MICHAEL DEUTSCH: 29.9.2007

EIN EINFACHERER BEWEIS UND EINE VERSCHÄRFUNG DES ZWEITEN GÖDELSCHEN UNVOLLSTÄNDIGKEITSTHEOREMS

Wir wollen die von Gödel benutzten Grundbegriffe 0,1,+,× durch einen einzigen Begriff ersetzen, der sich auf die übliche Dualdarstellung natürlicher Zahlen bezieht:
xEy :gdw. y hat an der x-ten Stelle in der Dualdarstellung die Ziffer 1 (die Stellen werden von rechts mit Null beginnend gezählt)
Vorteile der neuen Formulierung der Gödelschen Unvollständigkeitstheoreme:
1. ein äußerst kurzer Beweis des zweiten Gödelschen Unvollständigkeitstheorems,
2. sehr einfache Axiome, die auch direkt mengentheoretisch deutbar sind.

AXIOMENSYSTEM $\mathbb{M}$:
A_1 $\forall xy\ (\forall z\ (zEx \leftrightarrow zEy) \rightarrow x=y)$
A_2 $\exists z\ \forall u\ \neg uEz$
A_3 $\forall x \exists z \forall u\ (uEz \leftrightarrow u=x)$
A_4 $\forall xy \exists z \forall u\ (uEz \leftrightarrow uEx \vee uEy)$

DEFINITION. 1. Es sei $\mathbb{H}$ der Bereich der erblich endlichen Mengen, d.h. der Mengen, die sich aus der leeren Menge $\emptyset$ mit endlich vielen Übergängen folgender Art erzeugen lassen: a) Übergang von x zu $\{x\}$, b) Übergang von x,y zu $x \cup y$.
2. Als bijektive Gödelisierung von $\mathbb{H}$ verwenden wir die folgende Abbildung ϕ:
$\phi(\emptyset) = 0$, $\phi(\{x\}) = 2^{\phi(x)}$, $\phi(x \cup y) = \phi(x)+\phi(y)$ falls $x \cap y=\emptyset$.
Bei dieser bijektiven Gödelisierung ϕ gilt: $x \in y$ gdw. $\phi(x)E\phi(y)$.
3. Eine Formel A erster Stufe mit Identität heißt E-Formel genau dann, wenn sie neben E höchstens Individuenvariablen (kurz: Variablen) frei enthält. Die Anzahl der verschiedenen frei vorkommenden Variablen heißt Stelligkeit der Formel. Als Variablen verwenden wir **I**, **II**, **III**,... . Die Anzahl ihrer Striche heißt Index. Formeln der Art **xEy** und **x=y** heißen Primformeln.
4. Eine E-Formel heißt $\forall$-beschränkt genau dann, wenn sie sich aus Primformeln und negierten Primformeln durch endlich viele Übergänge von a) A,B zu $(A \wedge B)$ bzw. $(A \vee B)$, b) von A zu $\exists x\ A$ c) von A zu $\forall x\ (\neg xEy \vee A)$ $(\forall x_{xEy}\ A)$ erzeugen läßt.
5. Für jedes i aus $\mathbb{N}$ und jede Variable **y** definieren wir nun eine mit **y** = i° bezeichnete $\forall$-beschränkte Formel: **y** = 0° stehe für $\forall u_{uEy}\ \neg uEy$
Es gelte mEi gdw. $m=m_1 \vee ... \vee m=m_k$. **y** = i° stehe dann für
$\forall u\ (\neg uEy \vee u=m_1° \vee ... \vee u=m_k°) \wedge \exists u\ (u=m_1° \wedge uEy) \wedge ... \wedge \exists u\ (u=m_k° \wedge uEy)$.
Für beliebige m,n aus $\mathbb{N}$ stehe m° = n° für $\exists y\ (y = m° \wedge y = j°)$.
(Eine Festlegung der in den Abkürzungen verwendeten Variablen wäre nur für eine detaillierte Angabe einer Gödelisierung aller E-Formeln erforderlich.)
6. Hat eine n-stellige E-Formel B als freie Variablen genau $x_1,...,x_n$, wobei diese paarweise verschieden und nach aufsteigendem Index geordnet sind, so schreiben wir deutlicher auch $B[x_1,...,x_n]$ statt B. Ferner wird für beliebige Variablen $y_1,...,y_n$ mit $B(y_1,...,y_n)$ die Formel bezeichnet, die aus B durch simultane Substitution von y_m für x_m $(1 \leq m \leq n)$ hervorgeht. Ferner bezeichnen wir für ein beliebiges m mit $1 \leq m \leq n$ und ein beliebiges i aus $\mathbb{N}$ mit $B(x_1,...,x_{m-1},i°,x_{m+1},...,x_n)$ die Formel $\exists x_m(x_m=i° \wedge B[x_1,...,x_n])$. Entsprechend sind mehrfache Einsetzungen zu verstehen, etwa für natürliche Zahlen i_1,i_2,i_3 und beliebige Variablen $y_4,...,y_n$ die Formel $B(i_1°,i_2°,i_3°,y_4,...,y_n)$.
7. Das n-stellige Prädikat P über $\mathbb{N}$ heißt in $\mathbb{M}$ durch die E-Formel A *semirepräsentierbar*, gdw. A n-stellig ist und

a) für alle $i_1,\dots,i_n$ aus $\mathbb{N}$ im Falle $Pi_1\dots i_n$ die Formel $A(i_1^\circ,\dots,i_n^\circ)$ aus $\mathbb{M}$ ableitbar ist,
b) für die Standardinterpretation I° über $\mathbb{N}$, bei der E durch E gedeutet wird, gilt: I° ist ein Modell von $A(i_1^\circ,\dots,i_n^\circ)$ gdw. $Pi_1\dots i_n$.
8. Es sei AL die Klasse der Prädikate über $\mathbb{H}$, die sich durch aussagenlogische Operationen aus Gleichungen bilden lassen, in denen nur Funktionen über $\mathbb{H}$ auftreten, die aus $\lambda\emptyset$, $\lambda x\ \{x\}$, $\lambda xy\ x\cup y$ und Identitätsfunktionen $\lambda x_1\dots x_n\ x_i$ $(1\leq i\leq n)$ durch simultanes Einsetzen gebildet sind.

HILFSSATZ: Für beliebige x,y aus $\mathbb{N}$ mit $x=y$ bzw. $\neg x=y$ ist aus $\mathbb{M}$ die Formel $x^\circ=y^\circ$ bzw. $\neg x^\circ=y^\circ$ ableitbar.

BEWEIS: Es genügt zu zeigen, daß die genannten Formeln in einem beliebigen Modell I von $\mathbb{M}$ über D gelten. Es stehe $\mathbb{E}$ für $I(\mathrm{E})$, und es sei D_0 der Durchschnitt aller Teilbereiche von D, über denen die Axiome $A_1,\dots,A_4$ gelten.
Die Modelle $(\in;\mathbb{H})$, $(\mathrm{E};\mathbb{N})$ und $(\mathbb{E};D_0)$ von $\mathbb{M}$ sind, wie man leicht zeigt, isomorph (vgl. [4], S.131). Ein Isomorphismus von $(\mathrm{E};\mathbb{N})$ auf $(\mathbb{E};D_0)$ ist die Abbildung ψ, die jedem i aus $\mathbb{N}$ das Element $i^\wedge$ aus D_0 zuordnet, wobei gelte:
α) $0^\wedge$ sei das nach A_1,A_2 eindeutig bestimmte x aus D_0 mit $\forall u\ \neg u\mathbb{E}x$.
β) Es gelte für $i\neq 0$ nun mEi gdw. $m=m_1 \vee\dots\vee m=m_k$. Dann sei $i^\wedge$ das nach A_1,A_3,A_4 eindeutig bestimmte Element x aus D_0 mit $\forall u\ (u\mathbb{E}x \leftrightarrow u = m_1^\wedge \vee\dots\vee u = m_k^\wedge)$.
a) Es gelte $x=y$. Wegen der Axiome gilt bei I offensichtlich $x^\circ=y^\circ$, d.h. $\exists u\ (u = x^\circ \wedge u = y^\circ)$. b) Es gelte $x\neq y$. Wir müssen beweisen, daß bei I die Formel $\neg\exists u\ (u=x^\circ \wedge u=y^\circ)$ gilt. Nun gilt aber die Formel $u=x^\circ$ bei I genau dann, wenn $I(u)=x^\wedge$. Wegen $x\neq y$ gilt $x^\wedge\neq y^\wedge$, womit alles gezeigt ist.

BEMERKUNG: Jede über D_0 bei der Interpretation von E durch $\mathbb{E}$ (beschränkt auf D_0) geltende abgeschlossene $\forall$-beschränkte Formel gilt auch über D bei Interpretation von E durch $\mathbb{E}$, weil mit jedem x aus D_0 auch alle u aus D mit $u\mathbb{E}x$ in D_0 liegen.

SATZ 1: Jedes rekursiv aufzählbare Prädikat über $\mathbb{N}$ ist durch eine $\forall$-beschränkte Formel in $\mathbb{M}$ semirepräsentierbar.

BEWEIS: Es sei P ein n-stelliges ϕ-rekursiv aufzählbares Prädikat über $\mathbb{H}$. Nach [5], Seite 152, gibt es ein r aus $\mathbb{N}$ und ein (n+r+2)-stelliges Prädikat Q aus AL mit
$Px_1\dots x_n \leftrightarrow \exists a\ \forall b\ _{b\subseteq a}\ \exists c_1\dots\exists c_r\ Qabc_1\dots c_r x_1\dots x_n$.
Das Prädikat Q läßt sich offensichtlich in der Form
$Qabc_1\dots c_r x_1\dots x_n \leftrightarrow \exists d_1\dots d_s\ Rabc_1\dots c_r d_1\dots d_s x_1\dots x_n$
darstellen, wobei R... eine Konjunktion von Graphen der Funktionen $\lambda\emptyset$, $\lambda x\ \{x\}$, $\lambda xy\ x\cup y$ und einer Verknüpfung mit $\wedge,\vee$ von Gleichungen $x=y$ und Ungleichungen $x\neq y$ ist. Die Graphen lassen sich aber alle mit beschränkten Quantoren darstellen:

$$z = \emptyset \quad\leftrightarrow\quad \forall u\ _{u\in z}\ \neg u\in z$$
$$z = \{x\} \quad\leftrightarrow\quad x\in z \wedge \forall u\ _{u\in z}\ u=x$$
$$z = x\cup y \quad\leftrightarrow\quad \forall u\ _{u\in z}\ (u\in x \vee u\in y) \wedge \forall u\ _{u\in x}\ u\in z \wedge \forall u\ _{u\in y}\ u\in z$$

Trivialerweise gilt außerdem
$\forall b\ _{b\subseteq a}\ \exists c_1\dots\exists c_r\ Qab\dots \leftrightarrow \forall b\ _{b\in a}\ \exists c_1\dots\exists c_r\ Qab\dots \wedge \exists c_1\dots\exists c_r\ Qaa\dots$
Ersetzt man nun überall $\in$ durch E, so erhält man eine Darstellung aller rekursiv aufzählbaren Prädikate über $\mathbb{N}$. Schreibt man nun alles in Fettschrift, so erhält man eine Formel, die Forderung b) bei der Semirepräsentierung von Prädikaten erfüllt. Da es sich um eine $\forall$-beschränkte Formel handelt, gilt aber auch a).

Wir gehen nun von irgendeiner Gödelisierung aller E-Formeln und irgendeiner Gödelisierung aller Beweise von E-Formeln im gewählten Regelsystem 1. Stufe aus dem Axiomensystem $\mathbb{M}$ aus. Das anschließend definierte Prädikat B und die Funktion $\underline{f}$ sind für jede Wahl der Gödelisierungen entscheidbar bzw. berechenbar. Der Nachweis der Rekursivität (ohne Benutzung der Churchschen These) setzt natürlich voraus, daß die Gödelisierungen explizit angegeben werden. Er wird hier nicht ausgeführt.

DEFINITION:
1. $Bac \Leftrightarrow$ a ist Gödelnummer einer E-Formel und
c ist Gödelnummer eines Beweises aus $\mathbb{M}$ der Diagonalformel zu a

Dabei verstehen wir unter der Diagonalformel einer einstelligen E-Formel $\mathcal{A}[x]$ mit der Gödelnummer a die Formel $\mathcal{A}(a^\circ)$. Die Diagonalformel einer nicht einstelligen E-Formel sei diese Formel selbst.

2. $Sac \Leftrightarrow$ a ist Gödelnummer einer E-Formel und
c ist Gödelnummer eines Beweises aus $\mathbb{M}$ der Formel zu a

$\mathcal{S}[x,y]$ sei eine $\forall$-beschränkte Formel, die das Prädikat S semirepräsentiert.

3. $\underline{f}(x)$ sei die Gödelnummer der zu x gehörenden Diagonalformel, falls x die Gödelnummer einer einstelligen E-Formel ist. $\underline{f}(x) = x$ sonst. $Fxy :\Leftrightarrow y = \underline{f}(x)$.
$\mathcal{F}[x,w]$ sei eine $\forall$-beschränkte Formel, die das Prädikat F semirepräsentiert.

4. $\mathcal{B}[x,y] \equiv \forall w\ (\mathcal{F}[x,w] \rightarrow \mathcal{S}(w,y))$
Die Formel $\mathcal{B}$ ist <u>nicht</u> $\forall$-beschränkt. Im Standardmodell $\mathcal{I}^\circ$ über $\mathbb{N}$ hat man:
$\mathcal{B}[x,y]$ gilt bei $\mathcal{I}^\circ$ gdw. $B\mathcal{I}^\circ(x)\mathcal{I}^\circ(y)$.
Allerdings liegt i.a. keine Semirepräsentierung vor!

5. Die Formel $\neg\exists y\ \mathcal{B}[x,y]$ habe die Gödelnummer b aus $\mathbb{N}$, die Diagonalformel $\neg\exists y\ \mathcal{B}(b^\circ,y)$ die Gödelnummer d.

6. Es sei e die Gödelnummer der Formel $\exists x\ \neg x{=}x$.

SATZ 2 (ERSTES GÖDELSCHES UNVOLLSTÄNDIGKEITSTHEOREM für $\mathbb{M}$):
Wenn $\mathbb{M}$ widerspruchsfrei ist, so ist aus $\mathbb{M}$ nicht $\neg\exists y\ \mathcal{B}(b^\circ,y)$ ableitbar.
Im Standardmodell $\mathcal{I}^\circ$ über $\mathbb{N}$ gilt aber $\neg\exists y\ \mathcal{B}(b^\circ,y)$, d.h. man hat $\neg\exists y\ Bby$.

BEWEIS: Wäre $\neg\exists y\ \mathcal{B}(b^\circ,y)$ ableitbar, so hätte man $\exists y\ Bby$. Andererseits würde die Formel bei Ableitbarkeit im Standardmodell gelten, d.h. $\neg\exists y\ Bby$. (Nach [1] und dem Hilfssatz gilt $\mathbb{M}$ bei Widerspruchsfreiheit auch im Standardmodell.)

$\neg\exists y\ Sey$ besagt: Es gibt keinen Beweis von $\exists x\ \neg x{=}x$. Dies ist eine sehr natürliche Formulierung der Widerspruchsfreiheit von $\mathbb{M}$.
Das 2. Gödelsche Unvollständigkeitstheorem behauptet nun <u>für eine gewisse natürliche Wahl der E-Formel $\mathcal{S}$</u>, daß bei Widerspruchsfreiheit von $\mathbb{M}$ auch die E-Formel $\neg\exists y\ \mathcal{S}(e^\circ,y)$ nicht aus $\mathbb{M}$ ableitbar ist, d.h. eine Formel, die im Standardmodell $\mathcal{I}^\circ$ über $\mathbb{N}$ auf natürliche Weise die Widerspruchsfreiheit von $\mathbb{M}$ ausdrückt.
Benötigt wird zum 2. Unvollständigkeitstheorem die Ableitbarkeit aus $\mathbb{M}$ von
$\neg\exists y\ \mathcal{S}(e^\circ,y) \rightarrow \neg\exists y\ \mathcal{B}(b^\circ,y)$.
Wir zeigen zunächst die Ableitbarkeit von
$\neg\exists y\ \mathcal{S}(d^\circ,y) \rightarrow \neg\exists y\ \mathcal{B}(b^\circ,y)$.
Begründung: Sonst würde in einem Modell $\mathcal{I}$ gelten $\neg\exists y\ \mathcal{S}(d^\circ,y)$ und $\exists y\ \mathcal{B}(b^\circ,y)$. Letzteres ergibt aber die Gültigkeit von $\exists y\ \mathcal{S}(d^\circ,y)$, da wegen der Semirepräsentierung von F durch $\mathcal{F}$ bei $\mathcal{I}$ die Formel $\mathcal{F}(b^\circ,d^\circ)$ gilt.
Abzuleiten bleibt also
$\neg\exists y\ \mathcal{S}(e^\circ,y) \rightarrow \neg\exists y\ \mathcal{S}(d^\circ,y)$, d.h.
$\exists y\ \mathcal{S}(d^\circ,y) \rightarrow \exists y\ \mathcal{S}(e^\circ,y)$. $\qquad (^\circ)$
Dabei hat man nach dem 1. Unvollständigkeitstheorem $\neg\exists y\ Sey \rightarrow \neg\exists y\ Sdy$, d.h.
$\exists y\ Sdy \rightarrow \exists y\ Sey$. $\qquad (^{\circ\circ})$
Um die Ableitbarkeit von $(^\circ)$ zu zeigen, ist (aus semantischer Sicht) die Gültigkeit

von (°) in <u>jedem</u> Modell von $\mathbb{M}$ zu zeigen, während sie gemäß (°°) nach dem ersten Unvollständigkeitstheorem nur im Standardmodell behauptet wird.
Bei der genaueren Wahl der Formel S wollen wir so allgemein wie möglich bleiben.

In einem beliebigen Modell I über D von $\mathbb{M}$ bezeichnen wir für x,y aus D mit $<x,y>$ dasjenige z mit
$\exists uv \forall w\ ((w\mathbb{E}z \leftrightarrow w=u \vee w=v) \wedge (w\mathbb{E}u \leftrightarrow w=x) \wedge (w\mathbb{E}v \leftrightarrow w=x \vee w=y))$.
Man beachte, daß die Funktion $\lambda xy <x,y>$ über D injektiv ist.
Wir wählen einen vollständigen Ableitungskalkül für die 1. Stufe mit endlich vielen Schlußregeln, die zur Ableitung von Formeln 1. Stufe dienen und von denen jede höchstens zwei Prämissen hat.
Die Menge H der Gödelnummern der E-Formeln, die logische Axiome des Ableitungskalküls sind, ist rekursiv. Dann gibt es ein dreistelliges rekursives Prädikat K über $\mathbb{N}$ mit: Kxyz $\leftrightarrow$
x,y,z sind Gödelnummern von E-Formeln und die E-Formel zu z läßt sich aus den zu x und y gehörenden E-Formeln mit einer Schlußregel gewinnen.
Wir definieren nun zunächst ein etwas allgemeineres Prädikat als S, in dem der feste Bezug auf das Axiomensystem $\mathbb{M}$ durch den Bezug auf irgendeine rekursive Menge M von Gödelnummern von E-Formeln ersetzt wird, nämlich ein zweistelliges Prädikat S_M. Die Menge der Gödelnummern aller E-Formeln bezeichnen wir mit G.
$S_M ac \leftrightarrow Ga \wedge$ c ist eine natürliche Zahl, die für gewisse Zahlen $a_0,..,a_k$ mit $a_k=a$ genau an den Stellen $<a_0,0>...,<a_k,k>$ die Ziffer 1 stehen hat, wobei gilt:
Für jedes i mit $0 \leq i \leq k$ gilt Ma_i oder Ha_i oder es gibt r,s mit $rEi \wedge sEi \wedge Ka_r a_s a_i$.
Zunächst wählen wir $\forall$-beschränkte Formeln $\boldsymbol{G}[\mathbf{x}]$, $\boldsymbol{M}[\mathbf{p}]$, $\boldsymbol{H}[\mathbf{p}]$, $\boldsymbol{K}[\mathbf{p_1},\mathbf{p_2},\mathbf{p}]$, die die Prädikate G, M, H, K semirepräsentieren.
Ferner stehe $\mathbf{z} = <\mathbf{x},\mathbf{y}>$ für
$\exists \mathbf{uv}\ (\mathbf{uEz} \wedge \mathbf{vEz} \wedge \forall \mathbf{w}_{\mathbf{wEz}}\ (\mathbf{w=u} \vee \mathbf{w=v}) \wedge \mathbf{xEu} \wedge \forall \mathbf{w}_{\mathbf{wEu}}\ \mathbf{w=x} \wedge \mathbf{xEv} \wedge \mathbf{yEv}$
$\quad \wedge \forall \mathbf{w}_{\mathbf{wEv}}\ (\mathbf{w=x} \vee \mathbf{w=y}))$
und $\boldsymbol{S}_{\mathbf{M}}[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ für
$\exists \mathbf{uv}\ (\mathbf{u} = <\mathbf{x},\mathbf{v}> \wedge \mathbf{uEy} \wedge \boldsymbol{G}[\mathbf{x}])$
$\quad \wedge \forall \mathbf{u}_{\mathbf{uEy}}\ \exists \mathbf{pq}\ (\mathbf{u} = <\mathbf{p},\mathbf{q}> \wedge (\boldsymbol{M}[\mathbf{p}] \vee \boldsymbol{H}[\mathbf{p}]$
$\qquad \vee \exists \mathbf{q_1 q_2 p_1 p_2 u_1 u_2}\ (\mathbf{q_1 Eq} \wedge \mathbf{q_2 Eq} \wedge \mathbf{u_1} = <\mathbf{p_1},\mathbf{q_1}> \wedge \mathbf{u_2} = <\mathbf{p_1},\mathbf{q_2}>$
$\qquad\qquad \wedge \mathbf{u_1 Ey} \wedge \mathbf{u_2 Ey} \wedge \boldsymbol{K}[\mathbf{p_1},\mathbf{p_2},\mathbf{p}]))$
S_M wird durch diese $\forall$-beschränkte Formel semirepräsentiert. Spezialfälle:
1. M ist die Menge M° der Gödelnummern der Formeln aus $\mathbb{M}$. Dann gilt $S_M ac \leftrightarrow Sac$. Statt $\boldsymbol{S}_{\mathbf{M}°}[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ schreiben wir $\boldsymbol{S}[\mathbf{x},\mathbf{y}]$.
2. M ist die Menge M°° = M°∪{d}; als $\boldsymbol{M}[\mathbf{p}]$ wählen wir $\boldsymbol{M}°[\mathbf{p}] \vee \mathbf{p} = \mathbf{d}°$, wobei $\boldsymbol{M}°[\mathbf{p}]$ die Menge M° semirepräsentieren möge.

SATZ 3 (ZWEITES GÖDELSCHES UNVOLLSTÄNDIGKEITSTHEOREM FÜR $\mathbb{M}$):
Wenn $\mathbb{M}$ widerspruchsfrei ist, so ist aus $\mathbb{M}$ nicht $\neg\exists \mathbf{y}\ \boldsymbol{S}(\mathbf{e}°,\mathbf{y})$ ableitbar.

BEWEIS: Die Bezeichnungen I,D,D_0 seien wie im Beweis des Hilfssatzes gewählt.
Allerdings schreiben wir jetzt der Einfachheit halber E sowohl statt $I°$(E) als auch statt I(E). Durch I bzw. $I°$ interpretierte Formeln schreiben wir in Normalschrift statt in Fettdruck. Dabei wählen wir in D folgende Bezeichnungen:
Für alle $x_1,...,x_n$ aus D schreiben wir 0 bzw. $\{x_1,...,x_n\}$ für das eindeutig bestimmte z aus D mit $\forall u\ \neg uEz$ bzw. $\forall u\ (uEz \leftrightarrow u=x_1 \vee ... \vee u=x_n)$.
Wir müssen nur die Gültigkeit von (°) bei I zeigen. Wegen (°°) gilt im Standard-

modell I° über $\mathbb{N}$ die Formel $S_{M^{\circ\circ}}(e^\circ,y)$ für eine geeignete Wahl von $I^\circ(y)=y_1$, d.h. es gilt über $\mathbb{N}$

$\exists w\ (\langle e,w\rangle Ey_1 \wedge G(e))$ (*)
$\wedge\ \forall u\ (\neg uEy_1 \vee \exists pq\ (u=\langle p,q\rangle \wedge (M^\circ(p) \vee p=d \wedge q=0 \vee H(p)$
$\quad \vee \exists q_1q_2p_1p_2\ (q_1Eq \wedge q_2Eq \wedge \langle p_1,q_1\rangle Ey_1 \wedge \langle p_2,q_2\rangle Ey_1 \wedge K(p_1,p_2,p))))$

Dabei kann stets durch Umnumerieren der Formeln eines Beweises erreicht werden, daß die zu d gehörende Formel am Anfang eines Beweises steht, d.h. $d=a_0$ in obiger Definition des Prädikates S_Mac. Daher kann in obiger Formulierung der Zusatz $q=0$ angebracht werden. Wegen der Isomorphie der Strukturen gilt die Behauptung (*) für ein gewisses y_1 auch über D_0 und wegen der $\forall$-Beschränktheit auch bei der Interpretation I über D für eine geeignete Wahl von y_1 aus D_0. Mit e bzw. d sind dann die entsprechenden Elemente aus D_0 gemeint. Es gelte nun außerdem

$\exists y\ S(d^\circ,y)$ bei I über D, d.h. für gewisse v,y_2 aus D

$\langle d,v\rangle Ey_2 \wedge G(d)$ (**)
$\wedge\ \forall u\ (\neg uEy_2 \vee \exists pq\ (u=\langle p,q\rangle \wedge (M^\circ(p) \vee H(p)$
$\quad \vee \exists q_1q_2p_1p_2(q_1Eq \wedge q_2Eq \wedge \langle p_1,q_1\rangle Ey_2 \wedge \langle p_2,q_2\rangle Ey_2 \wedge K(p_1,p_2,p))))$

Grob gesprochen will man jetzt y_1 und y_3 zu einem neuen Beweis der Formel zu e "vereinigen". Dabei tritt als kleine Schwierigkeit auf, daß im ersten Beweis d als erste Komponente eines Paares mit der zweiten Komponente 0 auftritt, im zweiten Beweis aber als erste Komponente eines Paares mit der zweiten Komponente v. Zur Behebung der Schwierigkeit definieren wir eine einstellige Funktion φ von D_0 in D durch Induktion über D_0.

$\varphi(0) = v$
$\varphi(\{x_1,\ldots,x_n\}) = \{\varphi(x_1),\ldots,\varphi(x_n)\}$.

Für beliebige u,v aus D_0 gilt offensichtlich

uEv gdw. $\varphi(u)E\varphi(v)$ (°°°)

Dem "Beweis"

$y_1 \quad = \{\langle d,0\rangle, \langle a_1,1\rangle,\ldots,\langle a_{k-1},k-1\rangle,\langle e,k\rangle\}$

aus D_0 ordnen wir das folgende Element $y_1{}^\circ$ aus D zu:

$y_1{}^\circ \quad = \{\langle d,\varphi(0)\rangle, \langle a_1,\varphi(1)\rangle,\ldots,\langle a_{k-1},\varphi(k-1)\rangle,\langle e,\varphi(k)\rangle\}$.

Dann gilt wegen (°°°)

$\exists w\ (\langle e,w\rangle Ey_1{}^\circ \wedge G(e))$
$\wedge\ \forall u\ (\neg uEy_1{}^\circ \vee \exists pq\ (u=\langle p,q\rangle \wedge (M^\circ(p) \vee p=d \wedge q=v \vee H(p)$
$\quad \vee \exists q_1q_2p_1p_2\ (q_1Eq \wedge q_2Eq \wedge \langle p_1,q_1\rangle Ey_1 \wedge \langle p_2,q_2\rangle Ey_1 \wedge K(p_1,p_2,p))))$

Es sei y_3 das eindeutig bestimmte Element aus D mit $\forall u\ (uEy_3 \Leftrightarrow uEy_1{}^\circ \vee uEy_2)$.

Dann gilt offensichtlich

$\exists w\ (\langle e,w\rangle Ey_3 \wedge G(e))$
$\wedge\ \forall u\ (\neg uEy_3 \vee \exists pq\ (u=\langle p,q\rangle \wedge (M^\circ(p) \vee H(p)$
$\quad \vee \exists q_1q_2p_1p_2\ (q_1Eq \wedge q_2Eq \wedge \langle p_1,q_1\rangle Ey_3 \wedge \langle p_2,q_2\rangle Ey_3 \wedge K(p_1,p_2,p))))$.

Also gilt $\exists y\ S(e^\circ,y)$ bei I. Damit ist alles gezeigt.

Da sich aus dem von Gödel benutzten Axiomensystem mit den Grundbegriffen $0,1,+,\times$ einfach beweisen läßt, daß sich jede natürliche Zahl eindeutig als Dualbruch darstellen läßt und daher die Axiome von $\mathbb{M}$ bei der Standardinterpretation von E gelten, erhält man so in leichter Weise die Gödelschen Resultate in klassischer Formulierung.

LITERATUR.

[1] Gödel, K.: Die Vollständigkeit des Axiome des logischen Funktionenkalküls. Monatsh. Math. und Phys. 37 (1930), S.349-360.

[2] Gödel, K.: Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. Monatsh. Math. und Phys. 38 (1931), S. 173-198.

[3] Hilbert,D. und Bernays, P.: Grundlagen der Mathematik I und II. Zweite Auflage 1968/1970. Springer-Verlag.

[4] Deutsch, M.: Einführung in die Grundlagen der Mathematik. Bremen 1999.

[5] Deutsch, M.: Berechenbarkeit, Entscheidbarkeit, Aufzählbarkeit über Nachfolgerbereichen. Bremen 2003.