EIN EINFACHERER BEWEIS DES 2. GÖDELSCHEN UNVOLLSTÄNDIGKEITSTHEOREMS

von Michael Deutsch (21.9.07)

Gödels Formulierung seiner Unvollständigkeitstheoreme bezieht sich auf ein Axiomensystem, das Axiome für Addition und Multiplikation verwendet. Wir wollen diese beiden Rechenoperationen durch semiotisch einfachere Grundbegriffe ersetzen, die sich auf die übliche Dualdarstellung natürlicher Zahlen beziehen. In der neuen Formulierung der Gödelschen Unvollständigkeitstheoreme werden wir in den Axiomen neben der üblichen Kleinerrelation nur die folgende Relation E über $\mathbb{N}$ benutzen:
xEy :gdw. y hat an der x-ten Stelle in der Dualdarstellung die Ziffer 1 (die Stellen werden von rechts mit Null beginnend gezählt)
Hauptvorteil der neuen Formulierung ist ein sehr einfacher Beweis des 2. Unvollständigkeitstheorems.

DEFINITION: 1. Es sei $\mathbb{H}$ der Bereich der Mengen, die sich aus $\emptyset$ mit endlich vielen Übergängen folgender Art erzeugen lassen: a) von x zu $\{x\}$, b) von x,y zu $x \cup y$.
2. Als bijektive Gödelisierung von $\mathbb{H}$ verwenden wir die folgende Abbildung ϕ:
$\phi(\emptyset) = 0$, $\phi(\{x\}) = 2^{\phi(x)}$, $\phi(x \cup y) = \phi(x)+\phi(y)$ für $x \cap y = \emptyset$.
Bei dieser bijektiven Gödelisierung ϕ gilt: $x \in y$ gdw. $\phi(x) E \phi(y)$.
3. Es sei $AL(p_1,p_2)$ die Klasse der Prädikate über $\mathbb{H}$, die sich durch aussagenlogische Operationen aus Gleichungen bilden lassen, in denen nur Funktionen über $\mathbb{H}$ auftreten, die aus $\lambda\emptyset$, $\lambda x\ \{x\}$, $\lambda xy\ x \cup y$, den Identitätsfunktionen $\lambda x_1 \ldots x_n\ x_i$ $(1 \le i \le n)$ und beliebigen Komponentenfunktionen p_1,p_2 zur Paarfunktion $\lambda xy\ \{\{x\},\{x,y\}\}$ durch simultanes Einsetzen gebildet sind.
4. Statt "$x_1,\ldots,x_n$" bzw. "$x_1 \ldots x_n$" schreiben wir im folgenden kürzer häufig "$\varkappa$".

SATZ 1 (Beweis vgl. [5], S.153): Zu jedem n-stelligen ($n \ge 0$) rekursiv aufzählbaren Prädikat P über $\mathbb{H}$ gibt es ein (n+2)-stelliges Prädikat Q aus $AL(p_1,p_2)$ mit
$P\varkappa \leftrightarrow \exists a\ \forall b_{\ b \subseteq a}\ Qab\varkappa$

DEFINITION: 1. Über $\mathbb{N}$ stehe $\{\!\{x\}\!\}$ für 2^x, $x \mathbin{\cup\!\!\!\!\bigcirc} y$ für $\phi(\phi^{-1}(x) \cup \phi^{-1}(y))$.
2. Wir schreiben $\langle x,y \rangle$ für $\{\!\{\{\!\{x\}\!\},\{\!\{x\}\!\} \cup \{\!\{y\}\!\}\}\!\}$. Die Funktion $\lambda xy\ \langle x,y \rangle$ ist injektiv.
$Pxyz :\leftrightarrow \langle x,y \rangle = z$. Als Komponentenfunktionen wählen wir die Funktionen
$\mathbb{p}_1(z) = \mu x\ (\exists y_{\le z}\ z = \mathbb{p}(x,y) \vee x = z)$, $\mathbb{p}_2(z) = \mu y\ (\exists x_{\le z}\ z = \mathbb{p}(x,y) \vee y = z)$.
3. Es sei $\mathbb{AL}(\mathbb{p}_1,\mathbb{p}_2)$ die Klasse der Prädikate über $\mathbb{N}$, die sich durch aussagenlogische Operationen aus Gleichungen bilden lassen, in denen nur Funktionen über $\mathbb{N}$ auftreten, die aus $\lambda 0$, $\lambda x\ \{\!\{x\}\!\}$, $\lambda xy\ x \mathbin{\cup\!\!\!\!\bigcirc} y$, den Identitätsfunktionen $\lambda\varkappa\ x_i$ $(1 \le i \le n)$ über $\mathbb{N}$ und den Funktionen $\mathbb{p}_1,\mathbb{p}_2$ durch simultanes Einsetzen gebildet sind.
4. Mit $\chi_=$ bezeichnen wir die charakteristische Funktion des Gleichheitsprädikates über $\mathbb{N}$, d.h. $\chi_=(x,y) = 0$ für $x=y$ und $\chi_=(x,y) = 1$ sonst.

SATZ 2 (Umfomulierung von Satz 1): Zu jedem n-stelligen ($n \ge 0$) rekursiv aufzählbaren Prädikat P über $\mathbb{N}$ gibt es ein (n+2)-stelliges Prädikat Q aus $\mathbb{AL}(\mathbb{p}_1,\mathbb{p}_2)$ mit
$P\varkappa \leftrightarrow \exists a\ \forall b_{\ \le a}\ Qab\varkappa$

SATZ 3: Eine Funktion über $\mathbb{N}$ ist genau dann rekursiv, wenn sie sich aus den *Anfangsfunktionen* $\lambda\ 0$, $\lambda xy\ x \mathbin{\cup\!\!\!\!\bigcirc} y$, $\lambda x\ \{\!\{x\}\!\}$, $\chi_=$, $\lambda\varkappa\ x_i$ $(1 \le i \le n)$ durch simultane Einsetzungsprozesse und Anwendungen des μ-Operators im Normalfall erzeugen läßt.

BEWEIS: Die Gesamtheit der Funktionen, die sich wie im Satz beschrieben definieren lassen, bezeichnen wir mit $\underline{F}$, die entsprechende Gesamtheit von Funktionen, die durch Hinzunahme von $\mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2$ zu den Anfangsfunktionen entsteht, mit $\underline{\mathbb{F}}$. Offenbar ist jede Funktion aus $\underline{F}$ rekursiv. Es genügt daher zu zeigen, daß jede rekursive Funktion zu $\underline{F}$ gehört.

I. Jedes Prädikat $P(\varkappa)$ aus $\mathbb{AL}(\mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2)$ läßt sich in der Form $P\varkappa \leftrightarrow f_P(\varkappa) = 0$ mit f_P aus $\underline{\mathbb{F}}$ darstellen; denn: $x=y \leftrightarrow \chi_=(x,y) = 0$, $\neg P(\varkappa) \leftrightarrow \chi_=(f_P(\varkappa),0) = 1$ und $P\varkappa \wedge Q\varkappa \leftrightarrow \mathbb{p}(f_P(\varkappa), f_Q(\varkappa)) = \mathbb{p}(0,0)$

II. Es gilt $\forall b_{b\leq a}\, g(a,b,\varkappa) = 0 \leftrightarrow g(a,a,\varkappa) = 0 \wedge \mu b(g(a,b,\varkappa)\neq 0 \vee b=a) = a$

III. Auf Grund von Satz 2 gibt es nach I. und II. zu jeder n-stelligen rekursiven Funktion f eine (n+1)-stellige Funktion h aus $\underline{\mathbb{F}}$ mit
$f(\varkappa) = y \leftrightarrow \exists a\, h(a,\varkappa,y) = 0$, also $f(\varkappa) = \mathbb{p}_2(\mu z\, h(\mathbb{p}_1(z),\varkappa,\mathbb{p}_2(z)) = 0)$.
Abschließend eliminiert man $\mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2$ durch Anwendung des μ-Operators.

AXIOMENSYSTEM $\mathbb{M}$:

A_1 $\forall xy\, (\forall z\, (zEx \leftrightarrow zEy) \rightarrow x=y)$

A_2 $\exists z\, \forall u\, \neg uEz$

A_3 $\forall x \exists z \forall u\, (uEz \leftrightarrow u=x)$

A_4 $\forall xy \exists z \forall u\, (uEz \leftrightarrow uEx \vee uEy)$

A_5 $\forall xy\, (x<y \vee y<x \vee x=y)$

A_6 $\forall xy\, (x<y \leftrightarrow \exists u\, (uEy \wedge \neg uEx \wedge \forall v\, (u<v \wedge vEx \rightarrow vEy)))$

DEFINITION: 1. Eine Formel $\mathcal{B}$ erster Stufe heißt E-Formel genau dann, wenn sie neben den zweistelligen Relationsvariablen E und < höchstens Individuenvariablen (kurz: Variablen) frei enthält. Die Anzahl der verschiedenen frei vorkommenden Variablen heißt Stelligkeit der Formel. Als Variablen werden die Zeichenreihen **I**, **II**, **III**,.... verwendet. Die Anzahl der Striche heißt Index.
Formeln der Art xEy und x<y heißen Primformeln.
2. Eine E-Formel heißt $\forall$-beschränkt, gdw. sie sich aus Primformeln und negierten Primformeln durch endlich viele Übergänge von $A, \mathcal{B}$ zu $(A \wedge \mathcal{B})$ bzw. $(A \vee \mathcal{B})$ bzw. von A zu $\exists x\, A$ bzw. $\forall x\, (\neg xEy \vee A)$ bzw. $\forall x\, (\neg x<y \vee A)$ (auch geschrieben: $\forall x_{\,xEy}\, A$ bzw. $\forall x_{\,x<y}\, A$) erzeugen läßt.
3. Für jede natürliche Zahl n und jede Variable y definieren wir nun eine mit $y = n°$ bezeichnete $\forall$-beschränkte Formel: $y = 0°$ stehe für $\forall u_{\,uEy}\, \neg uEy$.
Die natürliche Zahl $n \geq 1$ habe in ihrer Dualdarstellung genau an den paarweise verschiedenen Stellen $m_1,\ldots,m_k$ die Ziffer 1 stehen. $y = n°$ stehe für
$\forall u\, (\neg uEy \vee u=m_1° \vee \ldots \vee u=m_k°) \wedge \exists u\, (u=m_1° \wedge uEy) \wedge \ldots \wedge \exists u\, (u=m_k° \wedge uEy)$.
Für beliebige natürliche Zahlen n,m stehe $n° = m°$ für $\exists y\, (y = n° \wedge y = m°)$.
Ferner stehe für jede natürliche Zahl n: $x<n°$ für $\exists y\, (y = n° \wedge x<y)$.
4. Hat eine n-stellige E-Formel $\mathcal{B}$ als freie Variablen genau $x_1,\ldots,x_n$, wobei diese paarweise verschieden und nach aufsteigendem Index geordnet sind, so schreiben wir $\mathcal{B}[x_1,\ldots,x_n]$ statt $\mathcal{B}$. Ferner wird für <u>beliebige</u> Variablen $y_1,\ldots,y_n$ mit $\mathcal{B}(y_1,\ldots,y_n)$ die Formel bezeichnet, die aus $\mathcal{B}$ durch simultane Substitution von y_m für x_m hervorgeht. Ferner bezeichnen wir für eine beliebiges m mit $1 \leq m \leq n$ und ein beliebiges i aus $\mathbb{N}$ mit $\mathcal{B}(x_1,\ldots,x_{m-1},i°,x_{m+1},\ldots,x_n)$ die Formel $\exists x_m(x_m=i° \wedge \mathcal{B}[x_1,\ldots,x_n])$;
Entsprechend sind mehrfache Einsetzungen zu verstehen, etwa für natürliche Zahlen i_1, i_2, i_3 und Variablen $y_4,\ldots,y_n$ die Formel $\mathcal{B}(i_1°, i_2°, i_3°, y_4,\ldots,y_n)$.
5. Das n-stellige Prädikat P über $\mathbb{N}$ heißt in $\mathbb{M}$ durch die E-Formel A *repräsentierbar*, gdw. A n-stellig ist und für alle $i_1,\ldots,i_n$ aus $\mathbb{N}$ für $Pi_1\ldots i_n$ die Formel $A(i_1°,\ldots,i_n°)$ aus

$\mathbb{M}$ ableitbar ist und für $\neg P i_1 \ldots i_n$ die Formel $\neg A(i_1°,\ldots,i_n°)$ aus $\mathbb{M}$ ableitbar ist.
6. Die n-stellige Funktion f über $\mathbb{N}$ heißt in $\mathbb{M}$ durch die E-Formel A *repräsentierbar*, gdw. A (n+1)-stellig ist und für alle $i_1,\ldots,i_n$ aus $\mathbb{N}$
a) die Formel $A(i_1°,\ldots,i_n°,f(i_1,\ldots,i_n)°)$ aus $\mathbb{M}$ ableitbar ist und
b) die Formel $A(i_1°,\ldots,i_n°,w) \rightarrow w=f(i_1,\ldots,i_n)°$ aus $\mathbb{M}$ ableitbar ist.

HILFSSATZ: 1. Für beliebige x,y aus $\mathbb{N}$ mit x=y bzw. $\neg$x=y ist aus $\mathbb{M}$ die Formel $x°=y°$ bzw. $\neg x°=y°$ ableitbar.
2. Für alle n aus $\mathbb{N}$ sind die Formeln $\forall x\ (x<n° \leftrightarrow x=0° \vee \ldots \vee x=(n-1)°)$ aus $\mathbb{M}$ ableitbar. Für n=0 sei dies eine Schreibweise für die Formel $\forall x\ \neg x<n°$.

BEWEIS: Es genügt zu zeigen, daß die genannten Formeln in einem beliebigen Modell i von $\mathbb{M}$ über D gelten. Es stehe $\ll$ für $i(<)$ und $\mathbb{E}$ für $i(\mathbf{E})$.
Es sei D_0 der Durchschnitt aller Teilbereiche von D, über denen die Axiome $A_1,\ldots,A_4$ gelten. Trivialerweise gilt über D_0 auch A_5. Ferner gilt trotz der Verwendung eines $\exists$-Quantors auch A_6, da D_0 mit jedem y auch alle u mit $u\mathbb{E}y$ enthält.
Die Strukturen $(E;\mathbb{N})$ und $(\mathbb{E},D_0)$ sind isomorph, wie man leicht zeigt. (vgl. [4], S.131). Ein Isomorphismus ist die nachfolgend definierte Abbildung f von $\mathbb{N}$ auf D_0, die jedem n aus $\mathbb{N}$ das Element $n^\wedge$ aus D_0 zuordnet:
α) $0^\wedge$ sei das nach A_1,A_2 eindeutig bestimmte x aus D_0 mit $\forall u\ \neg u\mathbb{E}x$.
β) Es habe n in der Dualdarstellung genau an den Stellen $m_1,\ldots,m_k$ die Ziffer 1 stehen. Dann sei $n^\wedge$ das nach A_1,A_3,A_4 eindeutig bestimmte Element x aus D_0 mit $\forall u\ (u\mathbb{E}x \leftrightarrow u = m_1^\wedge \vee \ldots \vee u = m_k^\wedge)$.
Man zeigt leicht durch Induktion über m und n, daß für beliebige m,n aus $\mathbb{N}$ gilt:
$m < n \leftrightarrow f(m) \ll f(n)$.
Auch die Strukturen $(E,<;\mathbb{N})$ und $(\mathbb{E},\ll,D_0)$ sind also isomorph.
Zu 1. a) Es gelte x=y. Wegen der Axiome A_2 bis A_4 gilt bei i offensichtlich $x°=y°$, d.h. $\exists u\ (u = x° \wedge u = y°)$.
b) Es gelte $x\neq y$. Zu zeigen ist daß bei i die Formel $\neg\exists u\ (u = x° \wedge u = y°)$ gilt. Nun gilt aber die Formel $u = x°$ bei i genau dann, wenn $i(u)=x^\wedge$. Wegen $x\neq y$ gilt $x^\wedge\neq y^\wedge$, womit alles gezeigt ist.
Zu 2. Wir zeigen durch Induktion über n folgende Behauptung über D:
$\forall x\ (x \ll n^\wedge \leftrightarrow x = 0^\wedge \vee \ldots \vee x = (n-1)^\wedge)$. (*)
a) Für $n=0^\wedge$ ist die Behauptung trivial, da es nach A_6 kein x mit $x \ll 0^\wedge$ gibt.
b) Es habe $n\neq 0$ in der Dualdarstellung genau an den Stellen $m_1,\ldots,m_k$ die Ziffer 1 stehen, d.h. $\forall u\ (u\mathbb{E}n^\wedge \leftrightarrow u=m_1^\wedge \vee \ldots \vee u=m_k^\wedge)$. Nach A_6 gilt
$x\ll n^\wedge \leftrightarrow \exists u\ (u\mathbb{E}n^\wedge \wedge \neg u\mathbb{E}x \wedge \forall v\ (u \ll v \wedge v\mathbb{E}x \rightarrow v\mathbb{E}n^\wedge))$.
Von der zu zeigenden Behauptung (*) ist "$\leftarrow$" wegen der Isomorphie von $(E,<;\mathbb{N})$ und $(\mathbb{E},\ll;D_0)$ trivial. Zum Beweis von "$\rightarrow$" zeigen wir zunächst, daß im Falle $x\in D$ und $x \ll n^\wedge$ auch gilt $x\in D_0$. Hierzu müssen wir nachweisen, daß es nur endlich viele Elemente v gibt mit $v\mathbb{E}x$ und diese v zu D_0 gehören.
Nach A_6 gibt es ein u mit $u\mathbb{E}n^\wedge$ und $\forall v\ (u \ll v \wedge v\mathbb{E}x \rightarrow v\mathbb{E}n^\wedge)$ (1)
Wegen $u\mathbb{E}n^\wedge$ gibt es ein r mit $1\leq r\leq k$ und $u=m_r^\wedge$. Nach A_5 gilt für $v\mathbb{E}x$
$v \ll u \vee u \ll v \vee u = v$.
Im ersten Fall gilt nach Induktionsvoraussetzung
$v=0^\wedge \vee \ldots \vee v=(m_r-1)^\wedge$.
Im zweiten Fall gilt wegen (1)

$v=m_1\hat{}\ \vee\ldots\vee\ v=m_k\hat{}$.
Damit ist die Zugehörigkeit von x zu D_0 bewiesen. Die Gesamtbehauptung von (*) ergibt sich nun aus A_6 und der Isomorphie von $(E,<,\mathbb{N})$ und $(\mathbb{E},\ll;D_0)$.

BEMERKUNG: Jede über D_0 bei der Interpretation von E,< durch $\mathbb{E},\ll$ (beschränkt auf D_0) geltende $\forall$-beschränkte Formel gilt auch über D bei dieser Interpretation, weil mit jedem x aus D_0 auch alle u aus D mit $u\mathbb{E}x$ bzw. $u\ll x$ in D_0 liegen.

SATZ 4: Jede rekursive Funktion und jedes rekursive Prädikat über $\mathbb{N}$ ist durch eine $\forall$-beschränkte E-Formel repräsentierbar.

BEWEIS: I. Für rekursive Funktionen durch Induktion gemäß Satz 3.
1) Für $\lambda\ 0$ wählen wir als repräsentierende Formel
$A \equiv \forall u_{\ uEw}\ \neg uEw$.
a) $A(0^\circ) \equiv \exists w\ (w = 0^\circ \wedge A)$
$\leftrightarrow \exists w\ \forall u\ \neg uEw$
b) $(A \rightarrow w=0^\circ) \leftrightarrow (\forall u\ \neg uEw \rightarrow \forall u\ \neg uEw)$.
Die Ableitbarkeit der Formeln ist trivial.
2) Für $\lambda xy\ x\mathbb{w}y$ wählen wir als repräsentierende Formel $A[x_1,x_2,w]$:
$\forall u\ (\neg uEw \vee uEx_1 \vee uEx_2) \wedge \forall u\ (\neg uEx_1 \vee uEw) \wedge \forall u\ (uEx_2 \vee uEw)$.
a) $A(i_1^\circ,i_2^\circ,(i_1\mathbb{w}i_2)^\circ) \leftrightarrow \exists x_1x_2w\ (x_1=i_1^\circ \wedge x_2=i_2^\circ \wedge w = (i_1\mathbb{w}i_2)^\circ \wedge A)$.
Nun gilt bei i die Formel $u = n^\circ$ genau dann, wenn $i(u)=n\hat{}$. (*)
Nach $A_1,\ldots,A_4$ gilt daher diese Formel bei i.
b) $A(i_1^\circ,i_2^\circ,w) \leftrightarrow \exists x_1x_2\ (x_1=i_1^\circ \wedge x_2=i_2^\circ \wedge A(x_1,x_2,w)$.
Die Gültigkeit von $A(i_1^\circ,i_2^\circ,w) \rightarrow w = (i_1\mathbb{w}i_2)^\circ$ ist wieder offensichtlich.
3) Für $\lambda x\ \{\!\{x\}\!\}$ wählen wir als repräsentierende Formel $A[x_1,w]$:
$\forall u\ (\neg uEw \vee u=x_1) \wedge x_1Ew$.
a) $A(i_1^\circ,\{\!\{i_1\}\!\}^\circ) \leftrightarrow \exists x_1w\ (x_1=i_1^\circ \wedge w = \{\!\{i_1\}\!\}^\circ \wedge A)$.
Wegen (*) ist die Gültigkeit dieser Formel bei i klar.
b) $A(i_1^\circ,w) \leftrightarrow \exists x_1\ (x_1=i_1^\circ \wedge A(x_1,w))$.
Die Gültigkeit von $A(i_1^\circ,w) \rightarrow w = \{\!\{i_1\}\!\}^\circ$ ist ebenfalls offensichtlich.
4) Für $\chi_=$ wählen wir als repräsentierende Formel $A[x_1,x_2,w]$
$x_1=x_2 \wedge w=0^\circ \vee \neg x_1=x_2 \wedge w=1^\circ$.
Nach Hilfssatz Teil 1 ist die in der Definition unter 6a) genannte Forderung erfüllt.
Zur unter 6b) genannten Forderung: Gilt im Modell i über D die Formel $A(i_2^\circ,i_2^\circ,w)$, so hat man: $i_1\hat{}=i_2\hat{} \wedge i(w)=0\hat{} \vee i_1\hat{}\neq i_2\hat{} \wedge i(w)=1\hat{}$, also $i(w)=\chi_=(i_1,i_2)\hat{}$.
5) Für $\lambda i_1\ldots i_n\ i_r$ $(1\leq r\leq n)$ wählen wir als repräsentierende Formel $A[x_1,\ldots,x_n,w]$:
$x_1=x_1 \wedge\ldots\wedge x_n=x_n \wedge w=x_r$.
6) Zur simultanen Einsetzung: Es gelte $f(\varkappa)= h(g_1(\varkappa),\ldots,g_k(\varkappa))$,
und die $\forall$-beschränkten Formeln $A_h[v_1,\ldots,v_k,w]$,$A_1[u_1,\ldots,u_n,v_k],\ldots,A_k[u_1,\ldots,u_n,v_k]$ mögen die Funktionen $h,g_1,\ldots,g_k$ repräsentieren. Dann wird f durch die Formel
$A_f \equiv \exists v_1\ldots v_k\ (A_1[u_1,\ldots,u_n,v_1] \wedge \ldots \wedge A_k[u_1,\ldots,u_n,v_k] \wedge A_h[v_1,\ldots,v_k,w])$
repräsentiert; denn die erste Repräsentierbarkeitsforderung ist offensichtlich erfüllt.
Zur zweiten Forderung: Aus $A_f(i_1^\circ,\ldots,i_n^\circ,w)$ erhält man
$A_1(i_1^\circ,\ldots,i_n^\circ,v_1) \wedge \ldots \wedge A_k(i_1^\circ,\ldots,i_n^\circ,v_k) \wedge A_h[v_1,\ldots,v_k,w]$,
also nach Induktionsvoraussetzung $v_1= g_1(i_1,\ldots,i_n)^\circ \wedge \ldots \wedge v_k = g_k(i_1,\ldots,i_n)^\circ$

und damit $w = f(i_1,\dots,i_n)^\circ$.
7) Zur Anwendung des μ-Operators im Normalfall:
Es gelte $f(x) = \mu y\ g(x,y) = 0$ und $\forall x \exists y\ g(x,y) = 0$.
Die $\forall$-beschränkte Formel $A_g[u_1,\dots,u_n,p,q]$ möge die Funktion g repräsentieren.
Dann wird f durch die nachfolgende Formel repräsentiert:
$A_f \equiv A_g(u_1,\dots,u_n,w,0^\circ) \wedge \forall v\ (\neg v<w \vee \exists rs\ (rEs \wedge A_g(u_1,\dots,u_n,v,s)))$
a) Zur Ableitung von $A_f(x_1^\circ,\dots,x_n^\circ,f(x)^\circ)$ für alle $x_1,\dots,x_n$ aus $\mathbb{N}$:
Nach Induktionsvoraussetzung ist $A_g(x_1^\circ,\dots,x_n^\circ,f(x)^\circ,0^\circ)$ ableitbar. Aus $v<f(x)^\circ$ kann man nach dem Hilfssatz $v=0^\circ \vee \dots \vee v=(f(x)-1)^\circ$ ableiten, also
$\forall v\ (v<f(x)^\circ \rightarrow \exists rs\ (rEs \wedge A_g(x_1^\circ,\dots,x_n^\circ,v,s)))$.
b) Zur Ableitung von $w=f(x)^\circ$ aus $\mathbb{M} \cup \{A_f(x_1^\circ,\dots,x_n^\circ,w)\}$:
Aus $A_f(x_1^\circ,\dots,x_n^\circ,w)$ erhält man $\neg w<f(x)^\circ \wedge \neg f(x)^\circ<w$, nach A_5 also $w=f(x)^\circ$.
II. Wir zeigen nun, daß jedes n-stellige ($n\geq 1$) rekursive Prädikat P repräsentierbar ist: Nach I. ist die charakteristische Funktion χ_P durch eine Formel $A[x_1,\dots,x_n,w]$ repräsentierbar, also P durch $A(x_1,\dots,x_n,0^\circ)$. Begründung: Für $Px_1\dots x_n$ ist $A(x_1^\circ,\dots,x_n^\circ,0^\circ)$ ableitbar, für $\neg Px_1\dots x_n$ ist $A(x_1^\circ,\dots,x_n^\circ,1^\circ)$ ableitbar, also auch $\neg A(x_1^\circ,\dots,x_n^\circ,0^\circ)$; denn aus $A(x_1^\circ,\dots,x_n^\circ,0^\circ)$ erhält man den Widerspruch $0^\circ=1^\circ$.

Wir gehen von irgendeiner gewählten Gödelisierung aller E-Formeln und irgendeiner gewählten Gödelisierung aller Beweise von E-Formeln im gewählten Regelsystem 1. Stufe aus dem Axiomensystem $\mathbb{M}$ aus. Die anschließend definierten Prädikate und Funktionen sind für jede Wahl der Gödelisierungen entscheidbar bzw. berechenbar. Der Nachweis der Rekursivität (ohne Churchsche These) setzt natürlich voraus, daß die Gödelisierungen explizit angegeben werden. Er wird hier nicht ausgeführt.

DEFINITION: 1. Bac $\Leftrightarrow$ a ist Gödelnummer einer E-Formel und
c ist Gödelnummer eines Beweises aus $\mathbb{M}$ der Diagonalformel zu a
Dabei verstehen wir unter der Diagonalformel einer einstelligen E-Formel $A[x]$ mit der Gödelnummer a die Formel $A(a^\circ)$. Die Diagonalformel einer nicht einstelligen E-Formel sei diese Formel selbst.
$B[x,y]$ sei eine $\forall$-beschränkte Formel, die das Prädikat B repräsentiert.
2. Die Formel $\neg\exists y\ B[x,y]$ habe die Gödelnummer b und die Diagonalformel $\neg\exists y\ B(b^\circ,y)$ die Gödelnummer d.
3. Es sei e die Gödelnummer der Formel $\exists x\ \neg x=x$.
4. $\underline{f}(x)$ sei die Gödelnummer der zu x gehörenden Diagonalformel, falls x die Gödelnummer einer einstelligen E-Formel ist. $\underline{f}(x) = x$ sonst .
$F[x,w]$ sei eine $\forall$-beschränkte Formel, die den Graphen von $\underline{f}$ repräsentiert.

SATZ 5 (ERSTES GÖDELSCHES UNVOLLSTÄNDIGKEITSTHEOREM für $\mathbb{M}$):
Wenn $\mathbb{M}$ widerspruchsfrei ist, so ist aus $\mathbb{M}$ nicht $\neg\exists y\ B(b^\circ,y)$ ableitbar.
Im Standardmodell $\mathfrak{i}^\circ$ über $\mathbb{N}$ gilt aber $\neg\exists y\ B(b^\circ,y)$, d.h. man hat $\neg\exists y$ Bby.

BEWEIS: Wäre $\neg\exists y\ B(b^\circ,y)$ ableitbar, so hätte man Bbc für ein c aus $\mathbb{N}$, also wäre $B(b^\circ,c^\circ)$ ableitbar. Dann wäre aber $\mathbb{M}$ widerspruchsvoll.

Das 2. Gödelsche Unvollständigkeitstheorem behauptet nun <u>für eine gewisse natürliche Wahl der E-Formel B</u>, daß bei Widerspruchsfreiheit von $\mathbb{M}$ auch die E-Formel $\neg\exists y\ B(e^\circ,y)$ nicht aus $\mathbb{M}$ ableitbar ist, d.h. eine Formel, die im Standardmodell $\mathfrak{i}^\circ$ über $\mathbb{N}$ auf natürliche Weise die Widerspruchsfreiheit von $\mathbb{M}$ ausdrückt.
Benötigt wird zum 2. Unvollständigkeitstheorem die Ableitbarkeit aus $\mathbb{M}$ von
$\neg\exists y\ B(e^\circ,y) \rightarrow \neg\exists y\ B(b^\circ,y)$, d.h. von

$\exists y\, \mathcal{B}(b^\circ,y) \rightarrow \exists y\, \mathcal{B}(e^\circ,y)$. (°)

Dabei hat man nach dem 1. Unvollständigkeitstheorem $\neg\exists y\, Bey \rightarrow \neg\exists y\, Bby$, d.h.

$\exists y\, Bby \rightarrow \exists y\, Bey$. (°°)

Um die Ableitbarkeit von (°) zu zeigen, ist (aus semantischer Sicht) die Gültigkeit von (°) in <u>jedem</u> Modell von $\mathbb{M}$ zu zeigen, während sie gemäß (°°) nach dem ersten Unvollständigkeitstheorem nur im Standardmodell behauptet wird.

Wir wählen einen vollständigen Ableitungskalkül für die 1. Stufe mit endlich vielen Schlußregeln, die zur Ableitung von Formeln 1. Stufe dienen und von denen jede höchstens zwei Prämissen hat. Die Menge H der Gödelnummern der E-Formeln, die logische Axiome des Ableitungskalküls sind, ist rekursiv. Dann gibt es ein dreistelliges rekursives Prädikat K über $\mathbb{N}$ mit:

Kxyz $\Leftrightarrow$ x,y,z sind Gödelnummern von E-Formeln und (Hz oder die E-Formel zu z läßt sich aus den E-Formeln zu x und y mit einer Schlußregel gewinnen.

Wir definieren nun zunächst ein etwas allgemeineres Prädikat als B, in dem der feste Bezug aus das Axiomensystem $\mathbb{M}$ durch den Bezug auf irgendeine rekursive Menge M von Gödelnummern von E-Formeln ersetzt wird, nämlich ein zweistelliges Prädikat T_M . Die Menge der Gödelnummern von E-Formeln bezeichnen wir mit G.

$T_M ac \Leftrightarrow Ga \wedge c$ ist eine natürliche Zahl, die für gewisse Zahlen $a_0,\ldots,a_k$ mit $a_k=\underline{f}(a)$ genau an den Stellen $\langle a_0,0\rangle\ldots,\langle a_k,k\rangle$ die Ziffer 1 stehen hat, wobei gilt: Für jedes i mit $0\leq i\leq k$ gilt Ma_i oder Ha_i oder es gibt r,s mit $rEi \wedge sEi \wedge Ka_r a_s a_i$.

Zunächst wählen wir $\forall$-beschränkte Formeln $\mathcal{G}[x]$, $\mathcal{P}[w,v,u]$, $\mathcal{M}[p]$, $\mathcal{H}[p]$, $\mathcal{K}[p_1,p_2,p]$, die die Prädikate G, P, M, H, K repräsentieren. Es sei

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_M[x,y] :\equiv\ & \exists wvu\ (\mathcal{P}[w,v,u] \wedge uEy \wedge \mathcal{F}[x,w] \wedge \mathcal{G}[x])\\ & \wedge \forall u\ (\neg uEy \vee \exists pq\ (\mathcal{P}(p,q,u)\\ & \qquad \wedge (\mathcal{M}[p] \vee \mathcal{H}[p]\\ & \qquad\quad \vee \exists q_1q_2p_1p_2u_1u_2\ (q_1Eq \wedge q_2Eq\\ & \qquad\qquad \wedge \mathcal{P}(p_1,q_1,u_1) \wedge \mathcal{P}(p_2,q_2,u_2)\\ & \qquad\qquad \wedge u_1Ey \wedge u_2Ey \wedge \mathcal{K}[p_1,p_2,p])))\end{aligned}$$

T_M wird durch diese $\forall$-beschränkte Formel repräsentiert. Spezialfälle:

1. M ist die Menge M° der Gödelnummern der Formeln aus $\mathbb{M}$ Dann gilt $T_M ac \Leftrightarrow Bac$. Statt $\mathcal{T}_{M^\circ}[x,y]$ schreiben wir $\mathcal{B}[x,y]$.
2. M ist die Menge $M^{\circ\circ} = M^\circ \cup \{d\}$; als $\mathcal{M}[p]$ wählen wir $\mathcal{M}^\circ[p] \vee p = d^\circ$.

SATZ 6 (ZWEITES GÖDELSCHES UNVOLLSTÄNDIGKEITSTHEOREM FÜR $\mathbb{M}$):
Wenn $\mathbb{M}$ widerspruchsfrei ist, so ist aus $\mathbb{M}$ nicht $\neg\exists y\, \mathcal{B}(e^\circ,y)$ ableitbar.

BEWEIS: Die Bezeichnungen $\mathcal{i}$, D, D_0, $\mathbb{E}$ seien wie im Beweis des Hilfssatzes gewählt. Wir müssen nur die Gültigkeit von (°) bei $\mathcal{i}$ zeigen. Wegen (°°) gilt im Standardmodell $\mathcal{i}^\circ$ über $\mathbb{N}$ die Formel $\mathcal{T}_{M^{\circ\circ}}(e^\circ,y)$ für eine geeignete Wahl von $\mathcal{i}^\circ(y)$, wegen der Isomorphie der Strukturen daher auch über D_0 und wegen der $\forall$-Beschränktheit auch bei der Interpretation $\mathcal{i}$ über D für eine geeignete Wahl von $\mathcal{i}(y)=y_1$. Es gelte nun außerdem $\mathcal{B}(b^\circ,y)$ für eine geeignete Wahl von $\mathcal{i}(y)=y_2$. Es sei y_3 das nach $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_4$ eindeutig bestimmte Element aus D mit $\forall u\ (u\mathbb{E}y_3 \Leftrightarrow u\mathbb{E}y_1 \vee u\mathbb{E}y_2)$. Dann gilt offensichtlich $\mathcal{B}(e^\circ,y)$ bei $\mathcal{i}$ für $\mathcal{i}(y)=y_3$.

Da sich aus dem von Gödel benutzten Axiomensystem mit den Grundbegriffen 0,1,+,× einfach beweisen läßt, daß sich jede natürliche Zahl eindeutig als Dualbruch darstellen läßt, hat man bei entsprechender Definition von E auch Ableitungen der Axiome von $\mathbb{M}$ und so die Gödelschen Resultate in klassischer Formulierung.

ANMERKUNG: Verwendet man an Stelle von Satz 3 den spezielleren Satz 9* aus [5], Seite 167, so kann man den Beweis von Satz 3 einsparen.

[1] Gödel, K.: Die Vollständigkeit des Axiome des logischen Funktionenkalküls. Monatsh. Math. und Phys. 37 (1930), S.349-360.
[2] Gödel, K.: Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. Monatsh. Math. und Phys. 38 (1931), S. 173-198.
[3] Hilbert,D. und Bernays, P.: Grundlagen der Mathematik I und II. Zweite Auflage 1968/1970. Springer-Verlag.
[4] Deutsch, M.: Einführung in die Grundlagen der Mathematik. Bremen 1999.
[5] Deutsch, M.: Berechenbarkeit, Entscheidbarkeit, Aufzählbarkeit über Nachfolgerbereichen. Bremen 2003.