# DIE GÖDELSCHEN UNVOLLSTÄNDIGKEITSTHEOREME MIT DER VERKETTUNGSFUNKTION STATT ADDITION UND MULTIPLIKATION

von Michael Deutsch 22.11.07

Gödels Formulierung seiner Unvollständigkeitstheoreme bezieht sich auf ein Axiomensystem, das Axiome für Addition und Multiplikation verwendet. In [6] wurde das Axiomensystem Gödels mit den Grundbegriffen $0,1,+,\times$ durch ein einfaches Axiomensystem ersetzt, das als einzigen Grundbegriff folgendes Prädikat E verwendet:
xEy gdw. y hat in der Dualdarstellung an der x-ten Stelle die Ziffer 1
(die Stellen werden von rechts mit Null beginnend gezählt)
Semiotisch naheliegender als der Rückgriff auf E ist die Verwendung der Verkettungsfunktion bzgl. der <u>üblichen</u> Dualdarstellung und der beiden dyadischen Nachfolgerfunktionen $f_0° = \lambda x\ x0$ und $f_1° = \lambda x\ x1$. Aus praktischen Gründen betrachten wir die Menge $\mathbb{N}_1$ der natürlichen Zahlen ohne die Null. $\mathbb{N}_1$ wird mit diesen beiden Nachfolgerfunktionen aus dem Anfangselement 1 im Sinne von [5] als Termbereich erzeugt. Wie schon in [6] können wir im Axiomensystem auf ein Induktionsschema verzichten.
Die Verkettungsfunktion $\lambda xy\ xy$ wird im folgenden mit $\upsilon$ bezeichnet. Statt xy schreiben wir auch $\upsilon(x,y)$.
Nähme man die 0 zum Grundbereich hinzu, so wäre bei der üblichen Identifizierung von 0...0x mit x die Verkettungsfunktion nicht assoziativ! Zum Beispiel ist (10)0 = 100, aber 1(00) = 10. Aus diesem Grunde schließen wir hier die Null aus den natürlichen Zahlen aus.
Es sei betont, daß wir die <u>übliche</u> Dualdarstellung natürlicher Zahlen verwenden, und nicht etwa die in [4] benutzte abgeänderte Dualdarstellung, bei der jedem Wort über dem Alphabet $\{0,1\}$ umkehrbar eindeutig eine natürliche Zahl entspricht.
Wir benutzen $\mathbb{V}$ in der Bedeutung "entweder oder", d.h. als ausschließendes "oder", bei mehrstelligen Verknüpfungen mit $\mathbb{V}$ wird behauptet, daß genau einer der Fälle zutrifft. Das übliche nicht ausschließende "oder" wird mit V bezeichnet.
Aus optischen Gründen schreiben wir im Axiomensystem **x0** statt $\mathbf{f_0(x)}$. Man beachte aber, daß **0** keine Individuenvariable ist. Nicht **0** ist ein Grundbegriff, sondern $\mathbf{f_0}$.
Es handelt sich nur um eine suggestive Schreibweise. Der entsprechende "Sonderfall" muß daher bei Kürzungsregel und Assoziativgesetz eigens aufgeführt werden.

AXIOMENSYSTEM $\mathcal{M}^{\text{*}}$:

$A_1$ $\forall x\ (x=1 \ \mathbb{V}\ \exists u\ x=u0 \ \mathbb{V}\ \exists u\ u1)$

$A_2$ $\forall xyz\ (xz = yz \vee zx = zy \vee x0 = y0 \rightarrow x = y)$

$A_3$ $\forall xy\ (xy \neq x \wedge x0 \neq x)$

$A_4$ $\forall xyz\ x(yz) = (xy)z \wedge \forall xy\ x(y0) = (xy)0$

$A_5$ $\forall xyab\ (xy = ab \rightarrow y\mathrm{END}b \vee b\mathrm{END}y)$

Dabei stehe **xENDy** für $x=y \vee \exists z\ y=zx$.
In diesem Fall heißt x Ende von y. Man beachte, daß z.B. das einzige Ende von 1000 (in Dualdarstellung) die Zahl 1000 selbst ist, die einzigen Enden von 1001 die Zahlen 1 und 1001.

DEFINITION.
1. Eine Formel $\mathcal{B}$ erster Stufe heißt VK-Formel genau dann, wenn sie neben $\mathbf{1},\upsilon,\mathbf{f_0}$ höchstens Individuenvariablen frei enthält. Dabei sind
**1** eine ausgezeichnete Individuenvariable,
$\upsilon$ eine zweistellige Funktionsvariable,

$f_0$ eine einstellige Funktionsvariable.

$xy$ steht für $\upsilon(x,y)$.
$f_1(x)$ steht für $\upsilon(x,1)$.

Mit Individuenvariablen meinen wir von jetzt an immer von **1** verschiedene Individuenvariablen. Als Individuenvariablen werden die Zeichenreihen **I**, **II**, **III**,.... verwendet. Die Anzahl der Striche einer Individuenvariablen heißt ihr Index. Die Anzahl der verschiedenen frei vorkommenden Individuenvariablen heißt Stelligkeit der Formel.

2. Hat eine n-stellige VK-Formel $\mathcal{B}$ als freie Individuenvariablen genau $x_1,\dots,x_n$, wobei diese paarweise verschieden und nach aufsteigendem Index geordnet sind, so schreiben wir deutlicher $\mathcal{B}[x_1,\dots,x_n]$ statt $\mathcal{B}$. Ferner bezeichnen wir für beliebige Terme $\tau_1,\dots,\tau_n$ der Sprache der VK-Formeln mit $\mathcal{B}(\tau_1,\dots,\tau_n)$ die Formel, die durch simultane verallgemeinerte Substitution von $\tau_i$ für $x_i$ aus $\mathcal{B}[x_1,\dots,x_n]$ hervorgeht.

3. Unter einer Dualdarstellung verstehen wir einen Term, der sich in endlich vielen Schritten aus **1** mit Übergängen von $\tau$ zu $f_i(\tau)$ $(i=0,1)$ erzeugen läßt. Jeder natürlichen Zahl n entspricht genau eine Dualdarstellung, die wir mit $n^\circ$ bezeichnen.

4. Das n-stellige Prädikat P über $\mathbb{N}_1$ heißt in $\mathbb{M}^{\wedge}$ durch die VK-Formel $A$ *semirepräsentiert*, gdw. $A$ n-stellig ist und für alle $i_1,\dots,i_n$ aus $\mathbb{N}_1$

(a) die Formel $A[i_1{}^\circ,\dots,i_n{}^\circ]$ aus $\mathbb{M}^{\wedge}$ ableitbar ist, falls $Pi_1\dots i_n$ gilt, und

(b) im Standardmodell $I^\circ$ über $\mathbb{N}_1$ die Formel $A[i_1{}^\circ,\dots,i_n{}^\circ]$ genau im Falle $Pi_1\dots i_n$ gilt.

5. Eine VK-Formel heiße $\forall$-beschränkt, gdw. sie sich aus Gleichungen und negierten Gleichungen durch endlich viele Übergänge folgender Art erzeugen läßt:
a) von $A,\mathcal{B}$ zu $(A \wedge \mathcal{B})$ bzw. $(A \vee \mathcal{B})$,
b) von $A$ zu $\exists x\, A$,
c) von $A$ zu $\forall x\, (\neg x\mathrm{END}y \vee A)$, auch geschrieben $\forall x_{\,x\mathrm{END}y}\, A$.

6. In einem beliebigen Modell $I$ über D bezeichnen wir mit 1, $f_0$, $\upsilon$ die Deutungen der Grundbegriffe **1**, $f_0$, $\upsilon$. Statt $\upsilon(x,1)$ schreiben wir auch $f_1(x)$. Das Standardmodell über $\mathbb{N}_1$ bezeichnen wir mit $I^\circ$, die Deutung der Grundbegriffe durch $I^\circ$ mit $1^\circ$, $f_0{}^\circ$, $\upsilon^\circ$. Ferner schreiben wir $f_1{}^\circ(x)$ statt $\upsilon^\circ(x,1^\circ)$. Der Einfachheit halber schreiben wir sowohl im Standardmodell als auch in einem beliebigen Modell der Axiome $xy$ für $\upsilon^\circ(x,y)$ bzw. $\upsilon(x,y)$.

HILFSSATZ 1. Aus $\mathbb{M}^{\wedge}$ ist ableitbar:
1. $\forall xy\; xy \neq 1$
2. $\forall xy\; xy \neq y$
3. $\forall xyz\; (xy = f_0(z) \rightarrow \exists u\, (y=f_0(u) \wedge xu = z))$
4. $\forall xyz\; (xy = z1 \rightarrow y=1 \wedge x=z \vee \exists u\, (y=u1 \wedge xu = z))$

BEWEIS.
Wir beweisen die Gültigkeit der Formeln in einem beliebigen Modell $I$ über D.
Zu 1. Nach $A_1$ hat man
$y=1 \;\mathbb{V}\; \exists u\; y=f_0(u) \;\mathbb{V}\; \exists u\; y=f_1(u)$
Mit $A_4$ erhält man
$xy = f_i(u)$ für ein u und i=0 oder i=1, also nach $A_1$ die Behauptung.
Zu 2. Angenommen $xy = y$, also
$xy = x(xy)$, also nach $A_4$
$xy = (xx)y$, also nach $A_2$
$x = xx$ im Widerspruch zu $A_3$.

Zu 3. Es sei $xy = f_0(z)$. Nach $A_1$ gilt
$y=1 \mathbin{\mathbb{V}} \exists u\ y=f_0(u) \mathbin{\mathbb{V}} \exists u\ y=f_1(u)$ .
Nach $A_4$ und $A_1$ scheiden die erste und die dritte Möglichkeit aus. Also gilt
$y=f_0(u)$
für ein u und nach $A_4$
$xy = f_0(xu)$,
also nach $A_2$
$xu = z$.
Zu 4. Es gelte $xy = z1$.
Im Falle $y=1$ hat man nach $A_2$
$x=z$.
Im Falle $y = u1$ hat man nach $A_4$
$xy = (xu)1$,
also nach $A_2$
$xu = z$.
Angenommen $y = f_0(u)$. Dann hat man nach $A_4$
$xy = f_0(xu)$.
Widerspruch zu $A_1$.

HILFSSATZ 2.
1. Für beliebige x,y aus $\mathbb{N}$ mit $x=y$ bzw. $\neg x=y$ ist aus $\mathbb{M}^*$ die Formel $\mathbf{x^\circ=y^\circ}$ bzw. $\neg\mathbf{x^\circ=y^\circ}$ ableitbar.
2. In einem beliebigen Modell $I$ über D der Axiome sei $D_0$ der Durchschnitt aller Teilbereiche von D, die 1 und mit jedem x auch $f_0(x)$ und $f_1(x)$ enthalten.
Dann gelten auf $D_0$ sämtliche Axiome und die Beschränkung von $I$ auf $D_0$ ist zum Standardmodell $I^\circ$ über $\mathbb{N}_1$ isomorph. Eine abgeschlossene $\forall$-beschränkte Formel gilt bei $I$ über D, wenn sie über $D_0$ bei der Beschränkung von $I$ auf $D_0$ gilt.

BEWEIS.
Zu 1. Es ist die Gültigkeit der jeweiligen Formel in einem beliebigen Modell $I$ über D zu zeigen. Im Falle $x=y$ ist die Behauptung trivial. Im Falle $x\neq y$ ist aus $\mathbf{x^\circ=y^\circ}$ ein Widerspruch abzuleiten. Dieser ergibt sich sofort mit den ersten beiden Axiomen.
Zu 2. Über $D_0$ gilt bei $I$ folgendes Axiom 2. Stufe:

$A_6$ $\quad \mathbf{\forall M\ (M1 \wedge \forall x(Mx \rightarrow Mf_0(x) \wedge Mf_1(x)) \ \rightarrow \forall x\ Mx)}$.

Außerdem betrachten wir die nachfolgende Abschwächung des Axiom $A_2$:

$A_2^*$ $\quad \mathbf{\forall xyz\ (f_i(x) = f_i(y) \rightarrow x = y)} \qquad i=0,1$

Wir zeigen zunächst, daß das Axiomensystem $\{A_1, A_2^*, A_6\}$ monomorph ist. Hierzu geben wir einen Isomorphismus $\phi$ bzgl. der jetzigen Grundbegriffe $\mathbf{1, f_0, f_1}$ vom Standardmodell $I^\circ$ über $\mathbb{N}$ auf die auf $D_0$ beschränkte Interpretation $I$ an. Es sei:
$\phi(1^\circ) \quad = 1$
$\phi(f_0{}^\circ(x)) = f_0(\phi(x))$
$\phi(f_1{}^\circ(x) \ = f_1(\phi(x))$
Da die Homomorphiebedingungen erfüllt sind, ist nur die Bijektivität von $\phi$ zu zeigen.
1. Durch Induktion über x zeigen wir:
$x\neq y \rightarrow \phi(x)\neq\phi(y)$.

a) Es sei $x=1°$ und $y=f_i°(u)$ für ein u und $0 \leq i \leq 1$. Dann ist $\phi(x)=1$ und $\phi(y) = f_i(\phi(u))$, also $\phi(y) \neq 1$ nach $A_1$.
b) Schluß von u auf $f_i°(u)=x$. Es sei $x \neq y$. Für $y=1°$ schließt man wie bei a) auf $\phi(x) \neq \phi(y)$. Es sei nun $y=f_k°(v)$ für ein k mit $0 \leq k \leq 1$. Wegen $x \neq y$ gilt $i \neq k$ oder $i=k \wedge u \neq v$.
Im Falle $i \neq k$ erhält man $\phi(x) \neq \phi(y)$ aus $A_1$.
Im Falle $i=k \wedge u \neq v$ erhält man aus der Annahme $\phi(x)=\phi(y)$ mit $A_2^*$ sofort $\phi(u)=\phi(v)$, daraus mit der Induktionsvoraussetzung $u=v$. Widerspruch.
2. Die Surjektivität von $\phi$ erhält man sofort mit $A_6$, weil der Bildbereich 1 und mit jedem x auch $f_0(x)$ und $f_1(x)$ enthält.
3. Wegen $A_4$ führt die Funktion $\upsilon$ für Argumente aus $D_0$ nicht aus $D_0$ heraus, und $\phi$ ist auch ein Isomorphismus vom Standardmodell $\mathcal{I}°$ über $\mathbb{N}_1$ auf die $D_0$-beschränkte Interpretation $\mathcal{I}$ bzgl. des zusätzlichen Grundbegriffs $\upsilon$. Hierzu zeigt man für beliebige x,y aus $\mathbb{N}_1$ durch Induktion über y:
$\phi(\upsilon°(x,y)) = \upsilon(\phi(x),\phi(y))$.
Die Axiome gelten daher auch über $D_0$.
4. Es gelte für x,y aus D
$x END y$ gdw. $x=y \vee \exists z\ y=\upsilon(z,x)$
Wir zeigen nun für beliebige x aus D durch Induktion über z:
$z \in D_0 \wedge x END z \rightarrow x \in D_0$.
a) Für $z=1$ ergibt sich die Behauptung aus Hilfssatz 1.1.
b) Schluß von z auf $f_i(z)$ für $i=0,1$.
Für $x END f_i(z)$ erhält man $x=f_i(z)$ (Dann ist alles gezeigt.) oder für ein y
$yx = f_i(z)$.
Für $i=0$ erhält man nach Hilfssatz 1.3 $x=f_0(u)$ für ein u und
$yu = z$, also nach Induktionsvoraussetzung $u \in D_0$, also $x \in D_0$.
Für $i=1$ erhält man nach Hilfssatz 1.4
$x=1 \wedge y=z$ , also $x \in D_0$, oder
$x = u1$ für ein u und
$yu = z$ ,
also nach Induktionsvoraussetzung $u \in D_0$, also $x \in D_0$.
Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

DEFINITION.
1. Wir schreiben $\underline{x}$ für $x_1...x_n$ bzw. $x_1,...,x_n$.
2. Es sei $\mathbb{N}_{SF}$ die Menge der natürlichen Zahlen aus $\mathbb{N}_1$, deren Dualdarstellung aus lauter Einsen besteht.
3. Ein Prädikat über $\mathbb{N}_1$ gehöre zu RA^, gdw. es aus Gleichungen und Ungleichungen durch endlich häufige Anwendung folgender Schemata erzeugt werden kann:
a) Verknüpfung von Prädikaten mit $\wedge$ bzw. $\vee$,
b) Anwendung des unbeschränkten $\exists$-Quantors,
c) Anwendung des durch END° beschränkten $\forall$-Quantors, d.h. Übergang von Q zu
$P b \underline{x} \leftrightarrow \forall a_{\, a END° b}\ Q \underline{x} a$
mit $x END° y \leftrightarrow x=y \vee \exists z\ y=\upsilon°(z,x)$,
d) Permutation oder Identifizierung von Variablen.
In den Gleichungen und Ungleichungen dürfen dabei nur Funktionsterme stehen, die aus Variablen, 1° und $f_0°$, $\upsilon°$ durch Einsetzen gebildet sind.

ABKÜRZUNGEN.

| | | |
|---|---|---|
| **xBEGy** | für **x = y ∨ ∃z xz = y** | (x ist Beginn von y) |
| **10** | für $f_0(1)$ | |
| **100** | für $f_0(f_0(1))$ | |
| **101** | für $f_1(f_0(1))$ | |
| **¬100BEGz** | für **z=1 ∨ z=10 ∨ 11BEGz ∨ 101BEGz** | |
| **SFz** | für **1ENDz ∧ ∀u $_{uENDz}$ ∃v (z=vu ∧ 1ENDv)** | (Strichfolge z) |
| **xPWy** | für **xBEGy ∨ xENDy ∨ ∃uv y = uxv** | (x ist Teilwort von y) |
| **<x,y>** | für $f_0(x)f_0(y)$ | |

Für die entsprechenden Abkürzungen in einem beliebigen Modell $I$ über D wählen wir Normalschrift; ist $I$ das Standardmodell $I°$ über $\mathbb{N}_1$, so setzen wir gelegentlich der Deutlichkeit halber den Zusatz ° hinzu.

SATZ 1.
Jedes rekursiv aufzählbare Prädikat über $\mathbb{N}_{SF}$ ist durch eine ∀-beschränkte Formel in $\mathbb{M}^{*}$ semirepräsentierbar.

BEWEIS.
Es genügt zu zeigen, daß der Graph jeder primitiv-rekursiven Funktion über $\mathbb{N}_{SF}$ zu RA$^*$ gehört. Die Forderung 4(a) in der Definition vor Hilfssatz 1 ergibt sich nach Hilfssatz 2.2 wegen der ∀-Beschränktheit aus 4(b).
Der Einfachheit halber lassen wir in diesem Beweis den jeweiligen Zusatz ° weg.
1) y=1 gehört zu RA$^*$.
2) Der Graph der Nachfolgerfunktion über $\mathbb{N}_{SF}$ hat über $\mathbb{N}_1$ die Darstellung
$SFx \wedge y = f_1(x)$.
3) Der Graph von $\lambda x_1...x_n\, x_i$ (über $\mathbb{N}_{SF}$) hat über $\mathbb{N}_1$ die Darstellung
$SFx_1 \wedge ... \wedge SFx_n \wedge y=x_i$ .
4) Für $f(\underline{x}) = h(g_1(\underline{x}),...,g_k(\underline{x}))$ hat man als Darstellung des Graphen
$z = f(\underline{x}) \leftrightarrow \exists y_1...y_m\ (z = h(y_1,...,y_m) \wedge y_1 = g_1(\underline{x}) \wedge ... \wedge y_m = g_m(\underline{x}))$
5) Es gelte $f(\underline{x},1) = g(\underline{x})$, $f(\underline{x},y') = h(\underline{x},y,f(\underline{x},y))$.
Für den Graphen von f hat man über $\mathbb{N}_1$ die Darstellung

z=f(x̲,y) ↔
∃a (100<y,z>BEGa
  ∧ ∀b $_{bENDa}$ (¬100BEGb
    ∨ ∃cd (100<c,d>BEGb
      ∧ (c=1 ∧ d=g(x̲)
        ∨∃uvw (c=f$_1$(u) ∧ d=h(x̲,u,v) ∧ wENDb ∧ 100<u,v>BEGw)))))

Zu "→".
Man wähle a = 100<y,f(x̲,y)>100<y-1,f(x̲,y-1>100...100<2,f(x̲,2)>100<1,f(x̲,1)>
Zu "←".
Durch Induktion über die Länge der Dualdarstellung von b zeigen wir
bENDa ∧ 100<p,q>BEGb → SFp ∧ SFq ∧ q=f(x̲,p) .
Es gelte
bENDa ∧ 100<p,q>BEGb. (*)
Dann gibt es c,d mit 100<c,d>BEGb, also c=p und d=q.
Induktionsanfang: Man betrachte das kürzeste b mit (*).
Dann gilt c=1 ∧ d=g(x̲), also d=f(x̲,1).
Induktionsschluß: Man betrachte ein anderes b mit (*).
Im Falle c=1 erhält man wiederum d=g(x̲). Sonst gilt für gewisse u,v,w

$c=f_1(u) \wedge d=h(\underline{x},u,v) \wedge wENDb \wedge 100<u,v>BEGw$ .

Wegen $100<u,v>BEGw$ gilt $w\neq b$. Nach Induktionsvoraussetzung hat man daher $SFu \wedge SFv \wedge v=f(\underline{x},u)$.

Damit erhält man $SFc \wedge SFd \wedge d=f(\underline{x},c)$.

Damit ist der Satz bewiesen.

Zum Beweis der beiden Gödelschen Unvollständigkeitstheoreme für das System $\mathbb{M}^{\wedge}$ gehen wir von einer beliebigen Gödelisierung aller VK-Formeln mit Gödelnummern aus $\mathbb{N}_{SF}$ aus. Ferner legen wir auf nachfolgende Weise eine Gödelisierung aller Beweise von VK-Formeln im gewählten Regelsystem 1. Stufe aus einer Formelmenge U fest.

Wir wählen einen vollständigen und korrekten Ableitungskalkül für die 1. Stufe mit Schlußregeln, die jeweils höchstens zwei Prämissen haben und für die die nachfolgenden Prädikate H und K rekursiv sind.

H ist die Menge der Gödelnummern der VK-Formeln, die logische Axiome des Ableitungskalküls sind.

Kxyz $\Leftrightarrow$

x,y,z sind Gödelnummern von VK-Formeln und die VK-Formel zu z läßt sich aus den zu x und y gehörenden VK-Formeln mit einer Schlußregel gewinnen.

Die Menge der Gödelnummern von VK-Formeln bezeichnen wir mit G.

Beweise von VK-Formeln aus einer Menge U von VK-Formeln, für die die entsprechende Menge M von Gödelnummern rekursiv ist, sind endliche Folgen $\mathcal{C}_1,\dots,\mathcal{C}_k$ von VK-Formeln, so daß für jedes i mit $1\leq i\leq k$ gilt: $\mathcal{C}_i \in U$, oder $\mathcal{C}_i$ ist ein logisches Axiom oder gehört zu U, oder es gibt r,s mit $1\leq r,s\leq i-1$, so daß $\mathcal{C}_i$ aus $\mathcal{C}_r$ und $\mathcal{C}_s$ mit einer Schlußregel gewonnen wird.

Als Gödelnummer des Beweises $\mathcal{C}_1,\dots,\mathcal{C}_k$ wählen wir die natürliche Zahl

$100f_0^{\circ}(a_k)100f_0^{\circ}(a_{k-1})100 \dots\dots\dots\dots 100f_0^{\circ}(a_1)1$,

wobei $a_1,\dots,a_k$ die Gödelnummern von $\mathcal{C}_1,\dots,\mathcal{C}_k$ aus $\mathbb{N}_{SF}$ sind.

Die anschließend definierten Prädikate und Funktionen sind entscheidbar bzw. berechenbar, also nach der Church'schen These rekursiv. Der exakte Nachweis der Rekursivität (ohne Benutzung der Churchschen These) setzt voraus, daß die Gödelisierung der VK-Formeln und der Ableitungskalkül explizit angegeben werden. Er wird hier nicht ausgeführt.

DEFINITION.

1. $S_M ac$ $\Leftrightarrow$ a ist Gödelnummer einer VK-Formel und
c ist Gödelnummer eines Beweises der Formel zu a aus einer VK-Formelmenge U, für die M die Menge der Gödelnummern ist

Dieses Prädikat wird nur für rekursives M betrachtet. Wählt man $U=\mathbb{M}^{\wedge}$, so schreiben wir Sac statt $S_M ac$.

$\mathcal{S}[x,y]$ sei eine $\forall$-beschränkte Formel, die das Prädikat S semirepräsentiert. (Weil die Gödelnummern von Beweisen nicht zu $\mathbb{N}_{SF}$ gehören, können wir nicht mit Satz 1 auf eine solche Formel schließen. Eine derartige Formel wird weiter unten aber angegeben.)

2. Bac $\Leftrightarrow$ a ist Gödelnummer einer VK-Formel und
c ist Gödelnummer eines Beweises aus $\mathbb{M}^{\wedge}$ der Diagonalformel zu a

Dabei verstehen wir unter der Diagonalformel einer einstelligen VK-Formel $\mathcal{A}[x]$ mit der Gödelnummer a die Formel $\mathcal{A}(a^{\circ})$. Die Diagonalformel einer nicht einstelligen

VK-Formel sei diese Formel selbst.
3. f(x) sei die Gödelnummer der zu x gehörenden Diagonalformel, falls x die Gödelnummer einer einstelligen VK-Formel ist. f(x) = x sonst. Fxy :⇔ y = f(x).
$\mathcal{F}$[x,w] sei eine ∀-beschränkte Formel, die das Prädikat F semirepräsentiert.
4. $\mathcal{B}$[x,y] ≡ ∀w ($\mathcal{F}$[x,w] → $\mathcal{S}$(w,y))
Die Formel $\mathcal{B}$ ist nicht ∀-beschränkt. Im Standardmodell $I^\circ$ über ℕ hat man aber: $\mathcal{B}$[x,y] gilt bei $I^\circ$ gdw. B$I^\circ$(x)$I^\circ$(y).
Allerdings liegt keine Semirepräsentierung vor!
5. Die Formel ¬∃y $\mathcal{B}$[x,y] habe die Gödelnummer b aus ℕ, die Diagonalformel ¬∃y $\mathcal{B}$(b°,y) die Gödelnummer d.
6. Es sei e die Gödelnummer der Formel ∃x ¬x=x (oder einer anderen nicht erfüllbaren VK-Formel).

SATZ 2 (ERSTES GÖDELSCHES UNVOLLSTÄNDIGKEITSTHEOREM für $\mathbb{M}^*$):
Wenn $\mathbb{M}^*$ widerspruchsfrei ist, so ist aus $\mathbb{M}^*$ nicht ¬∃y $\mathcal{B}$(b°,y) ableitbar.
Im Standardmodell $I^\circ$ über $\mathbb{N}_1$ gilt aber ¬∃y $\mathcal{B}$(b°,y), d.h. man hat ¬∃y Bby.

BEWEIS: Wäre ¬∃y $\mathcal{B}$(b°,y) ableitbar, so hätte man ∃y Bby. Andererseits würde die Formel bei Ableitbarkeit im Standardmodell gelten, d.h. ¬∃y Bby. (Nach [1] und Hilfssatz 2.2 gilt $\mathbb{M}^*$ bei Widerspruchsfreiheit auch im Standardmodell.)

¬∃y Sey besagt: Es gibt keinen Beweis von ∃x ¬x=x. Dies ist eine sehr natürliche Formulierung der Widerspruchsfreiheit von $\mathbb{M}^*$.
Das 2. Gödelsche Unvollständigkeitstheorem behauptet nun für eine gewisse natürliche Wahl der VK-Formel $\mathcal{S}$, daß bei Widerspruchsfreiheit von $\mathbb{M}^*$ auch die VK-Formel ¬∃y $\mathcal{S}$(e°,y) nicht aus $\mathbb{M}^*$ ableitbar ist, d.h. eine Formel, die im Standardmodell $I^\circ$ über $\mathbb{N}_1$ auf natürliche Weise die Widerspruchsfreiheit von $\mathbb{M}^*$ ausdrückt.
Benötigt wird zum 2. Unvollständigkeitstheorem die Ableitbarkeit aus $\mathbb{M}^*$ von
¬∃y $\mathcal{S}$(e°,y) → ¬∃y $\mathcal{B}$(b°,y) .
Wir zeigen zunächst die Ableitbarkeit von
¬∃y $\mathcal{S}$(d°,y) → ¬∃y $\mathcal{B}$(b°,y) .
Begründung: Sonst würde in einem Modell $I$ gelten ¬∃y $\mathcal{S}$(d°,y) und ∃y $\mathcal{B}$(b°,y) . Letzteres ergibt aber die Gültigkeit von ∃y $\mathcal{S}$(d°,y), da wegen der Semirepräsentierung von F durch $\mathcal{F}$ bei $I$ die Formel $\mathcal{F}$(b°,d°) gilt.
Abzuleiten bleibt also
¬∃y $\mathcal{S}$(e°,y) → ¬∃y $\mathcal{S}$(d°,y) , d.h.
∃y $\mathcal{S}$(d°,y) → ∃y $\mathcal{S}$(e°,y) . (°)
Dabei hat man nach dem 1. Unvollständigkeitstheorem ¬∃y Sey → ¬∃y Sdy, d.h.
∃y Sdy → ∃y Sey . (°°)
Um die Ableitbarkeit von (°) zu zeigen, ist die Gültigkeit von (°) in jedem Modell von $\mathbb{M}^*$ zu zeigen, während sie gemäß (°°) nach dem ersten Unvollständigkeitstheorem nur im Standardmodell behauptet wird.

HILFSSATZ 3. Ist $I$ das Standardmodell $I^\circ$ über $\mathbb{N}_1$, so gilt:
$S_M$ac ⇔ Ga ∧ 100$f_0$(a)BEGc
∧ ∀b $_{\text{bENDc}}$ ∃upq (¬100BEGb
∨ b =100$f_0$(u)1 ∧ (Mu ∨ Hu)
∨ b =100$f_0$(u)100$f_0$(p)q
∧ (Mu ∨ Hu
∨ ∃vw(100$f_0$(v)PW100$f_0$(p)q ∧ 100$f_0$(w)PW100$f_0$(p)q ∧ Kwvu)))
(Der Einfachheit halber lassen wir den Zusatz ° jeweils weg.)

BEWEIS.
Zu "→": Wegen $S_M ac$ ist
$c = 100f_0(a_k)100f_0(a_{k-1})100.............100f_0(a_1)1$, wobei
$a_k,...,a_1$ eine Folge von Gödelnummern von VK-Formeln mit $a_k=a$ ist, so daß für jedes $a_i$ mit $0\leq i\leq k$ gilt: $a_i \in M$ oder $Ha_i$ oder es gibt r,s mit $1\leq r,s\leq i-1$ mit $Ka_r a_s a_i$.
Man verifiziert leicht die Behauptung.
Zu "←".
Es gelte
bENDc ∧ 100BEGb. (1)
Dann gibt es u,p,q mit
$b = 100f_0(u)1 \wedge (Mu \vee Hu)$
$\vee\ b = 100f_0(u)100f_0(p)q$
$\wedge\ (Mu \vee Hu \vee \exists vw(100f_0(v)PW100f_0(p)q \wedge 100f_0(w)PW100f_0(p)q \wedge Kwvu))$
Durch Induktion über die Länge (Stellenzahl) von b zeigen wir
$S_M ub$. (2)
Induktionsanfang: Für das kürzeste b mit (1) hat man
$b = 100f_0(u)1 \wedge (Mu \vee Hu)$,
also (2).
Induktionsschritt. Man hat $b = 100f_0(u)100f_0(p)q$ und
$Mu \vee Hu \vee \exists vw(100f_0(v)PW100f_0(p)q \wedge 100f_0(w)PW100f_0(p)q \wedge Kwvu)$
Die Behauptung ergibt sich mit der Induktionsvoraussetzung.

Wir beweisen nun zwei weitere einfache Hilfssätze. Den Beweis der Ableitbarkeit der jeweiligen Formeln führen wir durch den Nachweis der Gültigkeit der Formeln in einem beliebigen Modell $I$ von $\mathbb{M}^*$ über D.

HILFSSATZ 4. Aus $\mathbb{M}^*$ ist ableitbar
1. **∀abcd (ab = cd → aBEGc ∧ dENDb ∨ cBEGa ∧ bENDd)**
2. **∀ab ab ≠ 100**

BEWEIS. Wir verwenden $A_5$.
Zu 1. a) Es gelte ab=cd ∧ dENDb.
Für b=d erhält man nach $A_2$
a=c, also aBEGc.
Für b≠d hat man für ein u
b=ud, also
aud = cd, also nach $A_2$
au = c, also ebenfalls aBEGc.
b) Es gelte ab=cd ∧ ¬dENDb, nach $A_5$ also
bENDd ∧ b≠d, also für ein u
d = ub, also
ab = cub, also nach $A_2$
a = cu, also cBEGa.
Zu 2.
Aus $ab = f_0(f_0(1))$ erhält man für ein u
$b = f_0(u)$, also
$au = f_0(1)$, und damit für ein v
av = 1 im Widerspruch zu Hilfssatz 1.1.

HILFSSATZ 5. Aus $\mathbb{M}^{\wedge}$ ist ableitbar
**$bENDy_1y_2 \wedge 100BEGb$**
**$\rightarrow bENDy_2 \vee \exists p\ (b=py_2 \wedge pENDy_1 \wedge 100BEGp)$**

BEWEIS.
1. Fall: Es sei $b=y_1y_2$.
Man wählt dann $p=y_1$. Zu zeigen ist 100BEGp:
Wegen $100BEGy_1y_2$ und Hilfssatz 4.2 gilt für ein v
$100v = y_1y_2$.
Nach Hilfssatz 4.1 hat man
1.1 $100BEGy_1 \wedge y_2ENDv$ oder
1.2 $y_1BEG100 \wedge vENDy_2$.
Im Falle 1.1 hat man die Behauptung 100BEGp.
Im Falle 1.2 hat man nach Hilfssatz 4.2 $y_1=100$, also ebenfalls 100BEGp.
2. Fall. Es gelte $ub = y_1y_2$.
Nach Hilfssatz 4.1 gilt
$uBEGy_1 \wedge y_2ENDb \vee y_1BEGu \wedge bENDy_2$ .
Für $bENDy_2$ ist nichts mehr zu zeigen. Wir können daher annehmen
$uBEGy_1 \wedge b=py_2$ für ein p.
Wegen 100BEGb hat man nach Hilfssatz 4.2
$py_2 = 100w$.
Analog zum 1. Fall erhält man
100BEGp.
Aus $ub=y_1y_2$ und $b=py_2$ erhält man außerdem
$upy_2 = y_1y_2$, also nach $A_2$
$up = y_1$ und damit
$pENDy_1$.
Damit ist Hilfssatz 5 bewiesen.

Nun wählen wir $\forall$-beschränkte Formeln $G$, $M$, $H$, $K$, die die Prädikate G, M, H, K semirepräsentieren (vgl. Satz 1).

$$
\begin{aligned}
S_M[x,y] :\equiv\ & \boldsymbol{G(x) \wedge 100f_0(x)BEGy} \\
& \boldsymbol{\wedge \forall b_{\,bENDy} \exists upq\ (\neg 100BEGb} \\
& \quad \boldsymbol{\vee\ b = 100f_0(u)1 \wedge (M(u) \vee H(u))} \\
& \quad \boldsymbol{\vee\ b = 100f_0(u)100f_0(p)q} \\
& \qquad \boldsymbol{\wedge\ (M(u) \vee H(u)} \\
& \qquad\quad \boldsymbol{\vee\ \exists vw(100f_0(v)PW100f_0(p)q \wedge 100f_0(w)PW100f_0(p)q \wedge K(w,v,u))))}
\end{aligned}
$$

Das Prädikat $S_Mac$ wird nach Hilfssatz 3 durch die $\forall$-beschränkte Formel $S_M[x,y]$ semirepräsentiert. Spezialfälle:
1. M ist die Menge M° der Gödelnummern der Formeln aus $\mathbb{M}^{\wedge}$. Dann gilt
$S_Mac \leftrightarrow Sac$. Statt $S_{M°}[x,y]$ schreiben wir $S[x,y]$.
2. M ist die Menge M°° = M°∪{d}; als $M[p]$ wählen wir $M°[p] \vee p = d°$, wobei die $\forall$-beschränkte Formel $M°[p]$ die Menge M° semirepräsentieren möge.

SATZ 3 (ZWEITES GÖDELSCHES UNVOLLSTÄNDIGKEITSTHEOREM FÜR $\mathbb{M}^*$):
Wenn $\mathbb{M}^*$ widerspruchsfrei ist, so ist aus $\mathbb{M}^*$ nicht $\neg\exists y\ S(e^\circ,y)$ ableitbar.

BEWEIS: Die Bezeichnungen $I$,D,$D_0$ seien wie in Hilfssatz 2.2 gewählt.
Wir müssen nur die Gültigkeit von (°) bei $I$ zeigen. Wegen (°°) gilt im Standardmodell $I^\circ$ über $\mathbb{N}_1$ die Formel $S_{M^{\circ\circ}}(e^\circ,y)$ für eine geeignete Wahl von $I^\circ(y)$, wegen der Isomorphie der Strukturen daher auch bei der auf $D_0$ beschränkten Interpretation $I$ und wegen der $\forall$-Beschränktheit auch bei der Interpretation $I$ über D selbst für eine geeignete Wahl von $I(y)=y_1$. Es gelte nun außerdem $S(d^\circ,y)$ für eine geeignete Wahl von $I(y)=y_2$.
Es sei $y_3= y_1y_2$.
Behauptung: $S(e^\circ,y)$ gilt bei $I$ für $I(y)=y_3$. Offensichtlich ist e Gödelnummer einer VK-Formel; ferner gilt $100f_0(e^\circ)BEGy_1y_2$ wegen $100f_0(e^\circ)BEGy_1$.
Daher genügt es, für ein beliebiges b mit
$bENDy_1y_2 \wedge 100BEGb$ für gewisse u,p,q zu zeigen:

$$b =100f_0(u)1 \wedge (M^\circ(u) \vee H(u)) \quad (1)$$
$$\vee\ b =100f_0(u)100f_0(p)q \quad (2)$$
$$\wedge(M^\circ(u)\vee H(u)\vee \exists vw(100f_0(v)PW100f_0(p)q \wedge 100f_0(w)PW100f_0(p)q \wedge K(w,v,u)))$$

Nach Hilfssatz 5 hat man einen der beiden folgenden Fälle:
1. $bENDy_2$
2. $b=py_2 \wedge pENDy_1 \wedge 100BEGp$ für ein p.

Im 1. Fall ergibt sich (1)$\vee$(2) aus der Gültigkeit von $S(d^\circ,y)$ bei $I$ mit $I(y)=y_2$.
Im 2. Fall hat man wegen der Gültigkeit von $S_{M^{\circ\circ}}(e^\circ,y)$ bei $I$ mit $I(y)=y_1$ für gewisse r,s,t

$$p =100f_0(t)1 \wedge (M^\circ(t) \vee t=d^\circ \vee H(t)) \text{ oder}$$
$$p =100f_0(t)100f_0(r)s \wedge (M^\circ(t) \vee t=d^\circ \vee H(t)$$
$$\vee \exists vw(100f_0(v)PW100f_0(r)s \wedge 100f_0(w)PW100f_0(r)s \wedge K(w,v,u)))$$

Für u = t erhält man wegen $b=py_2$ die Behauptung (2), wobei man für den Fall $t=d^\circ$ wiederum die Gültigkeit von $S(d^\circ,y)$ bei $I$ mit $I(y)=y_2$ verwendet.

LITERATUR.


[1] Gödel, K.: Die Vollständigkeit des Axiome des logischen Funktionenkalküls. Monatsh. Math. und Phys. 37 (1930), S.349-360.
[2] Gödel, K.: Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. Monatsh. Math. und Phys. 38 (1931), S. 173-198.
[3] Hilbert,D. und Bernays, P.: Grundlagen der Mathematik I und II. Zweite Auflage 1968/1970. Springer-Verlag.
[4] Smullyan, R. M: Theory of formal systems. Princeton 1961.
[5] Deutsch, M. Berechenbarkeit, Entscheidbarkeit, Aufzählbarkeit über Nachfolgerbereichen. Bremen 2003.
[6] Deutsch, M.: A simpler proof and a refining of Gödel's second incompleteness theorem. (with supplement). Bremen 2007.