((E_{56}E_{11} - E_{66}E_{14})E_{23}^2 + \left(\frac{2}{3}E_{56}^2E_{14} \right. \right. \\ & + (4E_{14}E_{34} + 2(E_{44} + E_{12})E_{13})E_{56} + \left(-\frac{2}{3}E_{14}E_{55} + (-2E_{44} - E_{12})E_{34} - E_{24}E_{13} \right) E_{66} \\ & \left. \left. - E_{55}(E_{34}E_{11} + 3E_{13}E_{14}) \right) E_{23} + \left(\frac{1}{3}E_{12}E_{34} + \frac{1}{3}E_{24}E_{13} \right) E_{56}^2 \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (E_{22} E_{13}^2 + 4 E_{24} E_{34} E_{13} + 2 E_{12} E_{34}^2) E_{56} \\
& + \left(\left(-\frac{1}{3} E_{12} E_{34} - \frac{1}{3} E_{24} E_{13} \right) E_{55} - 2 E_{24} E_{34}^2 - E_{22} E_{34} E_{13} \right) E_{66} \\
& + (-3 E_{12} E_{34} E_{13} - E_{24} E_{13}^2) E_{55} \Big) E_{33} - 2 E_{23} \left((E_{56} E_{13}^2 - E_{66} E_{34} E_{13}) E_{23} \right. \\
& \left. - 2 \left(-\frac{1}{3} E_{13} E_{56}^2 - \frac{3}{2} E_{13} E_{34} E_{56} + \left(\frac{1}{2} E_{34}^2 + \frac{1}{3} E_{55} E_{13} \right) E_{66} + E_{55} E_{13}^2 \right) E_{34} \right) \\
& \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\right. \\
& \left((-4 E_{24}^2 - 2 E_{22} (E_{44} + E_{12})) E_{56} + 2 E_{24} (2 E_{66} E_{22} + E_{55} (E_{44} + E_{12})) \right) E_{33}^2 + \left(\right. \\
& \left((2 E_{12} + 2 E_{44}) E_{56} - 4 E_{66} E_{24} \right) E_{23}^2 + (E_{56}^2 E_{24} + (2 E_{13} E_{22} + 8 E_{34} E_{24}) E_{56} \\
& + (-4 E_{34} E_{22} - E_{55} E_{24}) E_{66} - 2 ((E_{44} + E_{12}) E_{34} + E_{24} E_{13}) E_{55} \Big) E_{23} \\
& + 2 \left(\frac{1}{6} E_{56}^2 E_{22} + E_{34} E_{22} E_{56} - \frac{1}{6} E_{55} (6 E_{34} E_{24} + E_{66} E_{22}) \right) E_{34} \Big) E_{33} - 2 \\
& \left((E_{56} E_{13} - 2 E_{66} E_{34}) E_{23}^2 - \left(-\frac{2}{3} E_{56}^2 - 3 E_{34} E_{56} + \left(E_{13} + \frac{2}{3} E_{66} \right) E_{55} \right) E_{34} E_{23} - E_{55} E_{34}^3 \right) \\
& E_{23} \Big) \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left((-E_{14} E_{12} - E_{24} E_{11}) E_{56} + E_{55} E_{12} E_{11} + E_{66} E_{24} E_{14} \right) E_{33}^2 \\
& + \left(\left(\frac{1}{6} E_{56}^2 E_{11} + (E_{13} E_{14} + E_{34} E_{11}) E_{56} + \left(-E_{14} E_{34} - \frac{1}{6} E_{55} E_{11} \right) E_{66} - E_{55} E_{11} E_{13} \right) E_{23} \right. \\
& \left. - \left(-\frac{1}{6} E_{12} E_{56}^2 + (-E_{12} E_{34} - E_{24} E_{13}) E_{56} + \left(\frac{1}{6} E_{55} E_{12} + E_{34} E_{24} \right) E_{66} + E_{55} E_{13} E_{12} \right) E_{13} \right) \\
& E_{33} + \left(-\frac{1}{3} E_{13} E_{56}^2 - 2 E_{13} E_{34} E_{56} + \left(\frac{1}{3} E_{55} E_{13} + E_{34}^2 \right) E_{66} + E_{55} E_{13}^2 \right) E_{23} E_{13} \Big) \\
& \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left((E_{55} E_{24}^2 - 2 E_{56} E_{24} E_{22} + E_{66} E_{22}^2) E_{33}^2 - 2 E_{23} \right. \\
& \left((-E_{24} E_{56} + E_{66} E_{22}) E_{23} - \frac{1}{6} E_{56}^2 E_{22} - E_{34} E_{22} E_{56} + \frac{1}{6} E_{55} (6 E_{34} E_{24} + E_{66} E_{22}) \right) E_{33} \\
& + E_{23}^2 \left(E_{66} E_{23}^2 + \left(\frac{1}{3} E_{55} E_{66} - \frac{1}{3} E_{56}^2 - 2 E_{34} E_{56} \right) E_{23} + E_{55} E_{34}^2 \right) \Big) \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \\
& E_{33} \left(\frac{5}{3} (E_{56}^2 - E_{55} E_{66}) (E_{23} E_{34} - E_{24} E_{33}) \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c2u_{3,0}(x, y) \right) \right. \\
& \left. - \frac{5}{6} (E_{56}^2 - E_{55} E_{66}) (E_{22} E_{33} - E_{23}^2) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c2u_{3,0}(x, y) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{5}{6}(E_{56}^2 - E_{55} E_{66})(E_{12} E_{33} - E_{23} E_{13}) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c2u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - E_{44} \left((E_{22} E_{56} - E_{55} E_{24}) E_{33} + E_{23} E_{34} E_{55} - E_{56} E_{23}^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c4Psi(x, y) \right) \\
& + \left((E_{12} E_{56} - E_{66} E_{24}) E_{33} - E_{23} (E_{56} E_{13} - E_{66} E_{34}) \right) E_{44} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c4Psi(x, y) \right) \\
& + \left((E_{55} E_{12} - E_{66} E_{22}) E_{33} + E_{66} E_{23}^2 - E_{55} E_{13} E_{23} \right) E_{44} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4Psi(x, y) \right) \\
& - \frac{1}{6} \sqrt{5} (E_{56}^2 - E_{55} E_{66}) c2RS_{32}(x, y) E_{23} \Big) \Big) h / (E_{33}^2 (E_{56}^2 - E_{55} E_{66}))
\end{aligned}$$

> **simplify(simplify(m122_Psi-m122), size);**

$$\begin{aligned}
& -\frac{6}{5} h E_{44} \left(\left((-E_{22} E_{56} + E_{55} E_{24}) E_{33} + E_{56} E_{23}^2 - E_{23} E_{34} E_{55} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c4Psi(x, y) \right) \right. \\
& \quad \left. + \left((E_{12} E_{56} - E_{66} E_{24}) E_{33} - E_{23} (E_{56} E_{13} - E_{66} E_{34}) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c4Psi(x, y) \right) \right. \\
& \quad \left. + \left((E_{55} E_{12} - E_{66} E_{22}) E_{33} + E_{66} E_{23}^2 - E_{55} E_{13} E_{23} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4Psi(x, y) \right) \right) a / (E_{33} \\
& \quad (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}))
\end{aligned}$$

> **m112_Psi:=simplify(simplify(algsub(su_c2u_2_1_Psi,algsubs(su_c2u_1_1_Psi,algsubs(su_gl23_Psi,cvar(ml(1,1,2))))),size);**

$$\begin{aligned}
m112_Psi := & -\frac{6}{5} a \left(\left(\left((6 E_{24} E_{14} + 4 E_{44}^2 + 2 E_{44} E_{12}) E_{56} - 5 \left(E_{44} + \frac{1}{5} E_{12} \right) (E_{14} E_{55} + E_{66} E_{24}) \right) E_{33}^2 + \left((-2 E_{12} - 8 E_{44}) E_{56} + 5 E_{14} E_{55} + 5 E_{66} E_{24} \right) E_{34}^2 + \left(\left(-\frac{4}{3} E_{44} - \frac{1}{3} E_{12} \right) E_{56}^2 \right. \right. \\
& + (-6 E_{14} E_{23} - 6 E_{24} E_{13}) E_{56} + \left(\left(\frac{4}{3} E_{44} + \frac{1}{3} E_{12} \right) E_{55} + 5 E_{23} \left(E_{44} + \frac{1}{5} E_{12} \right) \right) E_{66} \\
& + 5 \left(E_{44} + \frac{1}{5} E_{12} \right) E_{13} E_{55} \Big) E_{34} + \left(-\frac{1}{6} E_{14} E_{23} - \frac{1}{6} E_{24} E_{13} \right) E_{56}^2 - 2 E_{44} E_{56} E_{23} E_{13} \\
& + \left(\left(\frac{1}{6} E_{14} E_{23} + \frac{1}{6} E_{24} E_{13} \right) E_{55} + E_{24} E_{23} E_{13} \right) E_{66} + E_{55} E_{14} E_{13} E_{23} \Big) E_{33} + \frac{2}{3} E_{34} \left(6 E_{34}^3 E_{56} \right. \\
& + \left(2 E_{56}^2 + \left(-\frac{15}{2} E_{23} - 2 E_{55} \right) E_{66} - \frac{15}{2} E_{55} E_{13} \right) E_{34}^2 + 12 E_{34} E_{13} E_{56} E_{23} \\
& \left. \left. + E_{23} E_{13} \left(E_{56}^2 + \left(-\frac{3}{2} E_{23} - E_{55} \right) E_{66} - \frac{3}{2} E_{55} E_{13} \right) \right) \right) \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\left(\right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (6 E_{44} E_{24} + E_{22} E_{14} + E_{24} E_{12}) E_{56} + (-3 E_{24}^2 - E_{22} E_{44}) E_{66} \\
& - E_{55} (E_{24} E_{14} + E_{44} E_{12} + 2 E_{44}^2) E_{33}^2 + \left(\right. \\
& \left. \left(-6 E_{24} E_{56} + E_{66} E_{22} + 4 E_{55} \left(\frac{1}{4} E_{12} + E_{44} \right) \right) E_{34}^2 + \left(-E_{56}^2 E_{24} \right. \right. \\
& \left. \left. + (-6 E_{44} E_{23} - E_{13} E_{22} - E_{23} E_{12}) E_{56} + 6 \left(\frac{1}{6} E_{55} + E_{23} \right) E_{24} E_{66} + E_{55} (E_{24} E_{13} + E_{14} E_{23}) \right) \right. \\
& \left. E_{34} - \frac{1}{3} \left(E_{44} E_{56}^2 + (3 E_{24} E_{13} + 3 E_{14} E_{23}) E_{56} - 3 \left(E_{66} \left(E_{23} + \frac{1}{3} E_{55} \right) + E_{55} E_{13} \right) E_{44} \right) E_{23} \right) \\
& E_{33} + \frac{4}{3} E_{34} \left(-\frac{3}{2} E_{55} E_{34}^3 + \frac{9}{2} E_{23} E_{56} E_{34}^2 + E_{23} \left(E_{56}^2 + (-E_{55} - 3 E_{23}) E_{66} - \frac{3}{2} E_{55} E_{13} \right) E_{34} \right. \\
& \left. + \frac{3}{2} E_{56} E_{13} E_{23}^2 \right) \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left((E_{14} E_{12} + E_{24} E_{11} + 6 E_{44} E_{14}) E_{56} \right. \\
& \left. + (-2 E_{44}^2 - E_{44} E_{12} - E_{24} E_{14}) E_{66} - E_{55} (E_{11} E_{44} + 3 E_{14}^2) \right) E_{33}^2 + \left(\right. \\
& \left. (-6 E_{56} E_{14} + (E_{12} + 4 E_{44}) E_{66} + E_{55} E_{11}) E_{34}^2 + (-E_{56}^2 E_{14} \right. \\
& \left. + (-E_{13} E_{12} - 6 E_{13} E_{44} - E_{11} E_{23}) E_{56} + (E_{14} E_{23} + E_{14} E_{55} + E_{24} E_{13}) E_{66} + 6 E_{55} E_{13} E_{14} \right) \\
& E_{34} - \frac{1}{3} \left(E_{44} E_{56}^2 + (3 E_{24} E_{13} + 3 E_{14} E_{23}) E_{56} - 3 \left(E_{66} \left(E_{23} + \frac{1}{3} E_{55} \right) + E_{55} E_{13} \right) E_{44} \right) E_{13} \right) \\
& E_{33} + \frac{4}{3} E_{34} \left(-\frac{3}{2} E_{66} E_{34}^3 + \frac{9}{2} E_{13} E_{56} E_{34}^2 + \left(E_{56}^2 + \left(-\frac{3}{2} E_{23} - E_{55} \right) E_{66} - 3 E_{55} E_{13} \right) E_{13} E_{34} \right. \\
& \left. + \frac{3}{2} E_{56} E_{13}^2 E_{23} \right) \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\right. \\
& \left. (E_{14}^2 + E_{11} E_{44}) E_{56} - E_{14} (E_{44} E_{66} + E_{55} E_{11}) \right) E_{33}^2 + \left((-E_{56} E_{11} + E_{66} E_{14}) E_{34}^2 \right. \\
& \left. + \left(-\frac{1}{6} E_{56}^2 E_{11} - 2 E_{56} E_{13} E_{14} + \left(\frac{1}{6} E_{55} E_{11} + E_{13} E_{44} \right) E_{66} + E_{55} E_{11} E_{13} \right) E_{34} \right. \\
& \left. - \frac{1}{6} E_{13} (E_{56}^2 E_{14} + 6 E_{44} E_{13} E_{56} - E_{14} (E_{66} + 6 E_{13}) E_{55}) \right) E_{33} \\
& \left. + \frac{1}{3} E_{34} E_{13} (-3 E_{66} E_{34}^2 + 6 E_{13} E_{34} E_{56} + (E_{56}^2 - E_{55} (3 E_{13} + E_{66})) E_{13}) \right) \\
& \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left((E_{22} E_{44} + E_{24}^2) E_{56} - E_{24} (E_{66} E_{22} + E_{44} E_{55}) \right) E_{33}^2 + \left(\right. \\
& \left. (-E_{22} E_{56} + E_{55} E_{24}) E_{34}^2 \right. \\
& \left. + \left(-\frac{1}{6} E_{56}^2 E_{22} - 2 E_{56} E_{23} E_{24} + \left(\frac{1}{6} E_{55} + E_{23} \right) E_{22} E_{66} + E_{55} E_{44} E_{23} \right) E_{34} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{6} E_{23} \left(E_{56}^2 E_{24} + 6 E_{56} E_{44} E_{23} - 6 \left(\frac{1}{6} E_{55} + E_{23} \right) E_{24} E_{66} \right) E_{33} \\
& + \frac{1}{3} E_{34} E_{23} \left(-3 E_{55} E_{34}^2 + 6 E_{56} E_{34} E_{23} + \left(E_{56}^2 - 3 E_{66} \left(E_{23} + \frac{1}{3} E_{55} \right) \right) E_{23} \right) \\
& \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x,y) \right) + E_{33} \left(\frac{5}{3} (E_{44} E_{33} - E_{34}^2) (E_{56}^2 - E_{55} E_{66}) \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c2u_{3,0}(x,y) \right) \right. \\
& - \frac{5}{6} (E_{23} E_{34} - E_{24} E_{33}) (E_{56}^2 - E_{55} E_{66}) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c2u_{3,0}(x,y) \right) \\
& \left. - \frac{5}{6} (-E_{14} E_{33} + E_{34} E_{13}) (E_{56}^2 - E_{55} E_{66}) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c2u_{3,0}(x,y) \right) \right. \\
& - \left((E_{44} E_{55} - E_{24} E_{56}) E_{33} - E_{55} E_{34}^2 + E_{56} E_{34} E_{23} \right) E_{44} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c4Psi(x,y) \right) \\
& + \left((E_{44} E_{66} - E_{56} E_{14}) E_{33} - E_{66} E_{34}^2 + E_{13} E_{34} E_{56} \right) E_{44} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c4Psi(x,y) \right) \\
& - \left((-E_{66} E_{24} + E_{14} E_{55}) E_{33} + E_{34} (-E_{55} E_{13} + E_{66} E_{23}) \right) E_{44} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4Psi(x,y) \right) \\
& \left. + \frac{1}{6} \sqrt{5} (E_{56}^2 - E_{55} E_{66}) E_{34} c2RS_{32}(x,y) \right) h / (E_{33}^2 (E_{56}^2 - E_{55} E_{66}))
\end{aligned}$$

> **simplify(simplify(m112_Psi-m112), size);**

$$\begin{aligned}
& \frac{6}{5} a E_{44} h \left(\left((-E_{44} E_{55} + E_{24} E_{56}) E_{33} - E_{56} E_{34} E_{23} + E_{55} E_{34}^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c4Psi(x,y) \right) \right. \\
& + \left((E_{44} E_{66} - E_{56} E_{14}) E_{33} - E_{66} E_{34}^2 + E_{13} E_{34} E_{56} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c4Psi(x,y) \right) \\
& \left. + \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4Psi(x,y) \right) \left((E_{66} E_{24} - E_{14} E_{55}) E_{33} + E_{34} (-E_{66} E_{23} + E_{55} E_{13}) \right) \right) / (E_{33} \\
& (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}))
\end{aligned}$$

- 12 Testen der Lösung mit psi-Anteilen

Wir wollen testen, ob die neue Modellierung mit Psi-Anteilen zulässig ist. Wir gehen dabei analog zum Abschnitt A(6) vor. Zunächst überprüfen wir wieder, ob die Gleichungen des Reduktionsprozesses das ursprüngliche PDE-System der Tabelle 3 lösen. Dann testen wir noch das Plattenproblem in Schnittgrößen (vgl. Seite 63) durch das Einsetzen der berechneten Schnittgrößen in $w=u[3,0]$ und Psi.

Als erstes testen wir die Gleichungen der Tabelle 3.

[Gleichung (5,2):

> **subs(su_c4u_1_1, su_c4u_2_1, cvar(gls(5,2)))=0;**

$$0 = 0$$

[Gleichung (5,1):

]

> subs (su_c4u_1_1, su_c4u_2_1, cvar (gls (5, 1))) = 0;

$$0 = 0$$

Gleichung (4,3):

> tt := simplify (subs (su_c4u_3_2, su_c4u_1_1, su_c4u_2_1, cvar (gls (4, 3)))) = 0;

$$\begin{aligned} tt := & -3 E_{13} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(- \left(\frac{\partial}{\partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) \right) - 3 E_{34} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(- \left(\frac{\partial}{\partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) \right) \\ & - 3 E_{34} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(- \left(\frac{\partial}{\partial y} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) \right) - 3 E_{23} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(- \left(\frac{\partial}{\partial y} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) \right) \\ & - 3 E_{13} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) - 6 E_{34} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) - 3 E_{23} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) = 0 \end{aligned}$$

Das lassen wir Maple noch ein weiteres Mal vereinfachen:

> collect (tt, c4u[3, 0] (x, y));

$$0 = 0$$

Gleichung (3,2):

> tt := algsubs (su_c4u_3_2, simplify (subs (su_c2u_1_1_Psi, su_c2u_2_1_Psi, su_c4u_1_3_Psi, su_c4u_2_3_Psi, cvar (gls (3, 2)))))) = 0;

$$\begin{aligned} tt := & \frac{1}{3} \left(E_{55} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{13} + 2 E_{55} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{34} \right. \\ & + E_{55} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{23} \\ & - E_{55} \left(E_{13} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{34} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) \\ & - E_{56} \left(E_{13} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{34} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) \\ & + 2 E_{56} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{34} + E_{56} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{23} \\ & \left. + E_{56} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{13} \right) \sqrt{21} / E_{33} = 0 \end{aligned}$$

Wir lassen die linke Seite noch einmal vereinfachen:

> simplify (op (1, tt));

$$0$$

Gleichung (3,1):

> tt := algsubs (su_c4u_3_2, simplify (subs (su_c2u_1_1_Psi, su_c2u_2_1_Psi, su_c4u_1_3_Psi, su_c4u_2_3_Psi, cvar (gls (3, 1)))))) = 0;

$$\begin{aligned} tt := & \frac{1}{3} \left(\right. \\ & \left. - E_{66} \left(E_{13} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{34} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 E_{66} E_{34} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{66} E_{13} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + E_{66} E_{23} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - E_{56} \left(E_{13} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{34} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + E_{23} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right) \\
& + 2 E_{56} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{34} + E_{56} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{23} \\
& + E_{56} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{13} \sqrt{21} / E_{33} = 0
\end{aligned}$$

Wir lassen die linke Seite noch einmal vereinfachen:

> **simplify(op(1,tt));**

0

Gleichung (2,3):

> **tt:=algsubs(su_c4u_3_2,algsubs(su_c4u_1_3_Psi,algsubs(su_c4u_2_3_Psi,algsubs(su_c2u_2_1_Psi,algsubs(su_c2u_1_1_Psi,algsubs(su_gl23_Psi,cvar(gls(2,3))=c2RS_32(x,y))))))));**

Stimmt die linke Seite ?

> **simplify(op(1,tt));**

c2RS_32(x, y)

Gleichung c^2*(1,2):

> **tt:=algsubs(su_c4u_1_1,algsubs(su_c4u_2_1,algsubs(su_c2u_1_1_Psi,algsubs(su_c2u_2_1_Psi,algsubs(su_c4u_3_2,algsubs(su_c4u_1_3_Psi,algsubs(su_c4u_2_3_Psi,cvar(truncate(c^2*gl(1,2),4)))))))));**

$$tt := \frac{-E_{55} E_{44} \left(\frac{\partial}{\partial x} c4Psi(x, y) \right) E_{66} + E_{44} \left(\frac{\partial}{\partial x} c4Psi(x, y) \right) E_{56}^2}{-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}}$$

Das lassen wir Maple noch einmal vereinfachen:

> **simplify(tt);**

$$-E_{44} \left(\frac{\partial}{\partial x} c4Psi(x, y) \right)$$

= 0+O(c^6)

Gleichung c^2*(1,1):

> **tt:=algsubs(su_c4u_1_1,algsubs(su_c4u_2_1,algsubs(su_c2u_1_1_Psi,algsubs(su_c2u_2_1_Psi,algsubs(su_c4u_3_2,algsubs(su_c4u_1_3_Psi,algsubs(su_c4u_2_3_Psi,cvar(truncate(c^2*gl(1,1),4)))))))));**

)))))) ;

$$tt := \frac{-E_{56}^2 E_{44} \left(\frac{\partial}{\partial y} c4Psi(x, y) \right) + E_{55} E_{66} E_{44} \left(\frac{\partial}{\partial y} c4Psi(x, y) \right)}{-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}}$$

Das lassen wir Maple noch einmal vereinfachen:

> **simplify(tt);**

$$E_{44} \left(\frac{\partial}{\partial y} c4Psi(x, y) \right)$$

= 0+O(c^6)

Gleichung (1,2):

> **tt:=algsubs(su_c2u_1_1_Psi,algsubs(su_c2u_2_1_Psi,algsubs(su_g123_Psi,algsubs(su_g112_Psi,algsubs(su_g111_Psi,cvar(gls(1,2))))))):**

Das ergibt vereinfacht:

> **simplify(tt);**

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5} \left(6 \left(\frac{\partial^5}{\partial y^3 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{66} E_{23}^2 - 12 \left(\frac{\partial^5}{\partial y^3 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{55} E_{34}^2 \right. \\ & + 12 \left(\frac{\partial^5}{\partial y \partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{66} E_{34}^2 - 5 E_{55} E_{33} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2Psi(x, y) \right) E_{66} \\ & + 6 E_{33} E_{44} E_{66} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4Psi(x, y) \right) - 12 E_{33} \left(\frac{\partial^5}{\partial y \partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{44} E_{66} \\ & - 6 E_{33} \left(\frac{\partial^5}{\partial y \partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{66} E_{12} + 6 E_{33} \left(\frac{\partial^5}{\partial x^5} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{56} E_{11} \\ & - 6 E_{33} \left(\frac{\partial^5}{\partial x^5} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{66} E_{14} - 18 \left(\frac{\partial^5}{\partial y^2 \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{34} E_{13} E_{55} \\ & - 6 \left(\frac{\partial^5}{\partial y^3 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{55} E_{13} E_{23} - 6 \left(\frac{\partial^5}{\partial y^4 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{23} E_{34} E_{55} \\ & - 6 \left(\frac{\partial^5}{\partial y^3 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} E_{66} E_{22} + 12 \left(\frac{\partial^5}{\partial y^3 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{56} E_{34} E_{23} \\ & + 18 E_{33} \left(\frac{\partial^5}{\partial y^2 \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{14} E_{55} + 12 E_{33} \left(\frac{\partial^5}{\partial y \partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{56} E_{14} \\ & + 12 E_{33} E_{44} E_{56} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4Psi(x, y) \right) + 6 \left(\frac{\partial^5}{\partial y \partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{66} E_{23} E_{13} \\ & + 5 E_{33} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2Psi(x, y) \right) E_{56}^2 - 6 \left(\frac{\partial^5}{\partial x^5} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{56} E_{13}^2 \\ & - 6 \left(\frac{\partial^5}{\partial y \partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{55} E_{13}^2 + 6 \left(\frac{\partial^5}{\partial y^4 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{56} E_{23}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -12 \left(\frac{\partial^5}{\partial y \partial x^4} c4u_{3,0}(x,y) \right) E_{13} E_{34} E_{56} + 18 \left(\frac{\partial^5}{\partial y^2 \partial x^3} c4u_{3,0}(x,y) \right) E_{66} E_{34} E_{23} \\
& + 6 \left(\frac{\partial^5}{\partial x^5} c4u_{3,0}(x,y) \right) E_{66} E_{34} E_{13} + 6 E_{33} E_{44} E_{55} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4Psi(x,y) \right) \\
& - 12 \left(\frac{\partial^5}{\partial y^3 \partial x^2} c4u_{3,0}(x,y) \right) E_{33} E_{24} E_{56} + 6 E_{33} \left(\frac{\partial^5}{\partial y \partial x^4} c4u_{3,0}(x,y) \right) E_{55} E_{11} \\
& + 12 \left(\frac{\partial^5}{\partial y^3 \partial x^2} c4u_{3,0}(x,y) \right) E_{33} E_{44} E_{55} + 6 \left(\frac{\partial^5}{\partial y^3 \partial x^2} c4u_{3,0}(x,y) \right) E_{33} E_{55} E_{12} \\
& - 6 \left(\frac{\partial^5}{\partial y^4 \partial x} c4u_{3,0}(x,y) \right) E_{56} E_{22} E_{33} + 6 \left(\frac{\partial^5}{\partial y^4 \partial x} c4u_{3,0}(x,y) \right) E_{24} E_{55} E_{33} \\
& - 18 E_{33} \left(\frac{\partial^5}{\partial y^2 \partial x^3} c4u_{3,0}(x,y) \right) E_{66} E_{24} E_{44} / (E_{33} (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}))
\end{aligned}$$

Wir lassen uns den c2Psi-Anteil ausgeben:

```
> colsum(tt, c2Psi);
```

$$-E_{44} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2Psi(x,y) \right)$$

Dies lässt uns vermuten: Die obige Gleichung "tt" entspricht "-E[44]*diff(Psi_gl2,x)".

Wir testen die Vermutung:

```
> simplify(tt-E[44]*op(1,diff(Psi_gl2,x)));
```

0

"Psi_gl2" war die umgestellte "Psi_gl" mit rechter Seite identisch Null. Somit ist die Probe erfolgreich, da die Gleichung (1,2) aus der "Psi_gl" folgt.

Den gleichen Vorgang wiederholen wir bei Gleichung (1,1):

```
> tt:=algsubs(su_c2u_1_1_Psi,algsubs(su_c2u_2_1_Psi,algsubs(su_
gl23_Psi,algsubs(su_gl12_Psi,algsubs(su_gl11_Psi,
cvar(gls(1,1)
))))):
```

Wir lassen uns wieder den c2Psi-Anteil ausgeben:

```
> colsum(tt, c2Psi);
```

$$E_{44} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2Psi(x,y) \right)$$

Die obige Gleichung "tt" entspricht also vermutlich "-E[44]*diff(Psi_gl2,x)".

Wir testen die Vermutung:

```
> simplify(tt+E[44]*diff(op(1,Psi_gl2),y));
```

0

Somit ist auch diese Probe erfolgreich.

Gleichung c^2*(0,3):

```
> tt:=algsubs(su_c2u_1_1_Psi,algsubs(su_c2u_2_1_Psi,algsubs(su_
c4u_1_3_Psi,algsubs(su_c4u_2_3_Psi,
cvar(truncate(c^2*gl(0,3),4)=c2RS_30(x,y)
))))):
```

[Die Gleichung ist äquivalent zu "nebengl" bzw. "c^2*hauptgl".

> **simplify(tt-nbengl);**

$$0 = 0$$

[Gleichung (0,3) müssen wir nicht testen. Die Hauptdifferentialgleichung wurde ja gerade dadurch definiert, dass wir "su_gl11_Psi" und "su_gl12_Psi" in (3,0) eingesetzt haben.

[Jetzt testen wir die Schnittgrößen: (vgl. S. 63)

Gleichung (5.beta):

Wir betrachten die Schnittgrößen einzeln:

> **m231_Psi;**

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{5}\sqrt{5} h \left(((-2 E_{44} - E_{12}) E_{33} + E_{23} E_{13} + 2 E_{34}^2) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right. \\ & \quad + (-3 E_{14} E_{33} + 3 E_{34} E_{13}) \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + (-E_{33} E_{11} + E_{13}^2) \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) (E_{23} E_{34} - E_{24} E_{33}) - E_{33} E_{44} \left(\frac{\partial}{\partial y} c4Psi(x, y) \right) \right) a^2 / E_{33} \end{aligned}$$

[=O(c^4)

> **m031_Psi;**

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{5} \left(\left((-6 E_{12}^2 - 60 E_{24} E_{14} - 24 E_{44} E_{12} - 24 E_{44}^2 - 6 E_{22} E_{11}) E_{56} \right. \right. \\ & \quad + (24 E_{24} E_{12} + 6 E_{22} E_{14} + 48 E_{44} E_{24}) E_{66} + 6 E_{55} (E_{24} E_{11} + 2 E_{14} E_{12} + 4 E_{44} E_{14}) E_{33}^2 \\ & \quad + \left((24 E_{12} + 48 E_{44}) E_{56} - 30 E_{66} E_{24} - 42 E_{14} E_{55} \right) E_{34}^2 + (8 E_{44} + 4 E_{12}) E_{56}^2 \\ & \quad + (60 E_{14} E_{23} + 60 E_{24} E_{13}) E_{56} + (-6 E_{66} E_{22} - 12 E_{55} (2 E_{44} + E_{12})) E_{13} \\ & \quad - 4 (2 E_{44} + E_{12}) (6 E_{23} + E_{55}) E_{66} - 6 E_{55} E_{11} E_{23} E_{34} + (5 E_{24} E_{13} + 3 E_{14} E_{23}) E_{56}^2 \\ & \quad + (6 E_{22} E_{13}^2 + 12 E_{13} (2 E_{44} + E_{12}) E_{23} + 6 E_{23}^2 E_{11}) E_{56} - 6 E_{55} E_{24} E_{13}^2 \\ & \quad + \left(-5 \left(E_{55} + \frac{24}{5} E_{23} \right) E_{24} E_{66} - 12 E_{55} E_{23} E_{14} \right) E_{13} - 3 E_{66} E_{14} E_{23} (2 E_{23} + E_{55}) \left. \right) E_{33} \\ & \quad - 24 E_{56} E_{34}^4 + \left(-8 E_{56}^2 + 42 E_{55} E_{13} + 8 \left(E_{55} + \frac{15}{4} E_{23} \right) E_{66} \right) E_{34}^3 - 84 E_{56} E_{23} E_{34}^2 E_{13} \\ & \quad + 18 E_{23} E_{13} \left(-\frac{2}{3} E_{56}^2 + E_{55} E_{13} + \frac{2}{3} E_{66} \left(\frac{5}{2} E_{23} + E_{55} \right) \right) E_{34} - 12 E_{56} E_{23}^2 E_{13}^2 \left. \right) \\ & \quad \left(\frac{\partial^5}{\partial y^3 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left((-72 E_{44} E_{14} - 36 E_{14} E_{12} - 24 E_{24} E_{11}) E_{56} \right. \\ & \quad + (24 E_{24} E_{14} + 24 E_{44} E_{12} + 6 E_{12}^2 + 24 E_{44}^2) E_{66} + 6 E_{55} (2 E_{11} E_{44} + E_{11} E_{12} + 6 E_{14}^2) \left. \right) \\ & \quad E_{33}^2 + \left((60 E_{56} E_{14} + (-36 E_{44} - 18 E_{12}) E_{66} - 18 E_{55} E_{11}) E_{34}^2 + \left(10 E_{56}^2 E_{14} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + ((36 E_{12} + 72 E_{44}) E_{13} + 24 E_{11} E_{23}) E_{56} + (-72 E_{14} E_{55} - 24 E_{66} E_{24}) E_{13} \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -10 \left(E_{55} + \frac{12}{5} E_{23} \right) E_{66} E_{14} \Big) E_{34} + ((6 E_{44} + 3 E_{12}) E_{13} + E_{11} E_{23}) E_{56}^2 \\
& + (24 E_{24} E_{13}^2 + 36 E_{23} E_{13} E_{14}) E_{56} - 6 E_{55} (2 E_{44} + E_{12}) E_{13}^2 \\
& + (-3 (2 E_{44} + E_{12}) (E_{55} + 4 E_{23}) E_{66} - 6 E_{55} E_{11} E_{23}) E_{13} - E_{55} E_{66} E_{11} E_{23} \Big) E_{33} \\
& + 12 E_{66} E_{34}^4 - 60 E_{56} E_{34}^3 E_{13} + 54 \left(-\frac{8}{27} E_{56}^2 + E_{55} E_{13} + \frac{8}{27} \left(\frac{21}{8} E_{23} + E_{55} \right) E_{66} \right) E_{13} E_{34}^2 \\
& - 60 E_{56} E_{34} E_{13}^2 E_{23} + 6 E_{23} E_{13}^2 \left(-\frac{2}{3} E_{56}^2 + E_{55} E_{13} + \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} E_{23} + E_{55} \right) E_{66} \right) \Big) \\
& \left(\frac{\partial^5}{\partial y^2 \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left((-12 E_{22} E_{14} - 24 E_{44} E_{24} - 12 E_{24} E_{12}) E_{56} \right. \\
& + (12 E_{22} E_{44} + 6 E_{22} E_{12} + 18 E_{24}^2) E_{66} + 12 E_{55} E_{14} E_{24} \Big) E_{33}^2 + (\\
& (36 E_{24} E_{56} - 6 E_{66} E_{22} - 6 E_{55} (2 E_{44} + E_{12})) E_{34}^2 + (6 E_{56}^2 E_{24} \\
& + (12 E_{13} E_{22} + 12 E_{23} (2 E_{44} + E_{12})) E_{56} - 12 E_{55} E_{24} E_{13} - 6 E_{24} (6 E_{23} + E_{55}) E_{66} \\
& - 12 E_{55} E_{23} E_{14}) E_{34} + (E_{13} E_{22} + E_{23} (2 E_{44} + E_{12})) E_{56}^2 \\
& + (12 E_{23}^2 E_{14} + 12 E_{24} E_{23} E_{13}) E_{56} - E_{66} (E_{13} E_{22} + E_{23} (2 E_{44} + E_{12})) (6 E_{23} + E_{55}) \Big) E_{33} \\
& + 12 E_{55} E_{34}^4 - 36 E_{56} E_{34}^3 E_{23} + 18 E_{23} \left(-\frac{4}{9} E_{56}^2 + E_{55} E_{13} + \frac{4}{9} (3 E_{23} + E_{55}) E_{66} \right) E_{34}^2 \\
& - 24 E_{56} E_{34} E_{13} E_{23}^2 + 2 (-E_{56}^2 + (3 E_{23} + E_{55}) E_{66}) E_{23}^2 E_{13} \Big) \left(\frac{\partial^5}{\partial y^4 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\right. \\
& \left(-30 E_{14}^2 - 12 E_{11} E_{12} - 24 E_{11} E_{44} \right) E_{56} + 30 E_{14} \left(\left(\frac{4}{5} E_{44} + \frac{2}{5} E_{12} \right) E_{66} + E_{55} E_{11} \right) \Big) E_{33}^2 \\
& + \left((18 E_{56} E_{11} - 18 E_{66} E_{14}) E_{34}^2 + \right. \\
& (3 E_{56}^2 E_{11} + 60 E_{56} E_{13} E_{14} + ((-12 E_{12} - 24 E_{44}) E_{66} - 30 E_{55} E_{11}) E_{13} - 3 E_{55} E_{66} E_{11}) \\
& E_{34} - 30 \left(-\frac{7}{30} E_{56}^2 E_{14} + \left(\left(-\frac{2}{5} E_{12} - \frac{4}{5} E_{44} \right) E_{13} - \frac{2}{5} E_{11} E_{23} \right) E_{56} \right. \\
& + \left(E_{55} E_{13} + \frac{7}{30} E_{66} \left(\frac{12}{7} E_{23} + E_{55} \right) \right) E_{14} \Big) E_{13} \Big) E_{33} + 30 \left(\frac{3}{5} E_{66} E_{34}^3 - \frac{8}{5} E_{13} E_{56} E_{34}^2 \right. \\
& + \left. \left(-\frac{1}{3} E_{56}^2 + E_{55} E_{13} + \frac{1}{3} E_{66} \left(\frac{6}{5} E_{23} + E_{55} \right) \right) E_{13} E_{34} - \frac{2}{5} E_{56} E_{13}^2 E_{23} \right) E_{13} \Big) \\
& \left(\frac{\partial^5}{\partial y \partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) + ((6 E_{66} E_{22} E_{24} - 6 E_{24}^2 E_{56}) E_{33}^2 + ((6 E_{22} E_{56} - 6 E_{55} E_{24}) E_{34}^2 \\
& + (E_{56}^2 E_{22} + 12 E_{56} E_{23} E_{24} - E_{22} (6 E_{23} + E_{55}) E_{66}) E_{34} \\
& - E_{23} E_{24} (-E_{56}^2 + E_{66} (6 E_{23} + E_{55}))) E_{33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 E_{23} (3 E_{55} E_{34}^2 - 6 E_{56} E_{34} E_{23} + E_{23} (-E_{56}^2 + (3 E_{23} + E_{55}) E_{66})) E_{34} \\
& \left(\frac{\partial^5}{\partial y^5} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left((6 E_{66} E_{14}^2 - 12 E_{56} E_{14} E_{11} + 6 E_{55} E_{11}^2) E_{33}^2 \right. \\
& - 12 \left((-E_{56} E_{11} + E_{66} E_{14}) E_{34} - \frac{1}{6} E_{56}^2 E_{11} - E_{56} E_{13} E_{14} + E_{11} \left(\frac{1}{6} E_{66} + E_{13} \right) E_{55} \right) E_{13} E_{33} \\
& \left. + 6 E_{66} E_{13}^2 E_{34}^2 - 12 E_{13}^3 E_{34} E_{56} - 2 E_{13}^3 E_{56}^2 + 6 \left(E_{13} + \frac{1}{3} E_{66} \right) E_{13}^3 E_{55} \right) \\
& \left(\frac{\partial^5}{\partial x^5} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\right. \\
& 5 \left((2 E_{44} + E_{12}) E_{33} - 2 E_{34}^2 - E_{23} E_{13} \right) (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c2u_{3,0}(x, y) \right) + 6 E_{44} \left(\right. \\
& (E_{56} E_{14} + (-2 E_{44} - E_{12}) E_{66} + E_{55} E_{11}) E_{33} - E_{13} E_{34} E_{56} + E_{13} E_{66} E_{23} - E_{55} E_{13}^2 \\
& \left. + E_{66} E_{34}^2 \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4Psi(x, y) \right) - 12 \\
& \left(\left(\left(\frac{1}{2} E_{12} + E_{44} \right) E_{56} + \frac{1}{2} E_{66} E_{24} - E_{14} E_{55} \right) E_{33} - \frac{1}{2} E_{13} E_{23} E_{56} + \left(E_{55} E_{13} - \frac{1}{2} E_{66} E_{23} \right) E_{34} \right) \\
& E_{44} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4Psi(x, y) \right) + 5 (E_{33} E_{11} - E_{13}^2) (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c2u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - 5 (E_{23} E_{34} - E_{24} E_{33}) (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c2u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - 15 (-E_{14} E_{33} + E_{34} E_{13}) (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c2u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + 6 ((E_{56} E_{11} - E_{66} E_{14}) E_{33} - E_{56} E_{13}^2 + E_{66} E_{34} E_{13}) E_{44} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4Psi(x, y) \right) \\
& - 6 E_{44} (E_{56} E_{24} E_{33} + E_{55} E_{34}^2 - E_{56} E_{34} E_{23}) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4Psi(x, y) \right) + (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \\
& \left(E_{34} \sqrt{5} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2RS_{32}(x, y) \right) + 5 E_{33} E_{44} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2Psi(x, y) \right) + E_{13} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2RS_{32}(x, y) \right) \sqrt{5} \right) \\
& \left. \right) E_{33} \Big/ \left((-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) E_{33}^2 \right)
\end{aligned}$$

=O(c^2)

> **m232_Psi;**

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{5} \sqrt{5} h a^2 \left(\left((2 E_{44} + E_{12}) E_{33} - 2 E_{34}^2 - E_{23} E_{13} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right. \\
& \left. + (E_{14} E_{33} - E_{34} E_{13}) \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + (E_{22} E_{33} - E_{23}^2) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$+ (3 E_{24} E_{33} - 3 E_{23} E_{34}) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) - E_{33} E_{44} \left(\frac{\partial}{\partial x} c4Psi(x, y) \right) \Big/ E_{33}$$

=O(c^4)

> **m032_Psi;**

$$\begin{aligned} & \left(\left(\left(\left(12 E_{24} E_{14} + \frac{24}{5} E_{44} E_{12} + \frac{24}{5} E_{44}^2 + \frac{6}{5} E_{22} E_{11} + \frac{6}{5} E_{12}^2 \right) E_{56} \right. \right. \right. \\ & + \left. \left. \left. \left(-\frac{24}{5} E_{14} E_{12} - \frac{6}{5} E_{24} E_{11} - \frac{48}{5} E_{44} E_{14} \right) E_{55} - \frac{6}{5} E_{66} (4 E_{44} E_{24} + E_{22} E_{14} + 2 E_{24} E_{12}) \right) \right. \right. \\ & E_{33}^2 + \left(\left(\left(-\frac{24}{5} E_{12} - \frac{48}{5} E_{44} \right) E_{56} + 6 E_{14} E_{55} + \frac{42}{5} E_{66} E_{24} \right) E_{34}^2 + \left(\left(-\frac{8}{5} E_{44} - \frac{4}{5} E_{12} \right) E_{56}^2 \right. \right. \\ & + \left. \left. (-12 E_{24} E_{13} - 12 E_{14} E_{23}) E_{56} + \left(\frac{6}{5} E_{55} E_{11} + \frac{12}{5} E_{66} (2 E_{44} + E_{12}) \right) E_{23} \right. \right. \\ & + \left. \frac{4}{5} (2 E_{44} + E_{12}) (E_{66} + 6 E_{13}) E_{55} + \frac{6}{5} E_{66} E_{13} E_{22} \right) E_{34} + \left(-\frac{3}{5} E_{24} E_{13} - E_{14} E_{23} \right) E_{56}^2 \\ & + \left(-\frac{6}{5} E_{23}^2 E_{11} - \frac{12}{5} E_{13} (2 E_{44} + E_{12}) E_{23} - \frac{6}{5} E_{22} E_{13}^2 \right) E_{56} + \frac{6}{5} E_{66} E_{23}^2 E_{14} \\ & + \left(\left(E_{66} + \frac{24}{5} E_{13} \right) E_{14} E_{55} + \frac{12}{5} E_{66} E_{24} E_{13} \right) E_{23} + \frac{3}{5} E_{55} E_{24} E_{13} (2 E_{13} + E_{66}) \Big) E_{33} \\ & + \frac{24}{5} E_{56} E_{34}^4 + \left(\frac{8}{5} E_{56}^2 - \frac{42}{5} E_{66} E_{23} - \frac{8}{5} \left(E_{66} + \frac{15}{4} E_{13} \right) E_{55} \right) E_{34}^3 + \frac{84}{5} E_{56} E_{23} E_{34}^2 E_{13} \\ & - \frac{12}{5} E_{23} E_{13} \left(-E_{56}^2 + \frac{3}{2} E_{66} E_{23} + E_{55} \left(\frac{5}{2} E_{13} + E_{66} \right) \right) E_{34} + \frac{12}{5} E_{56} E_{23}^2 E_{13}^2 \Big) \\ & \left(\frac{\partial^5}{\partial y^2 \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\left(\left(\left(\frac{24}{5} E_{22} E_{14} + \frac{36}{5} E_{24} E_{12} + \frac{72}{5} E_{44} E_{24} \right) E_{56} \right. \right. \right. \\ & + \left. \left. \left. \left(-\frac{6}{5} E_{12}^2 - \frac{24}{5} E_{44}^2 - \frac{24}{5} E_{24} E_{14} - \frac{24}{5} E_{44} E_{12} \right) E_{55} - \frac{6}{5} E_{66} (E_{22} E_{12} + 2 E_{22} E_{44} + 6 E_{24}^2) \right) \right. \right. \\ & E_{33}^2 + \left(\left(-12 E_{24} E_{56} + \left(\frac{18}{5} E_{12} + \frac{36}{5} E_{44} \right) E_{55} + \frac{18}{5} E_{66} E_{22} \right) E_{34}^2 + \left(-2 E_{56}^2 E_{24} \right. \right. \\ & + \left(\left(-\frac{36}{5} E_{12} - \frac{72}{5} E_{44} \right) E_{23} - \frac{24}{5} E_{13} E_{22} \right) E_{56} + \left(\frac{72}{5} E_{66} E_{24} + \frac{24}{5} E_{14} E_{55} \right) E_{23} \\ & + 2 \left(\frac{12}{5} E_{13} + E_{66} \right) E_{55} E_{24} \Big) E_{34} + \left(\left(-\frac{3}{5} E_{12} - \frac{6}{5} E_{44} \right) E_{23} - \frac{1}{5} E_{13} E_{22} \right) E_{56}^2 \\ & + \left(-\frac{24}{5} E_{23}^2 E_{14} - \frac{36}{5} E_{24} E_{23} E_{13} \right) E_{56} + \frac{6}{5} E_{66} (2 E_{44} + E_{12}) E_{23}^2 \\ & + \left(\frac{3}{5} (2 E_{44} + E_{12}) (E_{66} + 4 E_{13}) E_{55} + \frac{6}{5} E_{66} E_{13} E_{22} \right) E_{23} + \frac{1}{5} E_{55} E_{66} E_{13} E_{22} \Big) E_{33} \\ & - \frac{12}{5} E_{55} E_{34}^4 + 12 E_{56} E_{34}^3 E_{23} - \frac{16}{5} \left(-E_{56}^2 + \frac{27}{8} E_{66} E_{23} + \left(E_{66} + \frac{21}{8} E_{13} \right) E_{55} \right) E_{23} E_{34}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 12 E_{56} E_{34} E_{13} E_{23}^2 - \frac{4}{5} E_{23}^2 \left(-E_{56}^2 + \frac{3}{2} E_{66} E_{23} + \left(\frac{3}{2} E_{13} + E_{66} \right) E_{55} \right) E_{13} \\
& \left(\frac{\partial^5}{\partial y^3 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\left(\left(\frac{24}{5} E_{44} E_{14} + \frac{12}{5} E_{24} E_{11} + \frac{12}{5} E_{14} E_{12} \right) E_{56} \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(-\frac{6}{5} E_{11} E_{12} - \frac{12}{5} E_{11} E_{44} - \frac{18}{5} E_{14}^2 \right) E_{55} - \frac{12}{5} E_{66} E_{24} E_{14} \right) E_{33}^2 + \left(\right. \right. \\
& \left. \left. -\frac{36}{5} E_{56} E_{14} + \frac{6}{5} E_{55} E_{11} + \frac{6}{5} E_{66} (2 E_{44} + E_{12}) \right) E_{34}^2 + \left(-\frac{6}{5} E_{56}^2 E_{14} \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(-\frac{12}{5} E_{11} E_{23} - \frac{12}{5} E_{13} (2 E_{44} + E_{12}) \right) E_{56} + \frac{12}{5} E_{66} E_{14} E_{23} + \frac{6}{5} E_{14} (E_{66} + 6 E_{13}) E_{55} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{12}{5} E_{66} E_{24} E_{13} \right) E_{34} + \left(-\frac{1}{5} E_{11} E_{23} - \frac{1}{5} E_{13} (2 E_{44} + E_{12}) \right) E_{56}^2 \right. \\
& \left. + \left(-\frac{12}{5} E_{23} E_{13} E_{14} - \frac{12}{5} E_{24} E_{13}^2 \right) E_{56} + \frac{1}{5} E_{55} (E_{66} + 6 E_{13}) (E_{13} (2 E_{44} + E_{12}) + E_{11} E_{23}) \right) \\
& E_{33} - \frac{12}{5} E_{66} E_{34}^4 + \frac{36}{5} E_{56} E_{34}^3 E_{13} - \frac{8}{5} \left(-E_{56}^2 + \frac{9}{4} E_{66} E_{23} + E_{55} (3 E_{13} + E_{66}) \right) E_{13} E_{34}^2 \\
& + \frac{24}{5} E_{56} E_{34} E_{13}^2 E_{23} - \frac{2}{5} (-E_{56}^2 + E_{55} (3 E_{13} + E_{66})) E_{13}^2 E_{23} \left(\frac{\partial^5}{\partial y \partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\right. \\
& \left(\left(\frac{24}{5} E_{22} E_{44} + \frac{12}{5} E_{22} E_{12} + 6 E_{24}^2 \right) E_{56} - \frac{12}{5} \left(E_{55} (2 E_{44} + E_{12}) + \frac{5}{2} E_{66} E_{22} \right) E_{24} \right) E_{33}^2 + \left(\right. \\
& \left. -\frac{18}{5} E_{22} E_{56} + \frac{18}{5} E_{55} E_{24} \right) E_{34}^2 + \\
& \left(-\frac{3}{5} E_{56}^2 E_{22} - 12 E_{56} E_{23} E_{24} + \left(\left(\frac{24}{5} E_{44} + \frac{12}{5} E_{12} \right) E_{55} + 6 E_{66} E_{22} \right) E_{23} + \frac{3}{5} E_{55} E_{66} E_{22} \right) \\
& E_{34} + \frac{7}{5} E_{23} \left(-E_{56}^2 E_{24} + \left(\left(-\frac{24}{7} E_{44} - \frac{12}{7} E_{12} \right) E_{23} - \frac{12}{7} E_{13} E_{22} \right) E_{56} \right. \\
& \left. + E_{24} \left(\frac{30}{7} E_{66} E_{23} + E_{55} \left(E_{66} + \frac{12}{7} E_{13} \right) \right) \right) E_{33} - 2 \left(\frac{9}{5} E_{55} E_{34}^3 - \frac{24}{5} E_{23} E_{56} E_{34}^2 \right. \\
& \left. + \left(-E_{56}^2 + 3 E_{66} E_{23} + E_{55} \left(\frac{6}{5} E_{13} + E_{66} \right) \right) E_{23} E_{34} - \frac{6}{5} E_{56} E_{13} E_{23}^2 \right) E_{23} \\
& \left(\frac{\partial^5}{\partial y^4 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\left(-\frac{6}{5} E_{55} E_{14} E_{11} + \frac{6}{5} E_{14}^2 E_{56} \right) E_{33}^2 + \left(\left(\frac{6}{5} E_{66} E_{14} - \frac{6}{5} E_{56} E_{11} \right) E_{34}^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(-\frac{1}{5} E_{56}^2 E_{11} - \frac{12}{5} E_{56} E_{13} E_{14} + \frac{1}{5} E_{11} (E_{66} + 6 E_{13}) E_{55} \right) E_{34} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{5} (-E_{56}^2 + E_{55} (E_{66} + 6 E_{13})) E_{14} E_{13} \right) E_{33} \right. \\
& \left. - \frac{2}{5} (3 E_{66} E_{34}^2 - 6 E_{13} E_{34} E_{56} + (-E_{56}^2 + E_{55} (3 E_{13} + E_{66})) E_{13}) E_{34} E_{13} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial^5}{\partial x^5} c4u_{3,0}(x, y) \right) + \left(\left(-\frac{6}{5} E_{55} E_{24}^2 + \frac{12}{5} E_{56} E_{24} E_{22} - \frac{6}{5} E_{66} E_{22}^2 \right) E_{33}^2 \right. \\
& + \frac{2}{5} E_{23} \left((6 E_{55} E_{24} - 6 E_{22} E_{56}) E_{34} - E_{56}^2 E_{22} - 6 E_{56} E_{23} E_{24} + E_{22} (6 E_{23} + E_{55}) E_{66} \right) E_{33} \\
& \left. - \frac{2}{5} E_{23}^2 (3 E_{55} E_{34}^2 - 6 E_{56} E_{34} E_{23} + E_{23} (-E_{56}^2 + (3 E_{23} + E_{55}) E_{66})) \right) \left(\frac{\partial^5}{\partial y^5} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + E_{33} \left((-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) ((-2 E_{44} - E_{12}) E_{33} + E_{23} E_{13} + 2 E_{34}^2) \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c2u_{3,0}(x, y) \right) + \frac{6}{5} \right. \\
& \left((E_{24} E_{56} + (-2 E_{44} - E_{12}) E_{55} + E_{66} E_{22}) E_{33} + E_{55} E_{34}^2 - E_{66} E_{23}^2 - E_{56} E_{34} E_{23} \right. \\
& \left. + E_{55} E_{13} E_{23} \right) E_{44} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4Psi(x, y) \right) - \frac{6}{5} \\
& \left((2 E_{44} + E_{12}) E_{56} - 2 E_{66} E_{24} + E_{14} E_{55} \right) E_{33} + (-E_{55} E_{13} + 2 E_{66} E_{23}) E_{34} - E_{13} E_{23} E_{56} \\
& E_{44} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4Psi(x, y) \right) - (E_{14} E_{33} - E_{34} E_{13}) (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c2u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + 3 (E_{23} E_{34} - E_{24} E_{33}) (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c2u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - (E_{22} E_{33} - E_{23}^2) (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c2u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + \frac{6}{5} ((E_{22} E_{56} - E_{55} E_{24}) E_{33} + E_{23} E_{34} E_{55} - E_{56} E_{23}^2) E_{44} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4Psi(x, y) \right) \\
& - \frac{6}{5} E_{44} (E_{56} E_{14} E_{33} + E_{66} E_{34}^2 - E_{13} E_{34} E_{56}) \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4Psi(x, y) \right) + \left(\right. \\
& E_{33} E_{44} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2Psi(x, y) \right) - \frac{1}{5} \sqrt{5} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2RS_{32}(x, y) \right) E_{34} - \frac{1}{5} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2RS_{32}(x, y) \right) E_{23} \sqrt{5} \\
& \left. \left. \right) (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \right) h / ((-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) E_{33}^2)
\end{aligned}$$

[=O(c^2)

[=> sqrt(5)/a^2*c^2*m23beta+c^4*m03beta=0+O(c^6) (siehe (5,beta))

[Gleichung (4,3):

> **m133_Psi;**

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{5} \left(-4 E_{34}^2 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) - \sqrt{5} c2RS_{32}(x, y) E_{33} \right. \\
& - 4 E_{34} E_{13} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 2 E_{12} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& \left. + E_{11} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} + 4 E_{14} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4 E_{24} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} - 2 E_{13} E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - E_{23}^2 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) + 4 E_{44} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} + E_{22} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{33} \\
& - 4 E_{34} E_{23} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) - E_{13}^2 \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} c4u_{3,0}(x, y) \right) \Big) h a / E_{33}
\end{aligned}$$

=> $c^2 * m133 = 0 + O(c^6)$ (siehe (4,3))

Gleichung (3,beta):

beta=1:

Zunächst betrachten wir den Anteil mit "m031":

> **tt:=truncate(c^2*invvar(m031_Psi), 4);**

$$\begin{aligned}
tt := & -\frac{1}{5} \left((-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \right. \\
& \left(E_{34} \sqrt{5} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2RS_{32}(x, y) \right) + 5 E_{33} E_{44} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2Psi(x, y) \right) + E_{13} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2RS_{32}(x, y) \right) \sqrt{5} \right) \\
& + 6 E_{44} ((E_{56} E_{14} + (-2 E_{44} - E_{12}) E_{66} + E_{55} E_{11}) E_{33} - E_{13} E_{34} E_{56} + E_{13} E_{66} E_{23} - E_{55} E_{13}^2 \\
& + E_{66} E_{34}^2) \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4Psi(x, y) \right) - 12 \\
& \left(\left(\left(\frac{1}{2} E_{12} + E_{44} \right) E_{56} + \frac{1}{2} E_{66} E_{24} - E_{14} E_{55} \right) E_{33} - \frac{1}{2} E_{13} E_{23} E_{56} + \left(E_{55} E_{13} - \frac{1}{2} E_{66} E_{23} \right) E_{34} \right) \\
& E_{44} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4Psi(x, y) \right) - 6 E_{44} (E_{56} E_{24} E_{33} + E_{55} E_{34}^2 - E_{56} E_{34} E_{23}) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4Psi(x, y) \right) \\
& + 6 ((E_{56} E_{11} - E_{66} E_{14}) E_{33} - E_{56} E_{13}^2 + E_{66} E_{34} E_{13}) E_{44} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4Psi(x, y) \right) \Big) h c^2 / (E_{33} \\
& (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66})) - \frac{1}{5} \left(\right. \\
& 5 ((2 E_{44} + E_{12}) E_{33} - 2 E_{34}^2 - E_{23} E_{13}) (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - 15 (-E_{14} E_{33} + E_{34} E_{13}) (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} u_{3,0}(x, y) \right) \\
& + 5 (E_{33} E_{11} - E_{13}^2) (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} u_{3,0}(x, y) \right) \\
& \left. - 5 (E_{23} E_{34} - E_{24} E_{33}) (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} u_{3,0}(x, y) \right) \right) h c^4 / (E_{33} (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}))
\end{aligned}$$

Wir isolieren nacheinander alle Terme, die wir vernachlässigen können:

> **colsum(tt, c2Psi);**

$$-h c^2 E_{44} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2Psi(x, y) \right)$$

[=O(c^6)

> **colsum(tt, c2RS_32);**

$$\frac{1}{5} \frac{\left(E_{13} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2RS_32(x, y) \right) + E_{34} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2RS_32(x, y) \right) \right) h c^2 \sqrt{5}}{E_{33}}$$

[=O(c^6)

> **colsum(tt, c4Psi);**

$$\begin{aligned} & -\frac{6}{5} h c^2 E_{44} \left(-\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4Psi(x, y) \right) E_{56} E_{13}^2 - 2 E_{33} E_{44} E_{56} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4Psi(x, y) \right) \right. \\ & + \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4Psi(x, y) \right) E_{56} E_{14} E_{33} - \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4Psi(x, y) \right) E_{66} E_{12} E_{33} \\ & + \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4Psi(x, y) \right) E_{11} E_{55} E_{33} - 2 E_{33} E_{44} E_{66} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4Psi(x, y) \right) \\ & - \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4Psi(x, y) \right) E_{55} E_{13}^2 + \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4Psi(x, y) \right) E_{66} E_{34}^2 \\ & - \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4Psi(x, y) \right) E_{13} E_{34} E_{56} + \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4Psi(x, y) \right) E_{13} E_{66} E_{23} \\ & - \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4Psi(x, y) \right) E_{12} E_{56} E_{33} - \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4Psi(x, y) \right) E_{66} E_{24} E_{33} \\ & + 2 \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4Psi(x, y) \right) E_{14} E_{55} E_{33} + \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4Psi(x, y) \right) E_{13} E_{23} E_{56} \\ & - 2 \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4Psi(x, y) \right) E_{34} E_{13} E_{55} + \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4Psi(x, y) \right) E_{66} E_{34} E_{23} \\ & - \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4Psi(x, y) \right) E_{56} E_{24} E_{33} + \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4Psi(x, y) \right) E_{11} E_{56} E_{33} \\ & - \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4Psi(x, y) \right) E_{14} E_{66} E_{33} + \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4Psi(x, y) \right) E_{56} E_{34} E_{23} \\ & \left. - \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4Psi(x, y) \right) E_{55} E_{34}^2 + \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4Psi(x, y) \right) E_{66} E_{34} E_{13} \right) / (E_{33} (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66})) \end{aligned}$$

[=O(c^6)

Die c^6-Terme werden hier nicht automatisch von "truncate" eliminiert, da sie eine Mischung aus c-Variablen und c-Potenzen sind. Also isolieren wir durch den "colsum" Befehl die verbleibenden Terme, die alle u[3,0] enthalten:

> **tt:=cvar(colsum(truncate(c^2*invcvar(m031_Psi), 4), u[3,0]));**

$$\begin{aligned}
tt := & \frac{h \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{13}^2}{E_{33}} + \frac{h \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{23} E_{34}}{E_{33}} - h \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{24} \\
& + \frac{h \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{23} E_{13}}{E_{33}} - 2 h \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{44} \\
& - h \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{12} + \frac{2 h \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{34}^2}{E_{33}} \\
& - 3 h \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{14} + \frac{3 h \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{34} E_{13}}{E_{33}} \\
& - h \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{11}
\end{aligned}$$

[Es gilt: "tt" ist gleich "m031_Psi"+O(c^6).

[Überprüfen von Gleichung (3,1):

[> **simplify(tt+sqrt(5)*m231_Psi/a^2);**

$$h E_{44} \left(\frac{\partial}{\partial y} c4Psi(x, y) \right)$$

[=O(c^6). Somit ist die Probe erfolgreich.

[beta=2:

[Zunächst betrachten wir den Anteil mit "m032":

[> **tt:=truncate(c^2*invvar(m032_Psi), 4);**

$$\begin{aligned}
tt := & \left(\left(E_{33} E_{44} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2Psi(x, y) \right) - \frac{1}{5} \sqrt{5} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2RS_{32}(x, y) \right) E_{34} - \frac{1}{5} \left(\frac{\partial}{\partial y} c2RS_{32}(x, y) \right) E_{23} \sqrt{5} \right) \right. \\
& \left. (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) + \frac{6}{5} ((E_{24} E_{56} + (-2 E_{44} - E_{12}) E_{55} + E_{66} E_{22}) E_{33} + E_{55} E_{34}^2 - E_{66} E_{23}^2 \right. \\
& \left. - E_{56} E_{34} E_{23} + E_{55} E_{13} E_{23}) E_{44} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4Psi(x, y) \right) - \frac{6}{5} \right. \\
& \left. (((2 E_{44} + E_{12}) E_{56} - 2 E_{66} E_{24} + E_{14} E_{55}) E_{33} + (-E_{55} E_{13} + 2 E_{66} E_{23}) E_{34} - E_{13} E_{23} E_{56}) \right. \\
& \left. E_{44} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4Psi(x, y) \right) - \frac{6}{5} E_{44} (E_{56} E_{14} E_{33} + E_{66} E_{34}^2 - E_{13} E_{34} E_{56}) \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4Psi(x, y) \right) \right. \\
& \left. + \frac{6}{5} ((E_{22} E_{56} - E_{55} E_{24}) E_{33} + E_{23} E_{34} E_{55} - E_{56} E_{23}^2) E_{44} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4Psi(x, y) \right) \right) h c^2 / (E_{33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66})) + \left(\right. \\
& (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) ((-2 E_{44} - E_{12}) E_{33} + E_{23} E_{13} + 2 E_{34}^2) \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - (E_{22} E_{33} - E_{23}^2) (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} u_{3,0}(x, y) \right) \\
& - (E_{14} E_{33} - E_{34} E_{13}) (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} u_{3,0}(x, y) \right) \\
& \left. + 3 (E_{23} E_{34} - E_{24} E_{33}) (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} u_{3,0}(x, y) \right) \right) h c^4 / (E_{33} \\
& (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}))
\end{aligned}$$

Wir isolieren nacheinander alle Terme, die wir vernachlässigen können:

> **colsum(tt, c2Psi(x, y));**

$$h c^2 E_{44} \left(\frac{\partial}{\partial x} c2Psi(x, y) \right)$$

=O(c^6)

> **colsum(tt, c2RS_32);**

$$\frac{1}{5} \frac{\left(\left(\frac{\partial}{\partial x} c2RS_32(x, y) \right) E_{34} + \left(\frac{\partial}{\partial y} c2RS_32(x, y) \right) E_{23} \right) h c^2 \sqrt{5}}{E_{33}}$$

=O(c^6)

> **colsum(tt, c4Psi);**

$$\begin{aligned}
& -\frac{6}{5} h c^2 E_{44} \left(-\left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4Psi(x, y) \right) E_{55} E_{34}^2 - \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4Psi(x, y) \right) E_{56} E_{24} E_{33} \right. \\
& + \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4Psi(x, y) \right) E_{55} E_{12} E_{33} - \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4Psi(x, y) \right) E_{66} E_{22} E_{33} \\
& + \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4Psi(x, y) \right) E_{56} E_{34} E_{23} - \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4Psi(x, y) \right) E_{55} E_{13} E_{23} \\
& + \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4Psi(x, y) \right) E_{12} E_{56} E_{33} - 2 \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4Psi(x, y) \right) E_{66} E_{24} E_{33} \\
& + \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4Psi(x, y) \right) E_{56} E_{23}^2 + \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4Psi(x, y) \right) E_{66} E_{34}^2 \\
& + 2 E_{33} E_{44} E_{56} \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4Psi(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4Psi(x, y) \right) E_{66} E_{23}^2 \\
& \left. + 2 E_{33} E_{44} E_{55} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4Psi(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4Psi(x, y) \right) E_{14} E_{55} E_{33} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4Psi(x, y) \right) E_{34} E_{13} E_{55} + 2 \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4Psi(x, y) \right) E_{66} E_{34} E_{23} \\
& - \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4Psi(x, y) \right) E_{13} E_{23} E_{56} + \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4Psi(x, y) \right) E_{56} E_{14} E_{33} \\
& - \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4Psi(x, y) \right) E_{13} E_{34} E_{56} + \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4Psi(x, y) \right) E_{24} E_{55} E_{33} \\
& - \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4Psi(x, y) \right) E_{56} E_{22} E_{33} - \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4Psi(x, y) \right) E_{23} E_{34} E_{55} \Big/ (E_{33} \\
& (-E_{56}^2 + E_{55} E_{66}))
\end{aligned}$$

[=O(c^6)

[Wir isolieren durch den "colsum" Befehl die verbleibenden Terme, die alle u[3,0] enthalten:

[> **tt:=cvar(colsum(truncate(c^2*invcvar(m032), 4), u[3, 0]));**

$$\begin{aligned}
tt := & \frac{3 h \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{23} E_{34}}{E_{33}} - 3 h \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{24} \\
& - h \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{22} + \frac{h \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{23}^2}{E_{33}} - h \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{12} \\
& - 2 h \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{44} + \frac{2 h \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{34}^2}{E_{33}} \\
& + \frac{h \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{23} E_{13}}{E_{33}} - h \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{14} \\
& + \frac{h \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) E_{34} E_{13}}{E_{33}}
\end{aligned}$$

[Es gilt: "tt" ist gleich "m031_Psi"+O(c^6).

[Überprüfen von Gleichung (3,1):

[> **simplify(tt+sqrt(5)*m232_Psi/a^2);**

$$-h E_{44} \left(\frac{\partial}{\partial x} c4Psi(x, y) \right)$$

[=O(c^6). Also ist auch diese Probe erfolgreich.

[=> sqrt(5)/a^2*m23beta+c^2*m03beta=0+O(c^6) (siehe (3,beta))

[Gleichung (2,3):

[Wir betrachten die Summanden einzeln:

[> **tt1:=simplify(algsub(simplify(1/a^2/h*(diff(m231_Psi, x)+diff(m232_Psi, y))))), size);**

$$tt1 := -\frac{1}{5}\sqrt{5} c2RS_{30}(x, y)$$

> `tt2:=simplify(algsub(su_c2u_2_1_Psi,algsubs(su_c2u_1_1_Psi,algsubs(su_gl23_Psi,cvar(ml(1,3,3))))))`;

$$tt2 := -\frac{1}{5}(c2RS_{30}(x, y) + \sqrt{5} c2RS_{32}(x, y)) h a$$

Das ergibt für die Summe:

> `simplify(-h*tt1+sqrt(5)/a*tt2)`;

$$-h c2RS_{32}(x, y)$$

=> $-1/a^2 * m23\alpha, \alpha + \sqrt{5}/a * m133 = -h * c2RS_{32} + O(c^6) = a * c^2 * P^2_{3} + O(c^6)$

(siehe (2,3))

Gleichung (1,beta):

beta=1:

> `simplify(-1/a*(diff(m111_Psi,x)+diff(m112_Psi,y))+m031_Psi-h*E[44]*diff(op(1,Psi_gl2),y))`;

$$0$$

beta=2:

> `simplify(-1/a*(diff(m112_Psi,x)+diff(m122_Psi,y))+m032_Psi+h*E[44]*diff(op(1,Psi_gl2),x))`;

$$0$$

=> $1/a * m1\beta \alpha, \alpha + m03\beta = 0 + O(c^6)$ (siehe (1,beta))

Gleichung (0,3):

> `tt:=simplify(-1/h*(diff(m031_Psi,x)+diff(m032_Psi,y))=-RS_30(x,y))`;

Die Gleichung "tt" ist die negative "hauptgl_Psi":

> `simplify(tt+hauptgl_Psi)`;

$$0 = 0$$

=> $-m03\alpha, \alpha = aP^0_3$ (siehe (0,3))

- 13 Vergleich eines isotropen und eines orthotropen

Materials

In diesem Abschnitt wollen wir die Koeffizienten der Differentialgleichungen "hauptgl" und "Psi_gl" für zwei Materialien, ein orthotropes und ein isotropes, miteinander vergleichen. Für Details siehe Kapitel 9 der Diplomarbeit.

> `restart`;

Zunächst stellen wir die Elastizitätsmatrix für den orthotropen Textilbeton auf. Durch die Eingabe von Brüchen bei den Querkontraktionszahlen (nu) berechnet Maple später die Koeffizienten symbolisch. Würden wir stattdessen Gleitpunktzahlen (z.B. nu[12]=0.22) angeben, so würde Maple in Rundungsfehlerbehafteter Gleitpunktarithmetik rechnen.

> `E[1]:=28858:`

`E[2]:=19242:`

`E[3]:=27390:`

`G[12]:=11786:`

`G[13]:=11972:`

```

G[23] := 11714:
nu[12] := 22/100:
nu[23] := 12/100:
nu[31] := 18/100:
> nu[21] := nu[12]*E[2]/E[1];
nu[32] := nu[23]*E[3]/E[2];
nu[13] := nu[31]*E[1]/E[3];
Diam := 1 - nu[12]*nu[21] - nu[23]*nu[32] - nu[13]*nu[31] - 2*nu[21]*nu[13]*nu[32];

```

$$v_{21} := \frac{105831}{721450}$$

$$v_{32} := \frac{913}{5345}$$

$$v_{13} := \frac{43287}{228250}$$

$$Diam := \frac{397654539350569}{440083147281250}$$

```

> ET2_orth := array(1..6, 1..6, [
  [(1 - nu[23]*nu[32])*E[1]/Diam, (nu[12] + nu[13]*nu[31])*E[1]/Diam,
  (nu[13] + nu[12]*nu[21])*E[1]/Diam, 0, 0, 0],
  [(nu[12] + nu[13]*nu[31])*E[1]/Diam, (1 - nu[31]*nu[13])*E[2]/Diam,
  (nu[23] + nu[13]*nu[31])*E[1]/Diam, 0, 0, 0],
  [(nu[13] + nu[12]*nu[21])*E[1]/Diam, (nu[23] + nu[13]*nu[31])*E[1]/Diam,
  (1 - nu[21]*nu[12])*E[3]/Diam, 0, 0, 0],
  [0, 0, 0, G[12], 0, 0],
  [0, 0, 0, 0, G[23], 0],
  [0, 0, 0, 0, 0, G[13]]
]);

```

ET2_orth :=

$$\begin{bmatrix} \frac{12439600815691819000}{397654539350569} & \frac{3227513298530935285}{397654539350569} & \frac{2818360714780794075}{397654539350569} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3227513298530935285}{397654539350569} & \frac{8179009166034633285}{397654539350569} & \frac{1957521352106704035}{397654539350569} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2818360714780794075}{397654539350569} & \frac{1957521352106704035}{397654539350569} & \frac{11664871571473762125}{397654539350569} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11786 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11714 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11972 \end{bmatrix}$$

Diese Matrix sollte s.p.d. sein. Wir überprüfen dies zunächst durch Berechnung der Eigenwerte.

```

> with(LinearAlgebra):
ev := Eigenvalues(convert(ET2_orth, Matrix));

```

ev :=

[11714]

[11786]

[11972]

$$\left[5 (3926959740859332083558186089154409418454724300344501150 + 282 I 2502681 \backslash 403678211144842713810660237773752261208482275027830904443182959969025153 \backslash 41766801814221773438134793^{(1/2)})^{(1/3)} / 1192963618051707 + 16405541764523352283019333156584508090 / (1192963618051707 (3926959740859332083558186089154409418454724300344501150 + 282 I 25026814036782111448427138106602377737522612084822750278309044431829599690251534176 \backslash 6801814221773438134793^{(1/2)})^{(1/3)}) + \frac{32283481553200214410}{1192963618051707} \right]$$

$$\left[-5 (3926959740859332083558186089154409418454724300344501150 + 282 I 2502681 \backslash 140367821114484271381066023777375226120848227502783090444318295996902515 \backslash 341766801814221773438134793^{(1/2)})^{(1/3)} / 2385927236103414 - 8202770882261676141509666578292254045 / (1192963618051707 (3926959740859332083558186089154409418454724300344501150 + 282 I 25026814036782111448427138106602377737522612084822750278309044431829599690251534176 \backslash 6801814221773438134793^{(1/2)})^{(1/3)}) + \frac{32283481553200214410}{1192963618051707} + \frac{5}{795309078701138} I \sqrt{3} ((3926959740859332083558186089154409418454724300344501150 + 282 I 2502681 \backslash 140367821114484271381066023777375226120848227502783090444318295996902515 \backslash 341766801814221773438134793^{(1/2)})^{(1/3)} / 3 - 3281108352904670456603866631316901618 / (3 (3926959740859332083558186089154409418454724300344501150 + 282 I 25026814036782111448427138106602377737522612084822750278309044431829599690251534176 \backslash 6801814221773438134793^{(1/2)})^{(1/3)})) \right]$$

$$\left[-5 (3926959740859332083558186089154409418454724300344501150 + 282 I 2502681 \backslash 140367821114484271381066023777375226120848227502783090444318295996902515 \backslash 341766801814221773438134793^{(1/2)})^{(1/3)} / 2385927236103414 - 8202770882261676141509666578292254045 / (1192963618051707 (3926959740859332083558186089154409418454724300344501150 + 282 I 25026814036782111448427138106602377737522612084822750278309044431829599690251534176 \backslash 6801814221773438134793^{(1/2)})^{(1/3)}) + \frac{32283481553200214410}{1192963618051707} - \frac{5}{795309078701138} I \right]$$

$$\sqrt{3} \left((3926959740859332083558186089154409418454724300344501150 + 282 I 250268140367821114484271381066023777375226120848227502783090444318295996902515 \backslash 341766801814221773438134793^{(1/2)})^{(1/3)} / 3 - 3281108352904670456603866631316901618 / (3 (3926959740859332083558186089154409418454724300344501150 + 282 I 25026814036782111448427138106602377737522612084822750278309044431829599690251534176 \backslash 6801814221773438134793^{(1/2)})^{(1/3)}) \right)$$

Es sind imaginäre Anteile entstanden. Um diese gegen die reellen Anteile abschätzen zu können, lassen wir Maple die exakten Eigenwerte als Gleitpunktzahlen darstellen.

> **evalf(ev);**

$$\begin{bmatrix} 11714. \\ 11786. \\ 11972. \\ 41641.48498 - 0.000019 I \\ 16099.74709 - 0.00004217908883 I \\ 23443.51085 + 0.00006017908883 I \end{bmatrix}$$

Da alle Realteile positiv sind und die Imaginäranteile sehr klein sind, kann die Matrix in guter Näherung als s.p.d. angesehen werden, auch wenn sie es streng mathematisch betrachtet nicht ist. Die Imaginäranteile sind wohl auf Rundungsfehler in Matheas (2006) zurückzuführen.

Nun die Elastizitätsmatrix für den unverstärkten Feinbeton:

```
> E_iso:=25000:
nu_iso:=2/10:
E11:=(1-nu_iso)*E_iso/(1+nu_iso)/(1-2*nu_iso):
E12:=nu_iso*E_iso/(1+nu_iso)/(1-2*nu_iso):
ET2_iso:=array(1..6,1..6, [
[E11,E12,E12,0,0,0],
[E12,E11,E12,0,0,0],
[E12,E12,E11,0,0,0],
[0,0,0,simplify(1/2*(E11-E12)),0,0],
[0,0,0,0,simplify(1/2*(E11-E12)),0],
[0,0,0,0,0,simplify(1/2*(E11-E12))]
]);
```

$$ET2_iso := \begin{bmatrix} \frac{250000}{9} & \frac{62500}{9} & \frac{62500}{9} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{62500}{9} & \frac{250000}{9} & \frac{62500}{9} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{62500}{9} & \frac{62500}{9} & \frac{250000}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{31250}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{31250}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{31250}{3} \end{bmatrix}$$

Wieder überprüfen wir, ob die Matrix s.p.d. ist, durch Berechnung der Eigenwerte:

> **Eigenvalues (convert (ET2_iso, Matrix));**

$$\begin{bmatrix} 125000 \\ 3 \\ \frac{62500}{3} \\ 3 \\ \frac{62500}{3} \\ 3 \\ \frac{31250}{3} \\ 3 \\ \frac{31250}{3} \\ 3 \\ \frac{31250}{3} \\ 3 \end{bmatrix}$$

Die Elastizitätsmatrix ist tatsächlich s.p.d..

Und schließlich stellen wir noch die Elastizitätsmatrix für den homogenisierten Textilbeton auf:

```
> E_iso := (E[1]+E[2]+E[3])/3;
nu_iso := (nu[12]+nu[23]+nu[31])/3;
E11 := (1-nu_iso)*E_iso/(1+nu_iso)/(1-2*nu_iso);
E12 := nu_iso*E_iso/(1+nu_iso)/(1-2*nu_iso);
ET2_iso_2 := array(1..6, 1..6, [
[E11, E12, E12, 0, 0, 0],
[E12, E11, E12, 0, 0, 0],
[E12, E12, E11, 0, 0, 0],
[0, 0, 0, simplify(1/2*(E11-E12)), 0, 0],
[0, 0, 0, 0, simplify(1/2*(E11-E12)), 0],
[0, 0, 0, 0, 0, simplify(1/2*(E11-E12))]
]);
```

$$E_iso := \frac{75490}{3}$$

$$\begin{aligned}
 & \nu_{iso} := \frac{13}{75} \\
 ET2_{iso_2} := & \begin{bmatrix}
 \frac{29252375}{1078} & \frac{12267125}{2156} & \frac{12267125}{2156} & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{12267125}{2156} & \frac{29252375}{1078} & \frac{12267125}{2156} & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{12267125}{2156} & \frac{12267125}{2156} & \frac{29252375}{1078} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{943625}{88} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{943625}{88} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{943625}{88}
 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Auch hier überprüfen wir, ob die Matrix s.p.d. ist, durch Berechnung der Eigenwerte:

> **Eigenvalues (convert (ET2_iso_2, Matrix));**

$$\begin{bmatrix}
 1887250 \\
 49 \\
 \frac{943625}{44} \\
 \frac{943625}{44} \\
 44 \\
 \frac{943625}{88} \\
 88 \\
 \frac{943625}{88} \\
 88 \\
 \frac{943625}{88} \\
 88
 \end{bmatrix}$$

Die Elastizitätsmatrix ist spd.

Durch den "restart" am Anfang dieses Abschnittes müssen wir wieder einige Hilfsroutinen laden, die aber bereits alle bekannt sind.

```

> diffit:=proc (t, n)
  local out;
  if (n=1) then
    out:=diff (t, x);
  else if (n=2) then
    out:=diff (t, y);
  else if (n=3) then
    out:=diff (t, z);
  else
    ERROR ("invalid input");
  fi; fi; fi;
  return out;

```

```

end proc:
> levi:= proc(i,j,k)
    return -1/2*(j-i)*(k-j)*(i-k);
end proc:
> kron:= proc(i,j)
    if (i=j) then return 1;
    else return 0;
    fi;
end proc:

```

Nun stellen wir die Differentialgleichungen auf. Einkommentieren der entsprechenden Zeilen in diesem Abschnitt liefert letztlich die Differentialgleichung für das entsprechende Materialgesetz.

```

> #ET2:=ET2_iso:
> ET2:=ET2_iso_2:
> #ET2:=ET2_orth:
> for i from 1 to 3 do
    for j from 1 to 3 do
        for k from 1 to 3 do
            for l from 1 to 3 do
                if (i=j) then
                    r:=i;
                elif ((i=1 and j=2) or (i=2 and j=1)) then
                    r:=4;
                elif ((i=2 and j=3) or (i=3 and j=2)) then
                    r:=5;
                elif ((i=1 and j=3) or (i=3 and j=1)) then
                    r:=6;
                fi;
                if (k=1) then
                    ET4[i,j,k,l]:= ET2[r,k];
                elif ((k=1 and l=2) or (k=2 and l=1)) then
                    ET4[i,j,k,l]:= ET2[r,4];
                elif ((k=2 and l=3) or (k=3 and l=2)) then
                    ET4[i,j,k,l]:= ET2[r,5];
                elif ((k=1 and l=3) or (k=3 and l=1)) then
                    ET4[i,j,k,l]:= ET2[r,6];
                fi;
            od;
        od;
    od;
od;
unassign('i','j','k','l','r');

```

Zunächst stellen wir "hauptgl_Psi" auf. Die folgenden Befehle wurden alle aus A(10) übernommen.

```

> T:=0:
    T_Psi:=0:

```

```

for alpha    from 1 to 2 do
for beta     from 1 to 2 do
for Gamma    from 1 to 2 do
for delta    from 1 to 2 do

T:=T+5*c^2*ET4[3,3,3,3]*(ET4[2,3,2,3]*ET4[1,3,1,3]-ET4[2,3,1,3]^2)

*(ET4[alpha,beta,Gamma,delta]*ET4[3,3,3,3]-ET4[alpha,beta,3,3]*ET4[Gamma,delta,3,3])

*diffit(diffit(diffit(diffit(w(x,y,z),alpha),beta),Gamma),delta);
  for epsilon from 1 to 2 do
  for zeta     from 1 to 2 do

T:=T+5*c^2*ET4[3,3,3,3]*(ET4[2,3,2,3]*ET4[1,3,1,3]-ET4[2,3,1,3]^2)

*(ET4[alpha,beta,Gamma,delta]*ET4[3,3,3,3]-ET4[alpha,beta,3,3]*ET4[Gamma,delta,3,3])

*diffit(diffit(diffit(diffit(-2/5*c^2*ET4[epsilon,zeta,3,3]/ET4[3,3,3,3]
*diffit(diffit(w(x,y,z),epsilon),zeta),alpha),beta),Gamma),delta);
  T_Psi:=T_Psi+levi(3,alpha,beta)*ET4[alpha,3,Gamma,3]

*(ET4[3,3,3,3]*ET4[delta,epsilon,zeta,beta]-ET4[delta,epsilon,3,3]*ET4[zeta,beta,3,3])

*diffit(diffit(diffit(diffit(c4Psi(x,y),delta),epsilon),zeta),Gamma);
  for xi     from 1 to 2 do
  for theta  from 1 to 2 do
  for iota   from 1 to 2 do
  for kappa  from 1 to 2 do

T:=T+6*c^4*levi(3,alpha,beta)*levi(3,Gamma,delta)*ET4[alpha,3,Gamma,3]

*(ET4[beta,epsilon,zeta,xi]*ET4[3,3,3,3]-ET4[beta,epsilon,3,3]*ET4[zeta,xi,3,3])

*(ET4[delta,theta,iota,kappa]*ET4[3,3,3,3]-ET4[delta,theta,3,3]

```

```

3]*ET4[iota, kappa, 3, 3])

*diffit (diffit (diffit (diffit (diffit (diffit (w(x, y, z), epsilon),
xi), zeta), theta), iota), kappa);
    od;
    od;
    od;
    od;
  od;
  od;
od;
od;
od;
od;
T_Psi:=T_Psi*(-6)*ET4[1, 2, 1, 2]*ET4[3, 3, 3, 3]:
> T2:=5*ET4[3, 3, 3, 3]*(ET4[2, 3, 2, 3]*ET4[1, 3, 1, 3]-ET4[2, 3, 1, 3]^2)
*a/h*ET4[3, 3, 3, 3]*P[3, 0](x, y, z):
for alpha    from 1 to 2 do
for beta     from 1 to 2 do

T2:=T2+5*ET4[3, 3, 3, 3]*(ET4[2, 3, 2, 3]*ET4[1, 3, 1, 3]-ET4[2, 3, 1, 3]
^2)
          *a/h*(1/sqrt(5)*c^2*ET4[alpha, beta, 3, 3]
          *diffit (diffit (P[3, 2](x, y, z), alpha), beta));

od;
od;
[ > unassign('beta', 'epsilon', 'zeta', 'xi', 'theta');
[ > unassign('alpha', 'Gamma', 'delta', 'iota', 'kappa');
[ > #gl_iso:=T+T_Psi=T2:
[ > gl_iso_2:=T+T_Psi=T2:
[ > #gl_orth:=T+T_Psi=T2:

```

Nun stellen wir die Differentialgleichung (71) auf. Wiederum folgen wir dem Vorgehen in A(10).

```

> T:=0:
T2:=0:
for alpha    from 1 to 2 do
for beta     from 1 to 2 do

T:=T+ET4[alpha, 3, beta, 3]*diffit (diffit (c4Psi(x, y), alpha), beta
);
  for Gamma   from 1 to 2 do
  for delta   from 1 to 2 do
  for epsilon from 1 to 2 do
  for zeta    from 1 to 2 do
    T2:=T2+levi(3, alpha, beta)*ET4[alpha, 3, Gamma, 3]

```

```

* (ET4 [3, 3, 3, 3] * ET4 [delta, epsilon, zeta, beta] - ET4 [delta, epsilon
, 3, 3] * ET4 [zeta, beta, 3, 3])

*diffit (diffit (diffit (diffit (c4u [3, 0] (x, y), delta), epsilon), ze
ta), Gamma);
    od;
    od;
    od;
    od;
od;
od;
T:=T*(-6)*ET4 [3, 3, 3, 3] * ET4 [1, 2, 1, 2]:
T2:=T2*6:
> unassign ('alpha', 'beta', 'Gamma', 'delta', 'epsilon', 'zeta');
> #Psi_iso:=5*ET4 [3, 3, 3, 3] * (ET4 [2, 3, 2, 3] * ET4 [1, 3, 1, 3] - ET4 [2, 3, 1
, 3]^2) * c2Psi (x, y) + T + T2 = 0:
> Psi_iso_2:=5*ET4 [3, 3, 3, 3] * (ET4 [2, 3, 2, 3] * ET4 [1, 3, 1, 3] - ET4 [2, 3,
1, 3]^2) * c2Psi (x, y) + T + T2 = 0:
> #Psi_orth:=5*ET4 [3, 3, 3, 3] * (ET4 [2, 3, 2, 3] * ET4 [1, 3, 1, 3] - ET4 [2, 3,
1, 3]^2) * c2Psi (x, y) + T + T2 = 0:

```

Nun führen wir noch die Normierung, wie in Kapitel 9 der Diplomarbeit beschrieben, durch. Es entstehen dabei die folgenden Differentialgleichungen (70 bzw. 85) für die unterschiedlichen Materialien:

Feinbeton:

```

> gl_iso_norm:=simplify (simplify (gl_iso / (coeff (op (2, gl_iso), P [3
, 0] (x, y, z), 1) * h/a)), size);

```

$$\begin{aligned}
gl_iso_norm := & \frac{15625}{6} c^2 \left(10 \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} w(x, y, z) \right) + 29 c^2 \left(\frac{\partial^6}{\partial x^6} w(x, y, z) \right) \right. \\
& + 87 c^2 \left(\frac{\partial^6}{\partial y^2 \partial x^4} w(x, y, z) \right) + 20 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} w(x, y, z) \right) + 87 c^2 \left(\frac{\partial^6}{\partial y^4 \partial x^2} w(x, y, z) \right) \\
& \left. + 29 c^2 \left(\frac{\partial^6}{\partial y^6} w(x, y, z) \right) + 10 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} w(x, y, z) \right) \right) = \\
& \frac{1}{20} \frac{a \left(20 P_{3,0}(x, y, z) + \sqrt{5} c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} P_{3,2}(x, y, z) \right) + \sqrt{5} c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} P_{3,2}(x, y, z) \right) \right)}{h}
\end{aligned}$$

Homogenisierter Textilbeton:

```

> gl_iso_norm_2:=simplify (simplify (gl_iso_2 / (coeff (op (2, gl_iso_
2), P [3, 0] (x, y, z), 1) * h/a)), size);

```

$$\begin{aligned}
gl_iso_norm_2 := & \frac{14154375}{84568} c^2 \left(155 \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} w(x, y, z) \right) + 437 c^2 \left(\frac{\partial^6}{\partial x^6} w(x, y, z) \right) \right. \\
& + 1311 c^2 \left(\frac{\partial^6}{\partial y^2 \partial x^4} w(x, y, z) \right) + 310 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} w(x, y, z) \right) + 1311 c^2 \left(\frac{\partial^6}{\partial y^4 \partial x^2} w(x, y, z) \right) \\
& \left. + 1311 c^2 \left(\frac{\partial^6}{\partial y^6} w(x, y, z) \right) + 10 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} w(x, y, z) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$+ 437 c^2 \left(\frac{\partial^6}{\partial y^6} w(x, y, z) \right) + 155 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} w(x, y, z) \right) =$$

$$\frac{1}{310} a \left(310 P_{3,0}(x, y, z) + 13 \sqrt{5} c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} P_{3,2}(x, y, z) \right) + 13 \sqrt{5} c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} P_{3,2}(x, y, z) \right) \right) / h$$

Textilbeton:

> **gl_orth_norm := simplify(simplify(gl_orth/(coeff(op(2, gl_orth), P[3,0](x,y,z), 1)*h/a), size);**

$$gl_orth_norm := \frac{342159498089992175558351007239165}{11571160913845829224452811199} c^2 \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} w(x, y, z) \right) +$$

$$\frac{339767168178863049130214936521745192357149700222549261840856067079}{4007380523280815429556722491756778267069447946218818740797930}$$

$$c^4 \left(\frac{\partial^6}{\partial x^6} w(x, y, z) \right) +$$

$$\frac{15737639869365211075255073309186453202989303899993172699998132194019746}{58678069312139339927284309085548625775564391552509053412133690025}$$

$$c^4 \left(\frac{\partial^6}{\partial y^2 \partial x^4} w(x, y, z) \right) + \frac{705817772868664703507699364819800}{11571160913845829224452811199} c^2 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} w(x, y, z) \right)$$

$$+$$

$$\frac{61787024229463712434290012068365192708059049786798180132384549000905944}{293390346560696699636421545427743128877821957762545267060668450125}$$

$$c^4 \left(\frac{\partial^6}{\partial y^4 \partial x^2} w(x, y, z) \right) +$$

$$\frac{18919507884770859296791972972187952830345119172094993878332744602672}{490127541865514032135685842679156580150053387508428444805660625}$$

$$c^4 \left(\frac{\partial^6}{\partial y^6} w(x, y, z) \right) + \frac{1142191476891138866389477892517768}{57855804569229146122264055995} c^2 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} w(x, y, z) \right)$$

$$- \frac{4621436031408527556049828088950146987}{2443885089046726507837192828569653} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4Psi(x, y) \right)$$

$$+ \frac{745026832973080987050567609654425759676}{61097127226168162695929820714241325} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4Psi(x, y) \right) =$$

$$\frac{1}{3637315737908875} a \left(3637315737908875 P_{3,0}(x, y, z) \right.$$

$$+ 175763062973545 \sqrt{5} c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} P_{3,2}(x, y, z) \right)$$

$$\left. + 122078038796801 \sqrt{5} c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} P_{3,2}(x, y, z) \right) \right) / h$$

[Nun die zweite PDE (71 bzw. 86) für die unterschiedlichen Materialien:

[Feinbeton:

```
> Psi_iso_norm:=simplify(Psi_iso/coeff(op(1,Psi_iso),c2Psi(x,y),1),size);
```

$$Psi_iso_norm := c2Psi(x, y) - \frac{6}{5} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c4Psi(x, y) \right) - \frac{6}{5} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c4Psi(x, y) \right) = 0$$

[Homogenisierter Textilbeton:

```
> Psi_iso_norm_2:=simplify(Psi_iso_2/coeff(op(1,Psi_iso_2),c2Psi(x,y),1),size);
```

$$Psi_iso_norm_2 := c2Psi(x, y) - \frac{6}{5} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c4Psi(x, y) \right) - \frac{6}{5} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c4Psi(x, y) \right) = 0$$

[Textilbeton:

```
> Psi_orth_norm:=simplify(simplify(Psi_orth/coeff(op(1,Psi_orth),c2Psi(x,y),1),size);
```

$$Psi_orth_norm := c2Psi(x, y) - \frac{35358}{29285} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} c4Psi(x, y) \right) - \frac{17679}{14965} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} c4Psi(x, y) \right) + \frac{65090648329697571211969409703523197}{405684924781756600300974009542562398} \left(\frac{\partial^4}{\partial y \partial x^3} c4u_{3,0}(x, y) \right) - \frac{5246667837838598500356109927143843378}{5071061559771957503762175119282029975} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} c4u_{3,0}(x, y) \right) = 0$$