MICHAEL DEUTSCH: ERGÄNZUNG ZUM AUFSATZ
26.10.07 "EIN EINFACHERER BEWEIS UND EINE VERSCHÄRFUNG DES ZWEITEN GÖDELSCHEN UNVOLLSTÄNDIGKEITSTHEOREMS"

Den Rückgriff auf den ziemlich mühsam zu beweisenden Satz aus [5], Seite 152, kann man vermeiden, wenn man sich auf Gödelisierungen der E-Formeln und der Beweise von E-Formeln beschränkt, deren Gödelnummern in einer gewissen Teilmenge von $\mathbb{N}$ liegen. So enthält $\mathbb{H}$ als Teilbereich die Gesamtheit $\mathbb{N}^*$ der von Neumannschen natürlichen Zahlen mit

$0^* = \emptyset$,
$(n+1)^* = \{0^*,\ldots,n^*\}$.

Dieser Teilmenge $\mathbb{N}^*$ von $\mathbb{H}$ entspricht bei der Abbildung ϕ die Teilmenge
$\mathbb{N}^{\sim} = \{\phi(x) \mid x \in \mathbb{N}^*\}$
von $\mathbb{N}$. Es läßt sich nun sehr einfach zeigen, daß sich alle rekursiv-aufzählbaren Prädikate über $\mathbb{N}^{\sim}$ durch eine $\forall$-beschränkte Formel semirepräsentieren lassen.
Wir schreiben $\underline{x}$ für $x_1,\ldots,x_n$ bzw. $x_1\ldots x_n$.

DEFINITION:
Ein Prädikat über $\mathbb{H}$ gehöre zu RA, gdw. es aus den Prädikaten $x \in y$, $x \notin y$ durch endlich häufige Anwendung folgender Schemata erzeugt werden kann:
1. Verknüpfung von Prädikaten mit $\wedge$ bzw. $\vee$,
2. Anwendung des unbeschränkten $\exists$-Quantors,
3. Anwendung des durch $\in$ beschränkten $\forall$-Quantors, d.h. Übergang von Q zu $Pb\underline{x} \leftrightarrow \forall a_{a \in b}\, Q\underline{x}a$,
4. Permutation von Variablen,
5. Identifizierung von Variablen.

BEISPIELE:
1. Das Gleichheitsprädikat $Puv \leftrightarrow u=v$ über $\mathbb{H}$ gehört zu RA wegen
$u = v \leftrightarrow \forall a_{a \in u}\, a \in v \wedge \forall a_{a \in v}\, a \in u$.
2. Das Prädikat $u=\emptyset$ über $\mathbb{H}$ gehört zu RA wegen
$u=\emptyset \leftrightarrow \forall a_{a \in u}\, a \notin u$.
3. Das Prädikat $Puv \leftrightarrow u = \{v\}$ über $\mathbb{H}$ gehört zu RA wegen
$u = \{v\} \leftrightarrow v \in u \wedge \forall a_{a \in u}\, a=v$.
4. Das Prädikat $Puvw \leftrightarrow u = v \cup w$ über $\mathbb{H}$ gehört zu RA wegen
$u = v \cup w \leftrightarrow \forall a_{a \in u}\, (a \in v \vee a \in w) \wedge \forall a_{a \in v}\, a \in u \wedge \forall a_{a \in w}\, a \in u$.
5. Das Prädikat $Puw \leftrightarrow w = u \cup \{u\}$ über $\mathbb{H}$ gehört zu RA wegen der Zulässigkeit von $\exists$-Quantoren, nämlich
$w = u \cup \{u\} \leftrightarrow \exists a\, (w = u \cup a \wedge a=\{u\})$.
6. Die Prädikate $w = \{u,v\}$, $w = \langle u,v\rangle$ (Kuratowski-Paar) und $\langle u,v\rangle \in w$ über $\mathbb{H}$ gehören ebenfalls wegen der Zulässigkeit von $\exists$-Quantoren zu RA.
7. Das Prädikat $u \in \mathbb{N}^*$ über $\mathbb{H}$ gehört zu RA wegen
$u \in \mathbb{N}^* \leftrightarrow \forall a_{a \in u}\, (a = \emptyset \vee \exists b\, (a = b \cup \{b\} \wedge b \in u))$.
Daher gehört mit jedem Prädikat über $\mathbb{H}$ auch seine Beschränkung auf $\mathbb{N}^*$ zu RA.
8. Für jedes feste n aus $\mathbb{N}^*$ gehört das Prädikat $x = n^*$ zu RA (Induktion über n).

HILFSSATZ 1:
Jedes rekursiv aufzählbare Prädikat über $\mathbb{N}^*$ gehört zu RA.

BEWEIS:
Da wir in RA über den $\exists$-Quantor verfügen und jedes n-stellige rekursiv aufzählbare

Prädikat P über $\mathbb{N}^*$ in der Form
$Px_1 \ldots x_n \leftrightarrow \exists yz\ (y \in \mathbb{N}^* \wedge f(x_1,\ldots,x_n,y) = z \wedge z=0^*)$
mit einer primitiv-rekursiven Funktion f über $\mathbb{N}^*$ schreiben können, brauchen wir nur zu zeigen, daß der Graph jeder primitiv-rekursiven Funktion über $\mathbb{N}^*$ zu RA gehört.
1) Zum Prädikat $v = 0$ siehe Beispiel 2.
2) Das Prädikat $v = u'$ über $\mathbb{N}^*$ gehört als Beschränkung des Prädikates $v = u \cup \{u\}$ auf $\mathbb{N}^*$ zu RA.
3) Das Prädikat $Pu_1 \ldots, u_n v \leftrightarrow v=u_i$ über $\mathbb{N}^*$ gehört zu RA wegen
$Pu_1 \ldots u_n v \leftrightarrow v=u_i \wedge u_1 \in \mathbb{N}^* \wedge \ldots \wedge u_n \in \mathbb{N}^*$.
4) Für $f(\underline{x}) = h(g_1(\underline{x}),\ldots,g_m(\underline{x}))$ hat man
$z = f(\underline{x}) \leftrightarrow \exists y_1 \ldots y_m\ (z = h(y_1,\ldots,y_m) \wedge y_1=g_1(\underline{x}) \wedge \ldots \wedge y_m=g(\underline{x}))$.
5) Für die Funktion f gelte
$f(\underline{x},0) = g(\underline{x})$
$f(\underline{x},y') = h(\underline{x},y,f(\underline{x},y))$.
Dann hat man
$$z = f(\underline{x},y) \leftrightarrow \exists a\ (\langle y,z\rangle \in a \wedge \forall b_{b \in a}\ (b=\langle 0,w\rangle \wedge w=g(\underline{x}) \vee \exists cduv\ (b=\langle c,d\rangle \wedge c=u \cup \{u\} \wedge \langle u,v\rangle \in a \wedge d=h(\underline{x},u,v)))) .$$
Zu "→":
Man wähle $a = \{\langle 0,f(\underline{x},0)\rangle,\ldots,\langle y,f(\underline{x},y)\rangle\}$.
Zu "←":
Offenbar lassen alle Elemente von a in der Form $\langle c,d\rangle$ schreiben. Durch Induktion über den Rang von c zeigen wir $c \in \mathbb{N}^* \wedge d=f(\underline{x},c)$. Damit ist wegen $\langle y,z\rangle \in a$ alles gezeigt.
Für $c=\emptyset$ ist die Behauptung klar.
Für $c \neq \emptyset$ ist $c=u \cup \{u\}$ für ein u, und es gibt ein v mit $\langle u,v\rangle \in a$. Da der Rang von u kleiner als der von c ist, gilt nach Induktionsvoraussetzung $u \in \mathbb{N}^* \wedge v=f(\underline{x},u)$, also auch $c \in \mathbb{N}^*$. Wegen $d=h(\underline{x},u,v)$ hat man die Behauptung $d=f(\underline{x},c)$.

Hiermit erhält man sofort, daß sich alle rekursiv aufzählbaren Prädikate über $\mathbb{N}^*$ durch eine $\forall$-beschränkte Formel semirepresentieren lassen. Man beschränkt sich nun auf Gödelisierungen von E-Formeln bzw. Beweisen von E-Formeln, deren Gödelnummern in $\mathbb{N}^*$ liegen. Hierzu ersetzt man eine beliebige Gödelisierung g mit Bildern aus $\mathbb{N}^*$ durch $\phi \circ g$.