

# Maskierte Erfassung und inpaintingbasierte Wiederherstellung von großen Datenvolumen in Systemen mit eingeschränkter Berechnungskapazität

Dem Fachbereich Physik, Elektrotechnik und Informationstechnik  
der Universität Bremen

zur Erlangung des akademischen Grades  
Doktor der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)  
genehmigte Dissertation

von

Dipl.-Ing. Sebastian Schmale  
aus Nordhorn

Referent:	Prof. Dr.-Ing. Steffen Paul
Korreferentin:	Prof. Dr. Angelika Bunse-Gerstner
Prüfer:	Prof. Dr.-Ing. Alberto Garcia-Ortiz
Prüfer:	Prof. Dr.-Ing. Martin Schneider

Eingereicht am:	01.03.2018
Tag des Promotionskolloquiums:	15.06.2018



## Kurzfassung

Das exponentielle Wachstum des generierten Datenvolumens, aufgrund der zunehmenden Anzahl der Teilnehmer am Datenverkehr sowie deren Vernetzung, stellt weltweit viele anwendungsspezifische Systeme aktuell und zukünftig vor neue Herausforderungen. Bedingt durch die große Menge, die hohe Geschwindigkeit und die große Vielfalt der Daten ergeben sich individuelle Probleme bei der Erfassung, Übertragung und Verarbeitung. Die Bewältigung solcher Volumen mit klassischen Ansätzen für die Datenverarbeitung ist, aufgrund der verfügbaren Berechnungskapazität durch anwendungsabhängige Ressourcenrestriktionen, häufig ausgeschlossen.

Das Kernziel dieser Arbeit liegt in der Entwicklung und Anwendung von Lösungsansätzen zur Verarbeitung großer Datenvolumen in Systemen mit eingeschränkter Berechnungskapazität. Das grundlegende Konzept basiert auf einer Methodik zur asymmetrischen Verteilung des Berechnungsaufwandes durch die Verwendung von algorithmischen Werkzeugen aus dem Bereich der mehrdimensionalen digitalen Datenrestauration (Inpainting). Die Kombination aus Maskierung zur Datenreduktion sowie Inpainting zur Wiederherstellung eröffnet, neben innovativen Lösungen für derzeit noch offene Problemstellungen, das Potential zur Verbesserung bestehender Ansätze. Anhand ausgewählter Problemstellungen, sowohl aus dem Bereich der Medizin und Raumfahrt als auch der bildgebenden Aufnahmemedien, werden verschiedene Lösungsansätze entwickelt und unterschiedlichen Referenzverfahren gegenübergestellt. Zur Bewertung der entworfenen Ansätze dienen maßgeblich der Grad der Datenreduktion sowie die Rekonstruktionsqualität der inpaintingbasierten Wiederherstellung innerhalb von simulativen Untersuchungen der anwendungsspezifischen Szenarien.



## Abstract

The exponential growth of the generated data volume, due to the increasing number of participants in data traffic as well as networking, confronts many application-specific systems worldwide with new and future challenges. Based on the large amount, the high speed and the large variety of data, individual problems arise in the acquisition, transmission and processing. Managing such data volumes with traditional data processing approaches is often infeasible to resource-constrained applications, because of limitations of the computational capacity.

This thesis focusses on solutions for the processing of high data volumes in systems with limited computational capacity. The key concept is based on a methodology for the asymmetric distribution of computational effort through the use of algorithmic tools in the field of multidimensional digital data restoration (inpainting). The combination of masking for data reduction and inpainting for data recovery opens up the potential to innovative solutions for currently unresolved problems and to improve existing approaches. From the field of medicine, space technology as well as imaging recording media, problems to evaluate the developed solutions of the innovative methodology in this thesis. Furthermore, the approaches are compared to different reference methods. Both, the degree of data reduction and the reconstruction quality of the inpainting-based recovery, serve as figures of merit to evaluate the developed approaches within simulated examinations of the application-specific scenarios.



## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Forschungstätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Theoretische Elektrotechnik und Mikroelektronik (ITEM) der Universität Bremen im Arbeitsbereich Kommunikationselektronik.

An dieser Stelle möchte ich einen besonderen Dank an Herrn Prof. Dr.-Ing. Steffen Paul für die Ermöglichung und qualifizierte Betreuung meiner Dissertation aussprechen. Für die zahlreichen wertvollen inhaltlichen und methodischen Diskussionen bin ich ihm sehr verbunden. Zudem bedanke ich mich für die Übertragung der großen Eigenverantwortung bei der Umsetzung meiner innovativen Ideen. Ein besonderer Dank gilt auch Frau Prof. Dr. Angelika Bunse-Gerstner für das rege Interesse an meiner Arbeit und die Übernahme des Koreferats. In zahlreichen Diskussionen nahm sie sich bei all meinen Fragen stets die nötige Zeit, diese präzise und umfangreich zu beantworten. Herrn Prof. Dr.-Ing. Alberto García-Ortiz und Herrn Prof. Dr.-Ing. Martin Schneider danke ich herzlich für die Übernahme der Prüfertätigkeit.

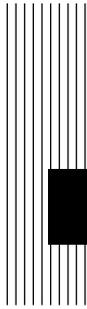
Allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern am ITEM möchte ich meinen Dank aussprechen, die durch zahlreiche fachliche Diskussionen meine Arbeit bereicherten. Besonders möchte ich meinem Bürokollegen Herrn Benjamin Knoop für die vielen fachlichen Gespräche sowie das herzliche Miteinander danken. Des Weiteren möchte ich bei meinen Studentinnen und Studenten für die Unterstützung sowohl durch das große Interesse an meiner Forschung als auch durch ihre Arbeiten bedanken. Im Zuge dessen hebe ich gerne Herrn Pascal Seidel, meinen ehemaligen Studenten und jetzigen Kollegen am ITEM, für die erfolgreiche Zusammenarbeit hervor. Meinen Kollegen Herrn Dr.-Ing. Jochen Rust, Herrn Benjamin Knoop sowie Herrn Theodor Hillebrand verdanke ich die sorgsame Durchsicht meiner Dissertation.

Große Dankbarkeit empfinde ich für meine Familie und Freunde, die mich in all den Jahren unterstützt haben, sodass ich heute dort bin, wo ich nun stehe. Besonderen Dank gilt dabei meiner Verlobten Elena, die durch ihre Liebe, positiven Zuspruch sowie Einfühlungsvermögen mir unverzichtbare Unterstützung für das Gelingen dieser Arbeit gegeben hat.

---

Bremen, 25. Juni 2018  
Sebastian Schmale





# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	1
1.1	Eigener Beitrag	3
1.2	Gliederung	5
<b>2</b>	<b>Datenkompression und -rekonstruktion</b>	7
2.1	Bewertungskriterien	7
2.1.1	Kompressionsgrad	8
2.1.2	Rekonstruktionsfehler	8
2.1.3	Berechnungsaufwand	9
2.2	Klassische Verfahren der Datenkompression	10
2.2.1	JPEG	10
2.2.2	JPEG2000	13
2.2.3	JPEG-Kodierungsaufwand	15
2.2.4	MPEG-4	17
2.3	Compressed Sensing	18
2.3.1	$\ell_1$ -Optimierungsproblem	19
2.3.2	Greedy-Algorithmen	22
2.3.2.1	Orthogonal Matching Pursuit	23
2.3.2.2	Sub-Correlation Orthogonal Matching Pursuit	24
2.3.2.3	Compressed Sensing Viterbi-Rekonstruktion	26
2.4	Inpainting	36
2.4.1	Strukturbasiertes Inpainting	38
2.4.2	Repräsentantenbasierte Rekonstruktion	42
2.4.2.1	Smooth Ordering of Patches	43
2.4.2.2	Block Matching und Filterung	47
2.4.2.3	K-SVD Inpainting	48
2.4.2.4	Wavelet-Thresholding	51
2.5	Inpainting Design Methodik	56
<b>3</b>	<b>Neurologisches Messsystem</b>	61
3.1	Problemstellung	61

3.2	Datenaufnahme . . . . .	62
3.2.1	Maske als Elektrodensteuerung . . . . .	63
3.3	Zweidimensionale Datenrekonstruktion . . . . .	64
3.3.1	Strukturrekonstruktion in neurologischen Daten . . . . .	65
3.3.2	Repräsentantenbasierte Inpainting . . . . .	70
3.3.2.1	Design der Maske . . . . .	72
3.3.2.2	Algorithmische Freiheitsgrade des SOP . . . . .	77
3.3.3	Beschleunigung durch algorithmische Anpassung . . . . .	83
3.3.3.1	Ausnutzung der Signaleigenschaften . . . . .	83
3.3.3.2	Smooth Ordering of Slits . . . . .	88
3.3.3.3	Randomized Ordering of Patches . . . . .	90
3.3.4	Rekonstruktionsqualität . . . . .	96
3.3.5	FPGA-Beschleunigung der Rekonstruktion . . . . .	99
3.3.5.1	Architektur basierend auf Funktionsapproximation . . . . .	99
3.4	Dreidimensionale Datenrekonstruktion . . . . .	109
3.4.1	Smooth Ordering of Cuboids . . . . .	109
3.4.2	K-SVD Inpainting mit angelernten Repräsentanten . . . . .	114
3.4.3	Korrektur von Randfehlern . . . . .	120
3.4.4	Rekonstruktionsqualität . . . . .	120
3.5	Zusammenfassung . . . . .	123
<b>4</b>	<b>Magnetresonanztomographie . . . . .</b>	<b>125</b>
4.1	Problemstellung . . . . .	125
4.2	Datenaufnahme . . . . .	127
4.2.1	Test-Phantome . . . . .	128
4.3	Datenrekonstruktion . . . . .	130
4.3.1	Partitionierung der Datenmatrix . . . . .	130
4.3.2	Permuted Cuboids Wavelet Thresholding . . . . .	131
4.3.2.1	Dimension der Cuboids . . . . .	136
4.3.2.2	Wavelet-Zerlegungsstufen und Permutation . . . . .	138
4.3.2.3	Adaptives Thresholding . . . . .	140
4.3.3	Rekonstruktionsqualität . . . . .	144
4.4	Zusammenfassung . . . . .	149
<b>5</b>	<b>Weitere Anwendungen . . . . .</b>	<b>151</b>
5.1	Active Pixel Sensor . . . . .	151
5.1.1	Problemstellung . . . . .	151
5.1.2	Lösungsansatz und Diskussion . . . . .	153
5.1.3	Zusammenfassung . . . . .	155
5.2	Orbiting Carbon Observatory-2-Mission . . . . .	156
5.2.1	Problemstellung . . . . .	156
5.2.2	Lösungsansatz und Diskussion . . . . .	158

---

5.2.3 Zusammenfassung . . . . .	163
5.3 Single Pixel Camera . . . . .	163
5.3.1 Problemstellung . . . . .	163
5.3.2 Lösungsansatz und Diskussion . . . . .	165
5.3.3 Zusammenfassung . . . . .	167
<b>6 Zusammenfassung . . . . .</b>	<b>169</b>
6.1 Ausblick . . . . .	173
<b>A Anhang . . . . .</b>	<b>175</b>
A.1 Berechnungsaufwand für SOP-Suchalgorithmen . . . . .	175
A.1.1 Priorisierte Suche entlang gleicher Elektroden . . . . .	175
A.1.2 Anordnung zu Patchgruppen . . . . .	176
A.1.3 Patchgruppen entlang gleicher Elektroden . . . . .	176
A.2 Anpassung der Datenblocklänge für den SOC . . . . .	177
A.3 SOP-Rekonstruktionsparameter . . . . .	178
A.3.1 Größe der Repräsentantengruppen . . . . .	178
A.3.2 Größe der Repräsentantengruppen . . . . .	179
A.4 PCWT-Rekonstruktionsparameter . . . . .	180
A.4.1 Adaptives Thresholding . . . . .	180
<b>B Notations-, Symbol- und Abkürzungsverzeichnis . . . . .</b>	<b>181</b>
B.1 Notationsverzeichnis . . . . .	181
B.2 Symbolverzeichnis . . . . .	182
B.3 Abkürzungsverzeichnis . . . . .	186
<b>C Wissenschaftliche Beiträge . . . . .</b>	<b>189</b>
C.1 Wissenschaftliche Veröffentlichungen . . . . .	189
<b>D Studentische Projekte . . . . .</b>	<b>193</b>
<b>E Literaturverzeichnis . . . . .</b>	<b>197</b>



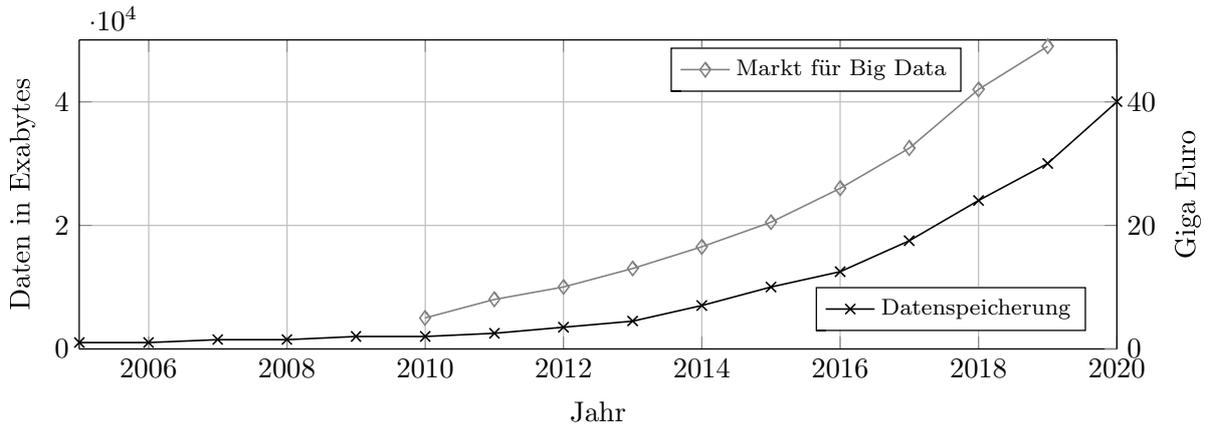


# 1 Einleitung

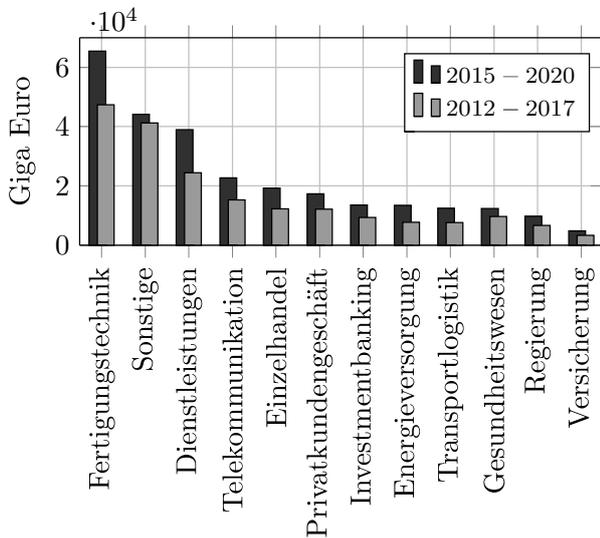
In den letzten Jahren erlebt die Welt eine Datenexplosion: Es wird täglich eine riesige Menge an Informationen – Big Data – generiert, was jährlich, wie in Abb. 1.1a zusammengefasst und prognostiziert, zu einem exponentiellen Wachstum des Datenvolumens führt [45]. Einerseits bildet sich eine Erhöhung des weltweiten Datenaufkommens durch die stetig wachsende Anzahl an Mobilfunkteilnehmern sowie dem steigenden Datenverkehr jedes einzelnen Teilnehmers ab [26]. Ein großer Teil der Daten wurde ursprünglich Festnetzanschlüssen, Mobiltelefonen, Laptops, Tablets und anderen Geräten zugeführt. Andererseits setzt sich heutzutage zudem die Datenübertragung aus einer ganzen Reihe anderer Geräte, wie beispielsweise vernetzte Fahrzeuge und Unterhaltungselektronik, zusammen – was im Allgemeinen als Internet of Things (IoT) bezeichnet wird [45]. Voraussichtlich wird das IoT von lediglich 4.6 Milliarden Geräten, Stand 2015, auf mehr als 16 Milliarden Einheiten im Jahr 2021 anwachsen [44].

Einhergehend mit diesem Trend wird ein Wandel für konventionelle, physische Produkte in Richtung komplexer, vernetzter Systeme eingeleitet, welche Sensoren, Software und digitale Benutzerschnittstellen kombinieren [95]. Die Herausforderung besteht in den technologischen Entwicklungen zur Verarbeitung von Big Data unter Berücksichtigung der Eigenschaften solcher Daten: großes Volumen, hohe Geschwindigkeit und große Vielfalt [61, 95]. Anhand der erwarteten Entwicklung eines Segmentes des europäischen Marktes bis zum Jahr 2020, Abb. 1.1b und 1.1c, ist von einer industriell unabhängigen, hohen Bedeutsamkeit von großen Datenvolumen und vernetzten Systemen auszugehen. Unter Einhaltung der erwähnten Eigenschaften von Big Data stehen anwendungsspezifische Systeme vor individuellen Problemen bei der Erfassung, Übertragung und Verarbeitung der Datenvolumen.

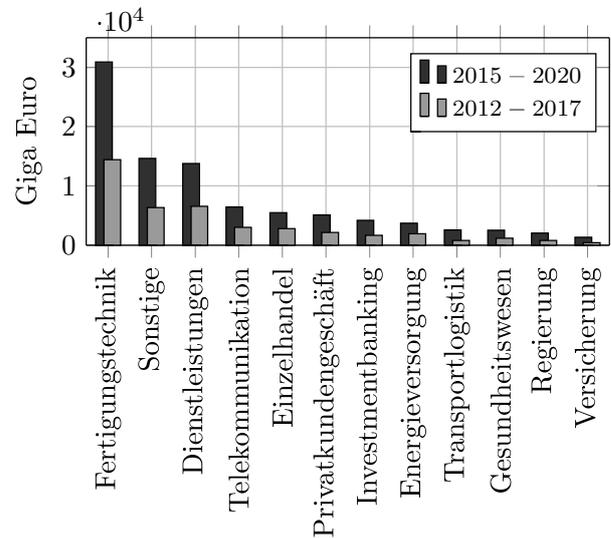
Auf der einen Seite der Spanne betrifft diese Entwicklung der Daten beispielsweise tragbare Systeme, bestehend aus einem Netzwerk von vielen Aggregationssensoren, zur Gesundheitsüberwachung aus dem Sektor eHealth Big Data. Hier steht das potentielle Datenvolumen im Konflikt mit den Vorgaben an die Systemknoten, welche eine durchgängige Aufnahme und Weitergabe der Daten bei minimalen Energieverbrauch gewährleisten sollen [92]. Auf der anderen Seite stehen Anwendungen, beispielsweise vernetzte Satellitensysteme für die hochauflösende Kartographie der Erdoberfläche, die mehr als 500 GB Daten pro Tag erzeugen [74]. In Abhängigkeit der Systemspezifikation



(a) Erwartete, weltweite Entwicklung der durchschnittlichen Datenspeicherung sowie des Marktanteiles, verändert nach [45].



(b) Big Data, verändert nach [98]



(c) Internet of Things, verändert nach [98]

**Abbildung 1.1:** Prognose für die Entwicklung der weltweiten Datenmenge sowie die Bedeutsamkeit von Big Data und Internet of Things für verschiedene Wirtschaftszweige eines europäischen Teilmarktes bis Jahr 2020.

nen, wie Übertragungsrate sowie Speicherkapazität, existiert eine technische Begrenzung für die Auflösung bei der Datenerfassung [5]. Die Gemeinsamkeit dieser Szenarien besteht in der Bewältigung des individuellen Datenvolumens unter Berücksichtigung der verfügbaren anwendungsspezifischen Berechnungskapazität und der Einhaltung der technischen Spezifikation an das System.

Im Allgemeinen können große Datenvolumen mit Hilfe von verschiedenen Verfahren aus der klassischen Datenkompression bewältigt werden. Allerdings ist die Implementierung solcher Standardverfahren durch die fehlende Berechnungskapazität, aufgrund von anwendungsabhängigen Spezifikationen an das System für die Datenerfassung, häufig ausgeschlossen. In diesem Kontext werden Ansätze zur Datenreduktion benötigt, welche mit einer inhärenten Verschiebung des Berechnungsaufwandes einhergehen und

unabhängig von der Beschaffenheit der Daten sind. Viele Verfahren aus dem aktuellen Stand der Forschung genügen diesen Anforderungen nicht. Ansätze wie Compressed Sensing (CS) beispielsweise erfordern die Notwendigkeit von natürlichen oder synthetischen Signaleigenschaften (Sparsity). Eine übergeordnete Methodik zur Entwicklung geeigneter Lösungsansätze, um große Datenvolumen in Systemen mit eingeschränkter Berechnungskapazität zu verarbeiten, wurde bislang noch nicht erschöpfend untersucht.

## 1.1 Eigener Beitrag

Der Kern der vorliegenden Arbeit ist die Einführung und Anwendung der Inpainting Design Methodology (IDM) zur Entwicklung von innovativen Ansätzen für die Verarbeitung großer Datenvolumen in Systemen mit eingeschränkter Berechnungskapazität. Das grundlegende Konzept hinter dieser Methodik basiert auf einer asymmetrischen Verteilung des Berechnungsaufwandes durch die Verwendung von algorithmischen Werkzeugen aus dem Bereich der mehrdimensionalen digitalen Datenrestauration (Inpainting). Die zugrunde liegende Idee wird in der Abb. 1.2 als schematisches Konzept dargestellt.

Zum effizienten Entwurf einer Lösung mit der IDM für anwendungsspezifische Problemstellungen muss zunächst eine geeignete Maskierung zur Reduktion des Berechnungsaufwandes bei der Datenerfassung sowie ein Algorithmus für die inpaintingbasierte Datenwiederherstellung ausgewählt werden. In Abhängigkeit der Spezifikationen für die Anwendung kann sich die Eignung solcher Masken und Algorithmen unterscheiden. Dementsprechend erfolgt in dieser Arbeit, neben der theoretischen Betrachtung und Verwendung von existierenden Verfahren, auch die Entwicklung neuartiger Ansätze zur Datenrekonstruktion. Des Weiteren wird eine Methode zur Verifikation eingeführt, um einen geeigneten Entwurf für die Maskierung für die inpaintingbasierte Datenwiederherstellung zu generieren.

Im Rahmen dieser Arbeit dienen fünf ausgewählte Anwendungen als Fundament für die Betrachtung der anwendungsspezifischen Lösungen der IDM. Um die Diversität der Methodik zu zeigen, umfasst die Wahl der Anwendungen verschiedene Bereiche der Medizin, Raumfahrt und bildgebenden Aufnahmemedien. Neben innovativen Lösungen für drei offene Problemstellungen werden in dieser Arbeit anhand der Methodik zusätzlich zwei Vorschläge zur Verbesserung bestehender Systeme entwickelt.

Der Hauptteil dieser Arbeit beinhaltet die Untersuchung einer innovativen Lösung der IDM zur Realisierung eines vollständig implantierbaren neurologischen Messsystems für die medizinische Diagnostik. Mit Hilfe der Maskierung als Ansteuerung ausgewählter Elektroden, während der Signalableitung, eröffnet der entwickelte Vorschlag die konzeptionelle Umsetzung des Systems, unter Einhaltung vorgegebener Spezifikationen. Dies wird durch die Verschiebung des Berechnungsaufwandes vom Implantat zu einer leistungsstarken Basisstation ermöglicht. Für die Rekonstruktion der maskierten Daten werden sowohl verschiedene Inpaintingverfahren betrachtet und erweitert als auch



**Abbildung 1.2:** Schematisches Konzept der eingeführten IDM hinsichtlich der Verteilung des Berechnungsaufwandes, innerhalb des Systems, für die Datenerfassung und -rekonstruktion.

deren Freiheitsgrade, sowie algorithmische und hardwarenahe Weiterentwicklungen, hinsichtlich Qualität und Geschwindigkeit, eingeführt und untersucht.

In dieser Arbeit bilden die Vorstellung und Verifikation von IDM-Vorschlägen zur Verarbeitung großer Datenvolumen auf Satelliten zwei neuartige Lösungen im Bereich der Raumfahrt. Einerseits werden Hot Pixels, verursacht durch Strahlung sowie Alterung, schaltungstechnisch erkannt und als Einträge in der Maske verwendet. Es wird evaluiert, ob eine Wiederherstellung der korrumpierten Aufnahme mittels Active Pixel Sensors von Himmelskörpern mit Hilfe von Inpaintingverfahren anwendbar ist. Andererseits erfolgt für die Orbiting Carbon Observatory (OCO)-2-Satellitenmission die Entwicklung einer innovativen Lösung zur Korrektur von unvermeidbaren Bad Pixeln sowie zur Bereitstellung einer größeren Anzahl von Sensoren zur Aufnahme. Im Zuge dessen wird ein mehrdimensionaler Inpaintingansatz zur Wiederherstellung der spektralen Strahlkraft von Sauerstoff- und Kohlenstoffdioxidkonzentrationen im Frequenzbereich betrachtet und bezüglich seiner Eignung evaluiert.

Des Weiteren wird ein neuartiger Inpaintingalgorithmus, basierend auf permutierten Waveletkoeffizienten, zur Wiederherstellung des maskierten  $k$ -Spaces für die Anwendung in der Magnetresonanztomographie (MRT) entwickelt. Unter Berücksichtigung eines bestehenden Ansatzes mit maskierter Erfassung der  $k$ -Spacekoeffizienten bei der MRT-Aufnahme durch klassische Trajektorien erfolgt die Einführung eines Verbesserungsvorschlages für die Rekonstruktion der fehlenden Koeffizienten. Nach der Entwicklung eines neuartigen Algorithmus für die MRT-Anwendung werden die algorithmischen Parameter untersucht. In der Auswertung des entwickelten Ansatzes werden verschiedene Datensätze analysiert und die Wiederherstellungsergebnisse mit existierenden Verfahren verglichen. Zudem wird ein alternativer Ansatz zur Realisierung einer Single-Pixel-Camera für den Bereich der bildgebenden Aufnahmemedien eingeführt. Neben der Verifikation der Idee wird der neue Entwurf dem Compressed Sensing-Ansatz gegenübergestellt.

Um eine Aussage hinsichtlich der Qualität der entwickelten Methodik formulieren zu können, werden die eingeführten Lösungsvorschläge innerhalb der anwendungsspezifischen Problemstellungen mit Standardverfahren sowie Methoden aus dem aktuellen Stand

der Forschung verglichen. Innerhalb der algorithmischen Auswertung der eingeführten Lösungen der IDM wird neben dem anwendungsabhängigen Berechnungsumfang in der Wiederherstellung maßgeblich der Grad der Datenreduktion sowie die Güte der Datenrekonstruktion als Bewertungskriterien betrachtet.

## 1.2 Gliederung

Kapitel zwei stellt die theoretischen Grundlagen von verschiedenen Ansätzen zur Datenkompression und -rekonstruktion mit symmetrischer und asymmetrischer Verteilung des dazugehörigen Berechnungsaufwandes vor. Zunächst werden dafür Kriterien zur Bewertung der Wiederherstellungsqualität und des Grades der Datenreduktion sowie zur Abschätzung der Berechnungskomplexität eingeführt. Danach folgt die Vorstellung von ausgewählten klassischen Datenkompressionsverfahren zur Bewertung der entwickelten Ansätze. Des Weiteren wird der theoretische Hintergrund sowie zwei neuartige Rekonstruktionsansätze für Probleme aus dem Bereich Compressed Sensing eingeführt. Zur asymmetrischen Verteilung des Berechnungsaufwandes erfolgt danach die Einführung von struktur- und repräsentantenbasierten Inpaintingverfahren zur Wiederherstellung von maskierten Daten. Darauf basierend bildet der Abschluss des Kapitels die ausführliche Beschreibung des grundlegenden Prinzips der IDM anhand der zugrunde liegenden Heuristik der allgemeinen Entwurfsmerkmale.

Kapitel drei führt eine Lösung der IDM zur Realisierung eines vollständig implantierbaren neurologischen Messsystems für die medizinische Diagnostik ein. Zunächst wird die Maskierung sowie Rekonstruktion der neurologischen Aktivität durch die zweidimensionale Verarbeitung von strukturbasiertem und repräsentantenbasiertem Inpainting untersucht. Darauf folgt die Einführung einer Methode, um die Eignung verschiedener Entwürfe für die Maskierung zu bestimmen. Nach der Untersuchung der algorithmischen Freiheitsgrade erfolgt die Umsetzung von Ansätzen für eine beschleunigte Rekonstruktion. Dafür werden verschiedene algorithmische Ansätze sowie eine Hardwarearchitektur entwickelt und hinsichtlich der Geschwindigkeit evaluiert. Des Weiteren erfolgt die Entwicklung und Auswertung von dreidimensionalen Inpaintingansätzen zur Wiedergewinnung der neurologischen Aktivität. Abschließend werden die entwickelten Algorithmen, sowohl mit anderen Verfahren aus dem aktuellen Stand der Forschung als auch mit klassischen Datenkompressionsmethoden, verglichen und ausgewertet.

Kapitel vier führt eine Lösung der IDM zur Verbesserung der maskenbasierten Variante der Magnetresonanztomographie (MRT) aus dem aktuellen Stand der Forschung ein. Dabei liegt der Schwerpunkt auf der Entwicklung eines neuartigen Algorithmus, basierend auf der Permutation von Waveletkoeffizienten, zur dreidimensionalen Wiederherstellung von MRT-Daten. Neben der Betrachtung der algorithmischen Freiheitsgrade erfolgt die Einführung eines vollständig adaptiven Ansatzes für die Schwellwertanpassung innerhalb der Rekonstruktion. Anhand von verschiedenen MRT-Datensätzen wird die Güte des

eingeführten Algorithmus bewertet. Im Zuge dessen fließen in die abschließende Evaluation neben Videokompressionsverfahren auch die ideengebenden Ansätze, basierend auf CS und Inpainting, aus dem aktuellen Stand der Forschung, in den Vergleich mit ein. Kapitel fünf führt Lösungen der IDM für unterschiedliche Problemstellungen, zwei aus dem Bereich der Raumfahrt sowie eine aus dem Gebiet der bildgebenden Aufnahmemedien, ein. In diesem Teil der Arbeit wird der grundlegende Ansatz auf seine Eignung innerhalb weiterer anwendungsspezifischer Szenarien, abseits der Medizin, untersucht. In Abschnitt 5.1 erfolgt die Einführung eines neuartigen Ansatzes zur inpaintingbasierten Rekonstruktion von Hot Pixeln bei Himmelskörperaufnahmen mit Hilfe von Active Pixel Sensoren auf einem Satelliten, der Strahlung und Alterung ausgesetzt ist. In Abschnitt 5.2 wird eine innovative Idee zur Korrektur von Bad Pixeln sowie der sensorgestützten Erfassung großer Datenvolumen auf dem OCO-2-Satelliten entwickelt und untersucht. Der Abschnitt 5.3 beinhaltet die Einführung eines Ansatzes zur inpaintingbasierten Realisierung einer Single Pixel Camera sowie dem Vergleich mit der ideengebenden CS-Variante.

Im letzten Kapitel werden, in Form einer abschließenden Zusammenfassung, sowohl die anwendungsspezifischen Auswertungen als auch die Eignung der IDM an sich resümiert und bewertet. Zudem erfolgt die Formulierung eines Ausblickes, der mögliche Erweiterungen und Verbesserungen zur entwickelten inpaintingbasierten Entwurfsmethodik und den einzelnen anwendungsspezifischen Lösungen behandelt.

# Datenkompression und -rekonstruktion

Kompression spielt eine signifikante Rolle im Bereich Datenspeicherung und -übertragung. Aus einer absoluten Sicht lässt sich die Datenkompression übergeordnet in zwei Kategorien, verlustlos und verlustbehaftet, einteilen [87]. Die verlustlose Kompression ist geeignet für Daten, die weiterführend bearbeitet oder grundlegend im Detail untersucht werden sollen. Aufgrund des geringen Kompressionsgrades bei idealen verlustfreien Methoden finden selbige in dieser Arbeit keine Beachtung. Allerdings sind in einigen Anwendungen minimale Abweichungen zwischen den originalen und dekomprimierten Daten tolerierbar. Solche Kompressionsverfahren werden als näherungsweise verlustlos betitelt und haben sich vorzugsweise für die Verarbeitung von sensiblen Daten, wie beispielsweise biomedizinische Signale oder Bilder, etabliert. Die umfangreichste Auswahl von Kompressionstechniken wird durch die verlustbehaftete Gruppe abgedeckt. Davon basieren die meisten Verfahren auf einer Kombination aus Transformationskodierung mit anschließendem Quantisieren und Abschneiden der spektralen Koeffizienten [118, 87]. Im Allgemeinen ist der damit verbundene Berechnungsaufwand symmetrisch auf die Kompression und Dekompression verteilt, um die maximale Güte hinsichtlich der Datenreduktion und -Rekonstruktion zu erzielen.

Zunächst erfolgt die Einführung von einheitlichen Kriterien zur Bewertung der vorgestellten Ansätze zur Datenkompression und -rekonstruktion. Dies beinhaltet klassische Verfahren sowie Lösungsvorschläge aus dem aktuellen Stand der Technik, welche den Berechnungsaufwand asymmetrisch im anwendungsspezifischen Szenario verteilen.

## 2.1 Bewertungskriterien

Zur Beurteilung der Simulationsergebnisse in dieser Arbeit, müssen verschiedene Kriterien zur Bewertung der Qualität eingefügt werden. Da die Datenreduktion und -wiederherstellung eine zentrale Thematik dieser Dissertation einnimmt, erfolgt die primäre Klassifizierung der Ergebnisse hinsichtlich des Kompressionsgrades sowie des Rekonstruktionsfehlers.

Für beide nachfolgenden Bewertungskriterien werden Vektoren als Eingangsgröße angenommen. Liegt eine andere Darstellungsart der Daten vor - zum Beispiel eine Matrix  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{M \times T}$  für ein Bild - erfolgt eine Umwandlung. Mit der Operation

$$\mathbf{X}' := \text{vec}(\mathbf{X}) \quad (2.1)$$

werden die  $T$  Spalten der Matrix  $\mathbf{X}$  untereinander positioniert, sodass ein Vektor  $\mathbf{X}' \in \mathbb{R}^{MT}$  mit Länge  $MT$  entsteht.

### 2.1.1 Kompressionsgrad

In dieser Arbeit ist der Kompressionsgrad  $\eta$  über das Verhältnis der Anzahl der Einträge in den Mengen  $|U| \in \mathbb{N}$  und  $|O| \in \mathbb{N}$  definiert:

$$\eta = 100\% \frac{|U|}{|O|}. \quad (2.2)$$

In Gl. (2.2) bezeichnet  $|O|$  die Anzahl der Einträge der Menge des ursprünglichen Datensatzes  $\mathbf{X}$ . Wohingegen  $|U| < |O|$  eine reduzierte Anzahl von Einträge kennzeichnet. In Abhängigkeit der betrachteten Verfahren definieren sich die Größen  $U$  und  $O$  durch verschiedene Mengen oder Indizes der Vektor- bzw. Matrixeinträge. Das Kompressionsverhältnis aus Gl. (2.2) ist auf den Wertebereich  $(0, 100]$  in Prozent eingeschränkt. Um eine qualitative Zuordnung der Kompression vornehmen zu können, werden die Begriffe der schwachen ( $\eta < 50\%$ ), moderaten ( $50\% \leq \eta \leq 75\%$ ) und hohen Kompression ( $\eta > 75\%$ ) eingeführt. Diese Definitionen haben, solange keine explizite Anpassung der Grenzen formuliert werden, im Laufe der Arbeit Gültigkeit.

### 2.1.2 Rekonstruktionsfehler

Das Kriterium zur Erfassung der Rekonstruktionsqualität basiert auf der Diskrepanz zwischen der Wiederherstellung und dem originalen Datensatz. Diese Differenz fließt als mittlere quadratische Abweichung im Sinne eines Mean Squared Error (MSE)

$$\text{MSE} = \frac{1}{MT} \|\mathbf{X}' - \mathbf{X}'_{\text{rec}}\|_2^2 \quad (2.3)$$

ein, wobei  $\mathbf{X}'$  das Originalsignal und  $\mathbf{X}'_{\text{rec}} \in \mathbb{R}^{MT}$  die Rekonstruktion bezeichnet. Natürlich kann alternativ zur  $\|\cdot\|_2$ -Norm für Vektoren auch die sogenannte Frobeniusnorm für Matrizen verwendet werden. Ein Vorteil dieser Definition ist, dass die Abweichungen der Vektorkomponenten durch die Quadratur in Gl. (2.3) sich nicht gegenseitig kompensieren. Der MSE hängt sowohl stark von der Varianz als auch vom Bias der Daten ab, wobei Letzteres für eine einheitliche Vergleichsbasis eher problematisch ist.

Für eine adäquate Vergleichbarkeit zwischen unterschiedlichen Fehlerwerten muss eine Normierung durch die individuelle Signalenergie

$$E_s = \frac{1}{MT} \|\mathbf{X}'\|_2^2 \quad (2.4)$$

des ursprünglichen Vektors erfolgen:

$$\text{NMSE} = \sqrt{\frac{\text{MSE}}{E_s}} = \frac{\|\mathbf{X}' - \mathbf{X}'_{\text{rec}}\|_2}{\|\mathbf{X}'\|_2}. \quad (2.5)$$

Die Formulierung aus Gl. (2.5) wird als Normalized Mean Squared Error (NMSE) bezeichnet. Dieses Fehlermaß soll als Bewertungskriterium nachfolgend in dieser Arbeit verwendet werden.

In der Literatur ist alternativ für die Thematik Bildverarbeitung die Definition des sogenannten Peak-Signal-to-Noise-Ratio (PSNR)

$$\text{PSNR} = 10 \log_{10} \left( \frac{I_{\max}^2}{\text{MSE}} \right) = 20 \log_{10} \left( \frac{I_{\max}}{\|\mathbf{X}' - \mathbf{X}'_{\text{rec}}\|_2 / \sqrt{MT}} \right) \quad (2.6)$$

zu finden, wobei  $I_{\max}$  den maximalen Intensitätswert angibt. Bei Bildern wird demnach in der Regel  $I_{\max} = 255$  oder  $I_{\max} = 1$  verwendet.

### 2.1.3 Berechnungsaufwand

Sowohl für die Implementierung eines Datenreduktionsansatzes nach der Erfassung als auch für die anschließende Wiederherstellung der Daten innerhalb einer annehmbaren Zeit nimmt der algorithmische Berechnungsaufwand eine wichtige Rolle ein. In dieser Arbeit wird diesbezüglich zwischen zwei Definitionen unterschieden. Einerseits wird die sogenannte algorithmische Berechnungskomplexität mit dem Landau-Operator  $\mathcal{O}(\cdot)$  abgeschätzt. Dieser Operator klassifiziert die Wachstumsordnung einer Funktion oder eines Ausdrucks. Zum Beispiel wächst der Summenausdruck

$$f(x) = \sum_{n=0}^N c_n x^n = c_N x^N \dots c_1 x + c_0 \quad (2.7)$$

polynomiell, also um ungefähr das  $2^N$ -fache, wenn sich das Argument verdoppelt. Mit dem Landau-Operator wird das polynomielle Wachstum  $\mathcal{O}(x^N)$  über den größten Term gekennzeichnet.

Und andererseits dient in dieser Arbeit die Anzahl der durchzuführenden mathematischen Operationen als Maß für den algorithmischen Berechnungsaufwand  $\mathcal{B}$ . Übergeord-

net soll mit dieser Definition beispielsweise die kombinatorische Anzahl aller möglichen Distanzberechnungen

$$\mathcal{B} = \frac{N(N-1)}{2} \quad (2.8)$$

zwischen  $N$  Vektoren angegeben werden. Wobei der Ausdruck (2.8) in der Landau-Notation  $\mathcal{O}(N^2)$  quadratisch wächst.

## 2.2 Klassische Verfahren der Datenkompression

In diesem Abschnitt werden die theoretischen Hintergründe von klassischen Kompressionsverfahren aus der Literatur eingeführt. Diese dienen im weiteren Verlauf der Arbeit als Referenzmethode, um die Datenqualität nach der Kompression und Rekonstruktion der eingeführten Ansätze zu quantifizieren.

### 2.2.1 JPEG

Das Ziel der Arbeitsgruppe Joint Photographic Expert Group (JPEG) war die Definition eines Standards von Bildkompressionsverfahren. Die aufbereiteten Inhalte in diesem Abschnitt basieren auf der Arbeit [118]. Dieser umfasst grundlegende Methoden wie die Transformation durch ein System von Basisfunktionen und verschiedene Arten der Kodierung. Um sowohl die auftretenden Effekte wie die Ausbildung von Artefakten zu erklären als auch eine Abschätzung des Berechnungsaufwands zu diskutieren, soll nachfolgend die Vorgehensweise der JPEG-Verarbeitung erläutert werden.

In dieser Arbeit erfolgt überwiegend die Verarbeitung von allgemeinen Graustufendaten  $\mathbf{X} \in [0, 1]^{M \times T}$  (optional auch  $\mathbf{X} \in [0, 255]^{M \times T}$ ). In der Bildverarbeitung hingegen handelt es sich dabei um eine Menge quantisierter Intensitätswerte  $\{0, \dots, 1\}$  bzw.  $\{0, \dots, 255\}$  in einer Matrix. In der Regel ist die Anzahl der Einträge in der Menge durch die Auflösung bzw. binäre Wortbreite definiert.

**Transformation des Farbraums** Im Allgemeinen liegen Daten im Bereich der Bildverarbeitung in der Red-Green-Blue (RGB)-Darstellung  $\mathbf{X} \in [0, 255]^{3 \times M \times T}$  vor. Bei  $\mathbf{X}$  handelt es sich um einen Tensor mit drei sogenannten Layern für die Farben Rot, Grün und Blau. Mit Hilfe der Gl. (2.9) werden die Daten in das  $YC_bC_r$ -Farbmodell umgewandelt [118]:

$$\begin{pmatrix} Y \\ C_b \\ C_r \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ -0.168736 & -0.331264 & 0.5 \\ 0.5 & -0.418688 & -0.081312 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Die Komponenten stellen die Helligkeit  $Y$  (Luminanz) sowie die jeweilige Richtung von Blau zu Gelb ( $C_b$ ) und Rot zu Türkis ( $C_r$ ) dar, was als Farbigkeit (Chrominanz) bezeichnet wird. Diese Umwandlung führt zu einer vorrangigen Analyse basierend auf den Helligkeitsunterschieden der Daten. Innerhalb der beiden Chrominanz-Komponenten können größere Verluste durch größere Quantisierung toleriert werden.

**Aufteilung in Blöcke** Die Segmentierung des gesamten Datensatzes  $\mathbf{X}$  in mehrere (nicht überlappende)  $M_b \times T_b = 8 \times 8$  Blöcke  $\hat{\mathbf{X}} \in \mathbb{D}^{M_b \times T_b}$  mit  $\mathbb{D} = [0, 255]$  wird auch Tilling genannt. Sollten die Dimensionen  $\{M, T\}$  des Bildes keine Teilbarkeit durch acht aufweisen, so werden die Blöcke an den Rändern des Datensatzes aufgefüllt. Für das Erweitern gibt es keine feste Vorschrift. In der Regel werden die letzten Spalten und Zeilen entsprechend häufig kopiert.

**Transformation** Anschließend wird jeder dieser Blöcke  $\hat{\mathbf{X}}$  als Linearkombination aus Basisfunktionen mit Hilfe der zweidimensionalen Discrete Cosinus-Transform (DCT)  $\mathbf{D}_{\text{DCT}}$  dargestellt. Die Gl. (2.10) zeigt die Berechnungsvorschrift der DCT-Koeffizienten

$$\hat{S}_{p,q} = \frac{c_p c_q}{4} \sum_{m=1}^{M_b} \sum_{t=1}^{T_b} \hat{X}_{m,t} \cos\left(\frac{\pi}{M_b} \left(m - \frac{1}{2}\right) p\right) \cos\left(\frac{\pi}{T_b} \left(t - \frac{1}{2}\right) q\right), \quad (2.10)$$

mit  $\{p, q\} \in \mathbb{N} \leq 8$ , wobei der Ausdruck  $\hat{X}_{m,t}$  einen Wert aus dem jeweiligen  $8 \times 8$  Block kennzeichnet. Die individuellen Normierungsfaktoren  $\{c_p, c_q\}$  lassen sich wie folgt bestimmen:

$$c_i = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & \text{für } i = 1 \\ 1 & \text{für } i \neq 1 \end{cases}. \quad (2.11)$$

Die Darstellung der (Orts-)Frequenzen  $\hat{\mathbf{S}} \in \mathbb{R}^{M_b \times T_b}$  jedes Blockes beinhaltet alle Kombinationen aus horizontalen und vertikalen Spektralanteilen. Dabei befindet sich der Gleichanteil oben links bei den Koordinaten  $(1, 1)$  in der Matrix  $\hat{\mathbf{S}}$ .

**Quantisierung** In der Durchführung der Abbildung  $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  begründet, liegen nach der DCT reelle Zahlen vor, welche in der Regel durch endliche Bit-Formate nicht mehr exakt darstellbar sind. Mit dem Ziel den Speicherbedarf zu reduzieren, sollen die DCT-Koeffizienten nur mit einer bestimmten Genauigkeit weiterverarbeitet werden:

$$\hat{S}_{p,q}^Q = \text{round} \left( \frac{\hat{S}_{p,q}}{\Theta_{p,q}} \right). \quad (2.12)$$

Das anschließende Runden nach der Quantisierung führt zum Verzicht einer exakten Rekonstruktion der Daten. In der Bildverarbeitung wird dieser Schritt Irrelevanzreduktion bezeichnet. Die Werte innerhalb der Quantisierungsmatrix  $\Theta$  basieren auf empirischen

Untersuchungen hinsichtlich der Empfindlichkeit des menschlichen Auges und folgen keinem festen Standard:

$$\Theta = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 25 & 37 & 51 & 66 & 82 & 100 \\ 15 & 19 & 28 & 39 & 52 & 67 & 83 & 101 \\ 25 & 28 & 35 & 45 & 58 & 72 & 88 & 105 \\ 37 & 39 & 45 & 54 & 66 & 79 & 94 & 111 \\ 51 & 52 & 58 & 66 & 76 & 89 & 103 & 119 \\ 66 & 67 & 72 & 79 & 89 & 101 & 114 & 130 \\ 82 & 83 & 88 & 94 & 103 & 114 & 127 & 142 \\ 100 & 101 & 105 & 111 & 119 & 130 & 142 & 156 \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Mit der Anpassung der Quantisierungswerte lässt sich im JPEG-Format die Güte der Rekonstruktionsqualität beziehungsweise die Höhe der Datenkompression steuern.

**Umsortierung und Differenzkodierung** Im nächsten Schritt erfolgt eine Umsortierung der 64 quantisierten DCT-Koeffizienten in einer zickzackförmigen Reihenfolge:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 7 & 15 & 16 & 28 & 29 \\ 3 & 5 & 8 & 14 & 17 & 27 & 30 & 43 \\ 4 & 9 & 13 & 18 & 26 & 31 & 42 & 44 \\ 10 & 12 & 19 & 25 & 32 & 41 & 45 & 54 \\ 11 & 20 & 24 & 33 & 40 & 46 & 53 & 55 \\ 21 & 23 & 34 & 39 & 47 & 52 & 56 & 61 \\ 22 & 35 & 38 & 48 & 51 & 57 & 60 & 62 \\ 36 & 37 & 49 & 50 & 58 & 59 & 63 & 64 \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Diese vorgegebene Anordnung dient als optimierte Eingabe für die nachfolgende Lauf­längenkodierung. In vielen Bildern existieren große Regionen mit nahezu gleichen Intensitätswerten. Daher ist es vorteilhaft, den quantisierten Gleichanteil  $\hat{S}_{1,1}^Q$  jedes  $8 \times 8$  Blockes getrennt von den Frequenzkombinationen zu behandeln. Benachbarte Blöcke weisen häufig ähnlich große Mittelwerte auf, was eine sogenannte Prädikation zur Kodierung begünstigt. Dabei handelt es sich um eine Differenzkodierung der Mittelwerte.

**Entropiekodierung** Die Differenzkodierung erzeugt mit hoher Wahrscheinlichkeit Werte nahe Null. Die Kenntnis über die Verteilung der Daten erlaubt eine vorteilhafte Ausnutzung der Entropiekodierung durch einen modifizierten Huffman-Code.

**Dekompression** Für die Rekonstruktion, oder in der Bildbearbeitung Dekompression, werden alle vorgestellten Operationen zur JPEG-Kompression invertiert. Dementsprechend erfolgt zunächst eine Entropie-Dekodierung und Umsortierung der quantisier-

ten DCT-Koeffizienten. Nach der Requantisierung ist die Inverse Discrete Cosinus-Transform (IDCT)

$$\hat{X}_{m,t} = \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{M_b} \sum_{t=1}^{T_b} c_p c_q \hat{S}_{m,t} \cos\left(\frac{\pi}{M_b} \left(p - \frac{1}{2}\right) m\right) \cos\left(\frac{\pi}{T_b} \left(q - \frac{1}{2}\right) t\right) \quad (2.15)$$

anzuwenden, um die Koeffizienten innerhalb der jeweiligen Blöcke in den ursprünglichen Bereich zurückzuführen. Abschließend erfolgt eine Überabtastung und Tiefpassfilterung der Farbdifferenzverläufe sowie die Umrechnung vom  $YC_bC_r$ -Farbmodell zurück in den ursprünglichen Farbraum.

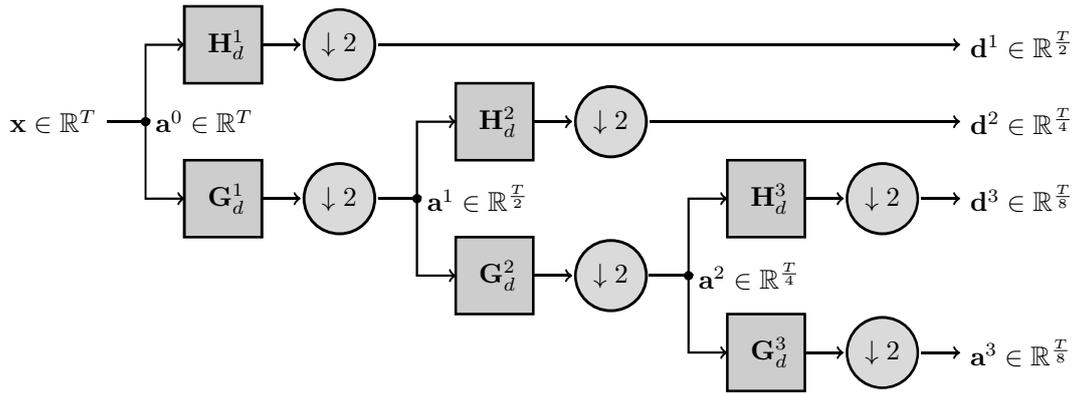
## 2.2.2 JPEG2000

Das Entstehen von sogenannten Block-Artefakten bei hoher Datenkompression ist mitunter eine der populärsten Schwächen von JPEG. Der Inhalt in diesem Abschnitt stellt eine Aufbereitung der Thema aus der Arbeit [68] dar. Des Weiteren führte u.a. die Anforderung an die Verwendung eines einheitlichen Codes für die verlustfreie und verlustbehaftete Kompression zur Motivation JPEG2000 als verbesserten Standard zu entwickeln.

Auch JPEG2000 funktioniert - genau wie der grundlegende JPEG Standard im vorherigen Abschnitt 2.2.1 - in mehreren Schritten. Zur Vermeidung von redundanten Informationen werden an dieser Stelle lediglich die signifikanten Unterschiede aufgezeigt.

**Teilbilder und Farbtransformation** Initial erfolgt die Aufteilung des Datensatzes in sogenannte Kacheln, falls ein großformatiges Bild vorliegt. Im Zuge dessen lässt sich optional eine Region of Interest (RoI) definieren. Jede Kachel wird unabhängig behandelt, sodass die Qualität spezifisch anpassbar ist. Auch im JPEG2000 Standard erfolgt die Umwandlung der RGB Komponenten auf das Luminanz- und Chrominanz-Farbmodell.

**Wavelet-Transformation** Für jede Kachel wird anschließend die Discrete Wavelet-Transform (DWT) separat durchgeführt. Das Ersetzen der Transformationsbasis von Kosinus-Schwingungen mit sogenannten Wavelets basiert auf der Tatsache, dass Bilder in der Regel nicht als Überlagerung periodischer Signale verschiedener Frequenzen interpretiert werden können. Die DWT löst hingegen den Frequenzbereich ungleichmäßig auf, wobei die Tiefe durch eine sogenannte Multiresolution Analysis (MRA) des Funktionsraumes  $L^2(\mathbb{R})$  einstellbar ist. In Analogie zur Sinusfunktion in der Fourier-Transformation werden Wavelets dazu genutzt, eine Funktion auf ihre enthaltenen Frequenzanteile zu analysieren. Dementsprechend kommen innerhalb der Transformation verschobene und skalierte Varianten  $\phi$  des sogenannten Mother-Wavelets  $\psi$  vor. Es sei darauf hingewiesen, dass in diesem Abschnitt lediglich die Fast Wavelet-Transform (FWT) aus [78] erläutert wird. Für weitere Varianten der Wavelet-Transformation sowie eine Vertiefung der



**Abbildung 2.1:** Schematische Blockdarstellung der Wavelet-Transformation mit Stufe  $L = 3$  des Vektors  $\mathbf{x} = \mathbf{a}_0$  in die Dekompositionsanteile.

Thematik sei an dieser Stelle auf die Literatur [32, 3] verwiesen.

Basierend auf der MRA lässt sich zeigen, dass ein Vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^T$  durch eine Menge aus Approximations- und Detail-Wavelet-Koeffizienten vollständig beschreibbar ist. Die Approximationskoeffizienten  $\mathbf{a}^l \in \mathbb{R}^{2^{-l}T}$  sind das Ergebnis einer Tiefpassfilterung  $\mathbf{g}$ . Wohingegen die Detailkoeffizienten  $\mathbf{d}^l \in \mathbb{R}^{2^{-l}T}$  durch eine Hochpassfilterung  $\mathbf{h}$  ermittelt werden. Der Exponent  $l$  kennzeichnet die Zerlegungsstufe der Wavelet-Transformation. Die Anwendung der Filterung erfolgt durch eine diskrete, periodische Faltung bzw. eine zyklische Faltungsmatrix. Mit Hilfe dieser Faltung mit den Filtern lassen sich die Koeffizienten

$$\mathbf{a}^l = (\downarrow 2) (\mathbf{a}^{l-1} * \mathbf{g}_d) = (\downarrow 2) (\mathbf{G}_d^l \mathbf{a}^{l-1}) \quad (2.16)$$

$$\mathbf{d}^l = (\downarrow 2) (\mathbf{a}^{l-1} * \mathbf{h}_d) = (\downarrow 2) (\mathbf{H}_d^l \mathbf{a}^{l-1}) \quad (2.17)$$

für beliebige Skalen rekursiv berechnen, wobei  $\mathbf{G}_d^l, \mathbf{H}_d^l \in \mathbb{R}^{(2^{1-l}T) \times (2^{1-l}T)}$  quadratische Faltungsmatrizen der Filter darstellen. Der Index der Filter kennzeichnet die Richtung der Wavelet-Transformation, also Dekomposition  $d$  oder Rekonstruktion  $r$ . Eine schematische Darstellung aus Berechnungsblöcken für die FWT ist in der Abb. 2.1 dargestellt. Alle Filter können aus dem Tiefpassfilter  $\mathbf{g}_d$  abgeleitet werden, wobei die Koeffizienten abhängig vom Mother-Wavelet sind. In den Gl. (2.16) und (2.17) ist nach der Filterung für die FWT ein Downsampling um den Faktor zwei implementiert und mit einem Abwärtspeil gekennzeichnet.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass für die Rekonstruktion von  $\mathbf{x}$  aus den Wavelet-Koeffizienten die Schritte der Dekomposition umzukehren sind. Für die Rekonstruktion

werden die Filter  $\mathbf{g}_r$  und  $\mathbf{h}_r$ , welche komplementär zu den Dekompositionsfiltern sind, benötigt. Es gilt damit folgender Zusammenhang:

$$\mathbf{a}^{l-1} = \frac{1}{2} \left( ((\uparrow 2)\mathbf{a}^l) * \mathbf{g}_r + ((\uparrow 2)\mathbf{d}^l) * \mathbf{h}_r \right) \quad (2.18)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \mathbf{G}_r^l (\uparrow 2)\mathbf{a}^l + \mathbf{H}_r^l (\uparrow 2)\mathbf{d}^l \right). \quad (2.19)$$

Das Upsampling ist durch einen Aufwärtspfeil mit Faktor zwei gekennzeichnet und fügt entsprechend zwischen den Einträgen der Wavelet-Koeffizienten Nullen ein.

**Quantisierung** Beim Einsatz der verlustbehafteten Variante des JPEG2000 Standards liegt die folgende Quantisierung der DWT-Koeffizienten zugrunde:

$$\Delta_b = 2^{R_b - \epsilon_b} \left( 1 + \frac{\mu_b}{2^{11}} \right). \quad (2.20)$$

In Gl. (2.20) setzt sich die Intervallbreite  $\Delta_b$  aus dem Dynamikbereich  $R_b$ , einem Exponenten  $\epsilon_b$  sowie einer Mantisse  $\mu_b$  zusammen. Die Bittiefe der Daten beeinflusst somit den Wert der Quantisierung.

**Kodierung** Die arithmetische Kodierung ist eine Form der Entropiekodierung und erfolgt nach der Quantisierung sowie der Strukturierung der DWT-Koeffizienten in sogenannte Bitebenen und Kodeblöcke. Mehr Informationen zu diesem Thema ist in [113] zu finden.

Für die Dekompression werden, analog zur Vorgehensweise bei JPEG, die inversen Funktionen, wie beispielsweise die inverse Wavelet-Transformation, angewendet.

### 2.2.3 JPEG-Kodierungsaufwand

In diesem Abschnitt erfolgt eine Diskussion zum Berechnungsaufwand bezüglich der Kompression von Datensätzen mit Hilfe von JPEG bzw. JPEG2000. Wie zuvor beschrieben, bestehen beide Verfahren grundlegend aus ähnlichen übergeordneten Komponenten wie Farbraumanpassung, Transformation, Quantisierung, Kodierung, etc.

**Tabelle 2.1:** Verteilung der Logik und Speicher in Prozent für die Architektur aus [1]. Die Angaben beziehen sich auf einen  $8 \times 8$ -Block, der aus 5616 Einheiten für die Logik sowie 2944 für den Speicher besteht.

Komponente	Farbraum	Transformation	Quantisierung	Kodierung
Logik	7.85%	85.33%	5.22%	1.60%
Speicher Bits	-	47.83%	52.17%	-

In der Arbeit [1] wird eine integrierte digitale Architektur für die JPEG-Kompression eines  $8 \times 8$ -Blocks vorgestellt. In der Tab. 2.1 ist die prozentuale Verteilung für Logik- und Speicherbedarf basierend auf der vorgestellten Architektur dargestellt. Diese Angaben sind selbstverständlich als Richtwerte anzusehen. Wird eine andere Optimierungsausrichtung der Architektur gewählt, ändert sich die prozentuale Verteilung. Beispielsweise kann durch Pipelining oder Parallelaufbau hinsichtlich Geschwindigkeit oder Fläche/Energie optimiert werden und damit zu einer anderen Zusammensetzung der Schaltung führen.

Die Tab. 2.1 zeigt, dass der größte Speicherbedarf im Quantisierungsanteil der JPEG-Kompression liegt. Diesbezüglich müssen die inversen Werte aus Gl. (2.13) für die Quantisierungsmatrix  $\Theta$  gespeichert werden. Diese 64 Werte sind zur Quantisierung der Frequenzkoeffizienten nach der Transformation notwendig.

Im Hinblick auf den schaltungstechnischen Berechnungsbedarf bzw. der Berechnungskomplexität dominiert der Logikanteil, welcher für die Transformation erforderlich ist. Sowohl für JPEG als auch JPEG2000 erfolgt die Realisierung der zweidimensionalen Transformation des  $8 \times 8$ -Blocks durch die Zusammensetzung aus zwei eindimensionalen Transformationen und einem sogenannten Transpose Buffer [1, 2, 43]. Dadurch lässt ein aufeinanderfolgendes Transformieren der Spalten und Zeilen des Datensatzes  $\mathbf{D}\hat{\mathbf{X}}\mathbf{D}^T$  erreichen, wobei  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{T \times T}$  die Transformationsmatrix darstellt. Zur Abschätzung der Berechnungskomplexität dient in dieser Stelle die Landau-Notation  $\mathcal{O}(\cdot)$ . Der schaltungstechnische Berechnungsaufwand der DCT im JPEG-Format  $\mathcal{O}(T^2)$  reduziert sich unter Einsatz einer schnellen Variante der Fourier-Transformation, der Fast Fourier-Transform (FFT), zu

$$\mathcal{O}(T \log_2(T)) \tag{2.21}$$

mit  $T$  als Dimension des Eingangsvektors [91]. Diese implementierungstechnische Vorgehensweise erfolgt ebenfalls für die DWT mit  $\mathcal{O}(T^2)$  für JPEG2000, was zu einer reduzierten Komplexität von

$$\mathcal{O}(T) \tag{2.22}$$

mit Hilfe der FWT führt [119]. Je nach Optimierungsausrichtung ist der schaltungstechnische Berechnungsaufwand der Transformation einmalig oder mehrfach, zu Lasten der Geschwindigkeit oder des Flächen-/Energieverbrauches, zu investieren. Des Weiteren ist unabhängig vom Parallelisierungsgrad der Transformationsrealisierung und neben der Implementierung der anderen Komponenten wie Farbraumkonvertierung, Multiplikation mit den invertierten Quantisierungswerten sowie der Umsetzung der verschiedenen Kodierungen ein Kontrollpfad zur Steuerung der JPEG-Kompression zu implementieren.

### 2.2.4 MPEG-4

Die Moving Picture Experts Group (MPEG) veröffentlichte mehrere Verfahren zur Videokompression. Im Zuge dessen wurde speziell für eine hohe Datenkompression der Standard MPEG-4 entwickelt. Die Inhalte dieses Abschnittes basieren auf der Arbeit [94]. Im Folgenden wird das umfangreiche MPEG-Verfahren anhand der grundlegenden Operationen in der H.264/AVC Codec-Implementierung erläutert.

**Unterteilung in Makroblöcke** Im ersten Schritt wird das Bild in quadratische Makroblöcke der gleichen Größe aufgeteilt [66]. Für die Werte der Helligkeit (Luminanz) erfolgt die Verwendung von  $16 \times 16$  und die beiden Farbdifferenzsignale (Chrominanz) jeweils  $8 \times 8$  Blöcke. Abschließend werden die Blöcke in Gruppen bzw. sogenannten Slices angeordnet.

**Intra-Frame-Prädiktion** Anhand von bekannten Bildinhalten werden für benachbarte Makroblöcke Vorhersagen räumlicher Informationen angefertigt [66]. Dies erfolgt mit dem Ziel, lediglich den Rest des Prädiktionsfehlers – Unterschied zwischen vorhergesagtem und tatsächlichem Makroblock – für die Weiterverarbeitung zu verwenden. In H.264/AVC sind dafür verschiedene Prädiktoren hinterlegt. In Zuge dessen steht von diesen eine große Anzahl, bei weiterer Unterteilung der  $16 \times 16$  Blöcke für die Luminanz in kleinere  $4 \times 4$  Unterblöcke, zur Verfügung. Neben Prädiktoren, die allen Bildpunkten den Mittelwert des Blockes zuordnen, existieren weitere acht Richtungsprädiktoren. Für jeden Makroblock wird anhand des erwähnten Fehlers der optimale Prädiktor ausgewählt. Da sliceinterne Makroblöcke, aufgrund der Korrelation der Bilddaten, mit hoher Wahrscheinlichkeit denselben Prädiktor gewählt haben, wird dies am Decoder initial angenommen.

**Bewegungskompensation** In diesem Verarbeitungsschritt erfolgt die Ausnutzung der hohen Korrelation von zeitlich aufeinanderfolgenden Frames im Datensatz durch die sogenannte Inter-Frame-Kodierung [66]. An dieser Stelle können die  $16 \times 16$  Blöcke des Helligkeitslayers in Abhängigkeit des Detailgrades in variable, nicht zwingend quadratische  $M_m \times N_m$ -Blöcke eingeteilt werden. Im Anschluss wird bei H.264/AVC dann ein Referenzbild aus mehreren Zerlegungsvarianten sowie die dazugehörige Verschiebung übertragen.

**Transformation** Neben den verschiedenen Gleichanteilmatrizen der Makroblöcke werden die Restfehler in Form von  $4 \times 4$  Blöcken transformiert [66]. Lediglich auf letztere soll in diesem Abschnitt näher eingegangen werden. Im Gegensatz zu vorherigen MPEG-Versionen erfolgt nicht die Anwendung einer DCT für  $8 \times 8$  Blöcke. Zur Vermeidung von Berechnungsungenauigkeiten findet die Implementierung einer sogenannten Integertransformation statt. Dadurch ist das Transformieren multiplikationsfrei und benötigt

lediglich Additionen und Shift-Operationen.

**Skalierung und Quantisierung** Nach der Transformation der Blöcke ist eine Skalierung und Quantisierung der Koeffizienten notwendig [66]. In H.264/AVC ist die Skalierung in der Quantisierung integriert, wodurch sich auch die Datenrate einstellen lässt. Mit dem Ziel ausschließlich ganzzahlige Berechnungen zu verwenden, existieren für die lineare Quantisierungsskala insgesamt 52 verschiedene Quantisierungsstufen für die Makroblöcke.

**Entropiekodierung** Um die Kompression weiter zu erhöhen, erfolgt eine Kodierung der transformierten und quantisierten Daten. Dazu dienen u.a. das sogenannte Variable Length Coding sowie das Context-based Adaptive Binary Arithmetic Coding. Für tiefere Informationen sei an dieser Stelle auf die Literatur [66] verwiesen.

Für die Dekompression werden, analog zur Vorgehensweise bei JPEG und JPEG2000, die inversen Funktionen angewendet. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird MPEG-4 mit der H.264 Codec-Implementierung als Referenzverfahren zur Beurteilung und Vergleich der Rekonstruktionsgüte neuartiger Ansätze im Bereich Videoverarbeitung eingesetzt.

## 2.3 Compressed Sensing

Das sogenannte CS ist eine mathematische Theorie zur Lösung von (unterbestimmten) linearen Gleichungssystemen unter der Ausnutzung einer inhärenten Struktur der Daten innerhalb einer bekannten Basis. Die Aufbereitung der CS-Theorie in diesem Abschnitt basiert primär auf den Arbeiten [13, 12].

Sei  $\mathbf{X}' \in \mathbb{R}^T$  ein Vektor, im Folgendem  $\mathbf{x} := \mathbf{X}'$ , mit maximal  $K \in \mathbb{N}_0$  Nichtnulleinträgen sowie  $T - K$  Nullen, dann wird  $\mathbf{x}$  als  $K$ -sparses Signal bezeichnet, sodass  $\text{nz}(\mathbf{x}) \leq K$  mit

$$\text{nz}(\mathbf{x}) := |\text{supp}(\mathbf{x})| \quad (2.23)$$

$$:= |\{t \mid x_t \neq 0, t \in \{1, \dots, T\}\}|, \quad (2.24)$$

die Anzahl der Nichtnulleinträge angibt, wobei  $|\{\cdot\}|$  die Kardinalität des Trägers  $\text{supp}(\cdot)$  von  $\mathbf{x}$  kennzeichnet.

Liegt ein vollbesetzter Vektor  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^T$  vor, so existiert in einigen Fällen die Möglichkeit die essentielle Dünnbesetztheit (Sparsity) durch einen Wechsel der Basis  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{T \times T}$  zu erreichen:

$$\mathbf{x} = \mathbf{D}\mathbf{z}. \quad (2.25)$$

In der Regel ist die Basis ein vollständiges Orthonormalsystem. Das bedeutet, dass die Menge der Vektoren aus einem Vektorraum mit Skalarprodukt jeweils die  $\ell_2$ -Norm von eins besitzen und zueinander orthogonal sind. Daher gilt die Eigenschaft

$$\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{D}^T, \quad (2.26)$$

dass die Inverse der Basismatrix gleichzeitig die Transponierte ist. Der Zusammenhang aus Gl. (2.26) vereinfacht die Rücktransformation innerhalb der sparsen Signalrekonstruktion von  $\mathbf{x}$ , da keine Matrixinvertierung durchgeführt werden muss.

Die größte Herausforderung in der CS Theorie ist die Rekonstruktion des sparsen Vektors  $\mathbf{x}$  durch das Lösung eines linearen, in der Regel unterbestimmten  $K < M < T$ , Gleichungssystems

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{n} \quad (2.27)$$

$$= \mathbf{A}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{x} + \mathbf{n}. \quad (2.28)$$

In Gl. (2.28) wird  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times T}$  als Messmatrix bezeichnet, welche den sparsen Vektor  $\mathbf{x}$  unter Berücksichtigung eines anwendungsabhängigen Störeinflusses  $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^M$  auf die Projektion  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$  abbildet. Sofern für die Messmatrix  $M < T$  gilt, führt die Gl. (2.28) zu einem strikten, schlecht gestellten inversen Problem.

Aus Gründen der Vereinfachung und Übersicht wird im folgendem Teil angenommen, dass im Originalbereich ein sparser Vektor vorliegt, daraus folgt  $\mathbf{z} = \mathbf{x}$  und damit  $\mathbf{D} = \mathbf{1}$ . Unter Berücksichtigung von Gl. (2.2) kann ein Kompressionsverhältnis

$$\eta = 100\% \frac{|U|}{|O|} \quad (2.29)$$

$$= 100\% \frac{T - M}{T} = 100\% \left(1 - \frac{M}{T}\right) \quad (2.30)$$

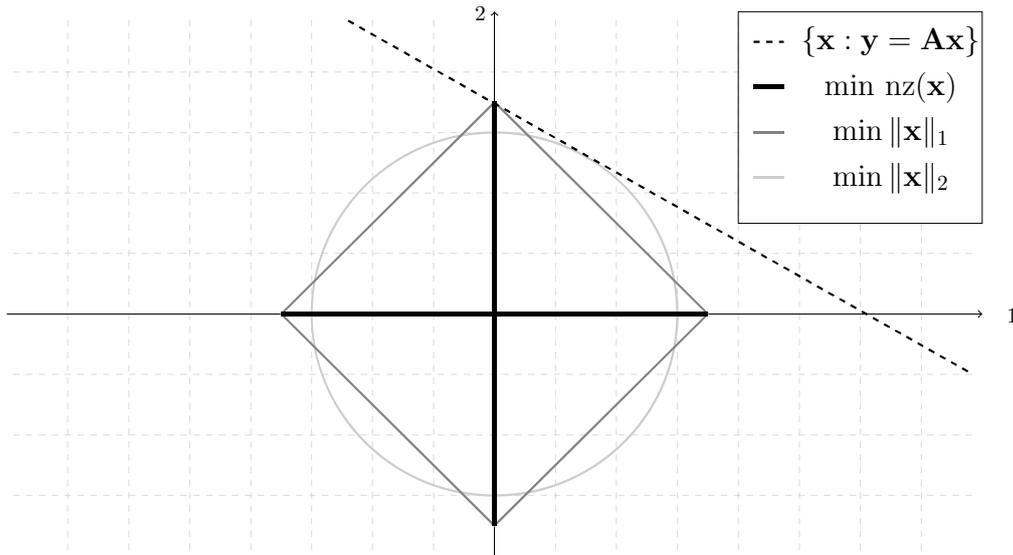
definiert werden. Die ursprüngliche Dimension  $|O| = T$  des sparsen Vektors wird ins Verhältnis zum Grad der Unterbestimmtheit  $|U| = T - M$  der Messmatrix gestellt.

### 2.3.1 $\ell_1$ -Optimierungsproblem

Zur Lösung des linearen Gleichungssystems auf (2.28) erfolgt in der Regel die mathematische Definition eines Optimierungsproblems, in dem das Residuum

$$\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}_{\text{rec}} \quad (2.31)$$

unter Einhaltung von Nebenbedingungen minimiert wird. Eine Nebenbedingung zur Lösung des CS Problems definiert sich durch die Forderung, dass die Rekonstruktion  $\mathbf{x}_{\text{rec}}$  – genau wie das Original  $\mathbf{x}$  – ein sparser Vektor sein muss.



**Abbildung 2.2:** Lösung des  $\ell_2$ - und  $\ell_1$ -Optimierungsproblems sowie der Definition von  $\text{nz}(\mathbf{x})$  im Raum  $\mathbb{R}^2$ .

Ein Standardverfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen ist die Least Squares (LS) Methode, welche formuliert ist durch

$$\mathbf{x}_{\text{rec}} = \arg \min_{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^T} \|\tilde{\mathbf{x}}\|_2, \quad \text{s.t. } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (2.32)$$

Unter Berücksichtigung der anwendungsspezifischen Störgröße  $\mathbf{n}$  wird für die Wiederherstellung von  $\mathbf{x}$  eine Abweichungsgrenze  $\varepsilon$  toleriert, was zur Beschreibung

$$\mathbf{x}_{\text{rec}} = \arg \min_{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^T} \|\tilde{\mathbf{x}}\|_2, \quad \text{s.t. } \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 \leq \varepsilon \quad (2.33)$$

führt. Die Gl. (2.32) sowie (2.33) gibt die Lösung an, in der die Summe der quadratischen Abweichungen von den Projektionen minimiert wird. Allerdings resultiert dieser Ansatz nicht in einen sparsen Vektor. Zur Erhöhung des Verständnisses soll nachfolgend exemplarisch der zweidimensionale Fall mit Hilfe von Abb. 2.2 betrachtet werden. In diesem Szenario ergeben die Vektorkomponenten  $\{x_1, x_2\}$  die Lösung des Problems, welche den Schnittpunkt zwischen der Geraden aller gültigen Vektoren der Menge  $\{\mathbf{x} : \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}\}$  für das unterbestimmte Gleichungssystem und dem sogenannten  $\ell_2$ -Ball bilden. Dies führt zu einem gültigen Lösungsvektor, welcher sich im ersten Quadranten des Koordinatensystems bei ca.  $60^\circ$  befindet, aber nicht die Forderung der Sparsity erfüllt.

Eine zwangsläufige Dünnbesetztheit wird durch die Optimierung der  $\text{nz}(\mathbf{x})$ -Definition aus Gl. (2.24) erreicht:

$$\mathbf{x}_{\text{rec}} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^T} \text{nz}(\mathbf{x}), \quad \text{s.t. } \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 \leq \varepsilon. \quad (2.34)$$

Aus der Literatur [38] ist bereits bekannt, dass sich das Minimierungsproblem eindeutig lösen lässt. Allerdings ist das Problem der Gl. (2.34) in Non-Deterministic Polynomial-Time (NP) lösbar, also NP-schwer. Wegen der notwendigen kombinatorischen Suche nach der  $\text{nz}(\mathbf{x})$  Lösung lässt sich erklären, warum Gl. (2.34) auf diese Weise nicht effizient lösbar ist.

In der Arbeit [24] wurde gezeigt, dass das Ersetzen der  $\text{nz}(\mathbf{x})$ -Definition durch die konvexe  $\ell_1$ -Norm in der Regel zu einer äquivalenten sparsen Lösung führt. In Zuge dessen kann das sogenannte Basis Pursuit (BP) Problem

$$\mathbf{x}_{\text{rec}} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^T} \|\mathbf{x}\|_1, \quad \text{s.t. } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2.35)$$

formuliert werden und unter Berücksichtigung der Störgröße  $\mathbf{n}$  oder tolerierbaren Abweichung zum originalen Vektor  $\mathbf{x}$  das sogenannte Basis Pursuit Denoising (BPDN) Problem

$$\mathbf{x}_{\text{rec}} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^T} \|\mathbf{x}\|_1, \quad \text{s.t. } \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 \leq \varepsilon. \quad (2.36)$$

Eine alternative Beschreibung des Problems liefert der Ansatz über den Least Absolute Selection and Shrinkage Operator (LASSO) [115]

$$\mathbf{x}_{\text{rec}} = \arg \min_{\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^T} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}\|_2^2 + \lambda \|\hat{\mathbf{x}}\|_1, \quad (2.37)$$

welche als Regression mit Sparsity-Forderung verstanden werden kann. Der sogenannte Penalty-Parameter  $\lambda$  stellt einen Trade-Off zwischen Sparsity und Fehler ein.

Sowohl die Gl. (2.35) und (2.36) als auch (2.37) sind durch Anwendung von Verfahren aus der sogenannten linearen Programmierung (LP) effizient lösbar. Die Abb. 2.2 zeigt evident, dass die Ansätze nach  $\text{nz}(\mathbf{x})$  und  $\ell_1$ -Norm mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit zu der gleichen sparsen Lösung führen. Im zweidimensionalen Fall schneidet  $\{\mathbf{x} : \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}\}$  die Achsen des Koordinatensystems, was zwangsläufig  $x_1 = 0$  in der Lösung  $\{x_1, x_2\}$  ergibt. Ein Spezialfall liegt vor, wenn die Gerade aller gültigen Vektoren parallel zum  $\ell_1$ -Ball ausgerichtet ist. Dann existiert keine eindeutige Lösung.

Neben der Forderung nach Sparsity von  $\mathbf{x}$  werden in der CS-Theorie zusätzliche Bedingungen an die Messmatrix  $\mathbf{A}$  gestellt. Dafür wurde in der Arbeit [16] die sogenannte Restricted Isometry Property (RIP)

$$(1 - \delta_K) \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 \leq (1 + \delta_K) \|\mathbf{x}\|_2^2 \quad (2.38)$$

hergeleitet, wobei  $\delta_K < 1$  und  $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} : \text{nz}(\mathbf{x}) \leq K$  gilt. Diese Eigenschaft gibt die näherungsweise Orthogonalität der Untermenge von jeweils  $K$  Spalten der Messmatrix an. Dabei spiegelt  $\delta_K$  die Abweichung der Orthogonalität wider. Sofern die Beschränkung der näherungsweise Längenerhaltung oder Isometrie von  $\mathbf{A}$  erfüllt ist, kann das Problem eindeutig gelöst werden.

Aus diesem Grund ist die Wahl einer geeigneten Messmatrix  $\mathbf{A}$  eingeschränkt, da nicht jede Matrix die Anforderung aus Gl. (2.38) erfüllt. In der Arbeit [4] konnte gezeigt werden, dass Zufallsmatrizen, welche eine  $M \times T$  identisch unabhängige Gaußsche  $\mathcal{N}(0, 1/M)$  oder Bernoullische Verteilung  $P(A_{m,t} = \pm 1/\sqrt{M}) = 0.5$  aufweisen, die RIP der Ordnung  $K$  mit hoher Wahrscheinlichkeit erfüllen. Allerdings muss dafür eine minimale Zeilenanzahl für die Messmatrix vorliegen, um eine erfolgreiche Rekonstruktion zu garantieren. Dem Theorem aus [15] folgend, ist eine Anzahl von

$$M \geq CK \log(T) \left( \sqrt{T} \max_i |(\mathbf{A}\mathbf{D})_i| \right) \quad (2.39)$$

Messungen zu wählen. Mit diesem Wert wird die Zeilenanzahl  $M$  der Messmatrix  $\mathbf{A}$  aus zufälligen und eindeutigen Vektoren definiert. Der Ausdruck in der letzten Klammer in Gl. (2.39) wird als Grad der gegenseitigen Kohärenz zwischen Mess- und Basismatrix bezeichnet.

In dieser Arbeit erfolgt die Berechnung des  $\ell_1$ -Optimierungsproblems als lineare Programmierung mit Hilfe des Convex Optimization Tools (CVX)-Tools [58]. Dabei handelt es sich um eine Toolsammlung für sogenannte disziplinierte konvexe Programmierung, welche mittlerweile für diverse Berechnungsplattformen wie beispielsweise `MATLAB`, `Python` oder `C++` zur Verfügung steht. Für eine Vertiefung dieser Thematik sei an dieser Stelle auf die Literatur [10] verwiesen. Zur Lösung des  $\ell_1$ -Optimierungsproblems werden nachfolgend sowohl klassische als auch neu entwickelte sogenannte Greedy-Ansätze vorgestellt.

### 2.3.2 Greedy-Algorithmen

Es gibt eine Vielzahl von Greedy-Algorithmen in der CS-Literatur, wie beispielsweise der Compressive Sampling Matching Pursuit (CoSaMP) [83], Gradient Pursuit (GP) [7], Orthogonal Matching Pursuit (OMP) [117], Regularized Orthogonal Matching Pursuit (ROMP) [84], Stagewise Matching Pursuit (StOMP) [37] oder das Iterative Hard-Thresholding (IHT) Verfahren, wie der Approximate Message Passing (AMP) [36], welche in dieser Arbeit als Referenz zur Vergleichsmöglichkeit mit neu entwickelten Ansätzen verwendet werden.

Nachfolgend erfolgt die Einführung der Thematik der sparsen Signalrekonstruktion basierend auf dem OMP-Algorithmus. Dies dient dem besseren Verständnis der beiden - in dieser Dissertation - erarbeiteten CS-Verfahren.

### 2.3.2.1 Orthogonal Matching Pursuit

Die meisten traditionellen Greedy-Algorithmen – so auch der OMP [117] – beginnen die sparse Signalrekonstruktion mit der Detektion der Spalte  $\mathbf{a}_t$  aus der Messmatrix  $\mathbf{A}$ , welche die größte Korrelation

$$\mu = \arg \max_{t=1,\dots,T} |\langle \mathbf{r}, \mathbf{a}_t \rangle| \quad (2.40)$$

zu dem Residuum  $\mathbf{r}$  bzw. zu der Projektion  $\mathbf{y}$  in der ersten Iteration aufweist. Dabei wird das Residuum in jedem Durchlauf sukzessive wie folgt angepasst

$$\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{A}_\Lambda \mathbf{x}_\Lambda = (\mathbf{1} - \mathbf{A}_\Lambda \mathbf{A}_\Lambda^\dagger) \mathbf{y}. \quad (2.41)$$

Hier bezeichnet der Ausdruck  $\mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H$  die sogenannte Moore-Penrose Pseudoinverse. Durch diesen Vorgang werden die ausgewählten Spalten  $\mathbf{A}_\Lambda$  – hinterlegt in der Indexmenge  $\Lambda = \Lambda \cup \{\mu\}$  – orthogonal zur Projektion  $\mathbf{y}$  gesetzt, was eine mehrfache Detektion gleicher Spalten verhindert. Der verbleibende Anteil von  $\mathbf{y}$  wird solange schrittweise orthogonalisiert, bis das Residuum verschwindet oder eine definierte Schwelle  $\epsilon$  unterschreitet:

$$\mathbf{A}_\Lambda^T \mathbf{r} = \mathbf{A}_\Lambda^T (\mathbf{1} - \mathbf{A}_\Lambda \mathbf{A}_\Lambda^\dagger) \mathbf{y} \quad (2.42)$$

$$= [(\mathbf{1} - \mathbf{A}_\Lambda \mathbf{A}_\Lambda^\dagger) \mathbf{A}_\Lambda]^T \mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (2.43)$$

Für die Umformung von Gl. (2.42) zu (2.43) wurde die Eigenschaften  $(\mathbf{A}\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$  und  $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = \mathbf{1}$  ausgenutzt. Da  $K < M$  gilt, bildet die Teilmenge  $\Lambda$  der Spalten aus  $\mathbf{A}$  ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem  $\mathbf{A}_\Lambda$ , was zum folgenden  $\ell_2$ -Minimierungsproblem führt:

$$\mathbf{x}_{\Lambda, \text{rec}} = \arg \min_{\mathbf{x}_\Lambda \in \mathbb{R}^{|\Lambda|}} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}_\Lambda \mathbf{x}_\Lambda\|_2 = \mathbf{A}_\Lambda^\dagger \mathbf{y}. \quad (2.44)$$

---

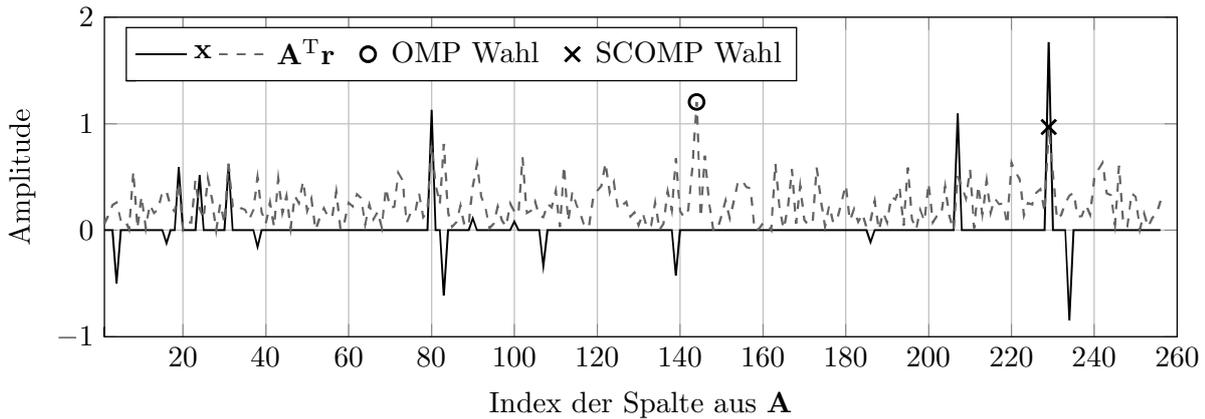
#### Algorithmus 1 OMP nach [117]

---

**Eingang:**  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times T}$ ,  $\epsilon \in \mathbb{R}$

**Ausgang:**  $\mathbf{x}_{\text{rec}} \in \mathbb{R}^T$

- 1:  $\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{x}_{\text{rec}} \leftarrow \mathbf{0}$ ,  $\Lambda \leftarrow \emptyset$ ,  $\mathbf{A}_\Lambda \leftarrow \emptyset$  ▷ Initialisierung
  - 2: **while**  $\|\mathbf{r}\|_2 > \epsilon$  **do** ▷ Iteration bis die Schwelle unterschritten ist
  - 3:      $\mu \leftarrow \arg \max_{t=1,\dots,T \setminus \Lambda} |\langle \mathbf{r}, \mathbf{a}_t \rangle|$  ▷ Detektion der Spalte
  - 4:      $\Lambda \leftarrow \Lambda \cup \{\mu\}$
  - 5:      $\mathbf{x}_\Lambda \leftarrow \mathbf{A}_\Lambda^\dagger \mathbf{y}$  ▷ Lösung des LS-Problems
  - 6:      $\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{y} - \mathbf{A}_\Lambda \mathbf{x}_\Lambda$  ▷ Residuum anpassen
  - 7: **end while**
  - 8:  $\mathbf{x}_{\text{rec}} \leftarrow \mathbf{x}_\Lambda$  ▷ Setzen der Nichtnulleinträge
-



**Abbildung 2.3:** Detektion des Trägers von  $\mathbf{x}$  basierend auf den  $c$  größten Korrelationen von  $\mathbf{A}^T \mathbf{r}$  pro Iteration beim SCOMP. Diese Vorgehensweise ermöglicht eine robustere sparse Signalrekonstruktion im Vergleich zum OMP. Dargestellt ist die erste Iteration für die Vektordimension  $T = 256$  und eine Anzahl von  $K = 16$  Nichtnulleinträgen.

Diese Vorgehensweise nähert sukzessive den originalen Vektor an. Die Komponenten von  $\mathbf{x}_{\Lambda, \text{rec}}$  geben die Nichtnullelemente an den Stellen  $\Lambda$  des Ergebnisvektors  $\mathbf{x}_{\text{rec}}$  an, nachdem alle restlichen Einträge mit Nullen aufgefüllt wurden. Eine Zusammenfassung der sparsen Signalrekonstruktion mit Hilfe des OMP ist im Pseudocode 1 zu finden.

Die Wahl der Spalte aus  $\mathbf{A}$  basierend auf der höchsten Korrelation, Gl. (2.40), ist die entscheidende Stelle innerhalb von Greedy-Algorithmen. Kommt es zu einer fehlerhaften Detektion des Trägers von  $\mathbf{x}$ , kann diese nachfolgend nicht korrigiert werden, was zu einer falschen Rekonstruktion führt. Die Literatur zeigt, dass aus diesem Grund weitere CS Verfahren entwickelt wurden, wie beispielsweise der ROMP [84] etc., um falsch ausgewählten Spalten zu vermeiden. Nachfolgend soll ein neuartiger Ansatz zur sparsen Signalrekonstruktion vorgestellt werden.

### 2.3.2.2 Sub-Correlation Orthogonal Matching Pursuit

Der hier vorgestellte Sub-Correlation Orthogonal Matching Pursuit (SCOMP) basiert von der Vorgehensweise auf dem OMP aus Abschnitt 2.3.2.1. Allerdings verfügt dieser, analog zum CoSaMP [83], über den Vorteil, mehrere Spalten aus der Messmatrix  $\mathbf{A}$  innerhalb einer Iteration zu wählen.

Dafür erfolgt die Auswahl der  $c$  größten Korrelationen zwischen den Projektionen  $\mathbf{y}$  bzw. dem Residuum  $\mathbf{r}$  und den einzelnen Spalten der Messmatrix  $\mathbf{A}$

$$\mu_i = \arg \max_{t=1, \dots, T \setminus \{\Lambda_c\}} |\langle \mathbf{r}, \mathbf{a}_t \rangle| \quad (2.45)$$

$$\Lambda_c = \Lambda \cup \Lambda_c \cup \{\mu_i\}, \quad (2.46)$$

wobei  $i \in \{1, \dots, c\}$  und  $\Lambda_c = \emptyset$  für  $i = 1$  gilt. Der SCOMP ist identisch mit dem OMP im Spezialfall  $c = 1$ , da nur eine Spalte selektiert wird. Im nächsten Schritt muss die LS-Lösung für jede erweiterte Menge individuell berechnet werden:

$$\mathbf{x}_{\Lambda_i, \text{rec}} = \mathbf{A}_{\Lambda \cup \{\mu_i\}}^\dagger \mathbf{r}. \quad (2.47)$$

Nachdem die Nichtnulleinträge für jedes Ergebnis  $\mathbf{x}_{\Lambda_i}$  vorliegen, erfolgt die Detektion der gültigen Spalte aus  $\mathbf{A}$ . Die Lösung mit dem kleinsten Residuum wird für die weiteren Berechnungen verwendet, während die anderen  $c - 1$  verworfen werden

$$\|\mathbf{r}_i\|_2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{A}_{\Lambda \cup \{\mu_\Gamma\}} \mathbf{x}_{\Lambda \cup \{\mu_\Gamma\}, \text{rec}}\|_2. \quad (2.48)$$

Diese Vorgehensweise liefert eine robustere sparse Signalrekonstruktion im Vergleich zum OMP. Im Pseudocode 2 ist der gesamte Algorithmus zusammengefasst. Die Abb. 2.3 zeigt exemplarisch den Vorteil des SCOMP anhand der einzelnen Korrelationen  $\mathbf{A}^T \mathbf{y}$  über den Index der Spalte von  $\mathbf{A}$  sehr deutlich. In diesem Beispiel führt die Wahl über den maximalen Korrelationswert zu einer fehlerhaften Rekonstruktion. Der SCOMP lässt hingegen eine Auswahl von  $c$  potentiellen Spalten zu und entscheidet sich für jene mit dem kleinsten Residuum, was in diesem Fall den gültigen Nichtnulleintrag detektiert.

Zur Beurteilung der Rekonstruktionsqualität wird in der CS-Literatur üblicherweise die Darstellung des Fehlers, nach der Definition aus Gl. (2.5), über die normierte Messmatrixdimension  $M/T$  sowie normierter Sparsity  $K/T$  verwendet. Die Zusammenlegung dieser beiden Betrachtungen wird als sogenanntes Phasendiagramm bezeichnet [37].

---

### Algorithmus 2 SCOMP Algorithmus zur sparsen Signalrekonstruktion

---

**Eingang:**  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times T}$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $c \in \mathbb{N}_0$

**Ausgang:**  $\mathbf{x}_{\text{rec}} \in \mathbb{R}^T$

- 1:  $\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{x}_{\text{rec}} \leftarrow \mathbf{0}$ ,  $\Lambda \leftarrow \emptyset$ ,  $\mathbf{A}_\Lambda \leftarrow \emptyset$  ▷ Initialisierung
  - 2: **while**  $\|\mathbf{r}\|_2 > \varepsilon$  **do** ▷ Iteration bis die Schwelle unterschritten ist
  - 3:    $\Lambda_c \leftarrow \emptyset$
  - 4:   **for**  $i = 1, \dots, c$  **do** ▷ Iteration zur Bestimmung der zusätzlichen Korrelation
  - 5:      $\mu_i \leftarrow \arg \max_{t=1, \dots, T \setminus \{\Lambda_c\}} |\langle \mathbf{r}, \mathbf{a}_t \rangle|$  ▷ Detektion der  $c$  Spalten
  - 6:      $\Lambda_c \leftarrow \Lambda \cup \Lambda_c \cup \{\mu_i\}$
  - 7:      $\mathbf{x}_i \leftarrow \mathbf{A}_{\Lambda \cup \{\mu_i\}}^\dagger \mathbf{y}$  ▷ Lösung der  $c$  LS-Probleme
  - 8:      $\mathbf{r}_i \leftarrow \mathbf{y} - \mathbf{A}_{\Lambda \cup \{\mu_i\}} \mathbf{x}_i$  ▷ Berechnung der  $c$  Residuen
  - 9:   **end for**
  - 10:    $\Gamma \leftarrow \arg \min_{t=1, \dots, c} \|\mathbf{r}_t\|_2$  ▷ Kleinstes Residuum auswählen
  - 11:    $\Lambda \leftarrow \Lambda \cup \{\mu_\Gamma\}$  ▷ Träger anpassen
  - 12:    $\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}_\Gamma$  ▷ Residuum anpassen
  - 13: **end while**
  - 14:  $\mathbf{x}_{\text{rec}} \leftarrow \mathbf{x}_\Gamma$  ▷ Setzen der Nichtnulleinträge
-

Für jeden CS-Algorithmus wurde in den Simulationen die gleiche Messmatrix  $\mathbf{A}$ , deren Einträge einer Normalverteilung  $\mathcal{N}(0, 1/M)$  folgen, verwendet. Des Weiteren ist jeder Datenpunkt die Mittelwertbildung aus mehreren Rekonstruktionen mit den gleichen Parametern, wobei aber die Messmatrix neu generiert wurde. Analog verhält es sich mit den sparsen Signalen  $\mathbf{x}$ , welche, unter Einhaltung der vorgegebenen Sparsity, für jede Simulation zufällig generiert werden.

Die Untersuchung erfolgt für den SCOMP mit  $c = \{2, 3, 4\}$  zusätzlichen Korrelationen. Dieser wird sowohl mit einer Auswahl von klassischen CS-Greedy-Algorithmen, namentlich eingeführt am Anfang des Abschnittes 2.3.2, als auch mit den Programmen aus der CVX Toolbox, welche lediglich als Referenz dient, verglichen. Zur Interpretation der Graphen ist die Einführung einer NMSE-Schwelle für die erfolgreiche Rekonstruktion sinnvoll, diese hängt in der Regel von der Anwendung ab, soll in dieser Auswertung exemplarisch 0.01 betragen. Die Abb. 2.4a zeigt, dass im Fall einer Zunahme der Messmatrixdimension  $M$ , also eine Reduktion der Kompression, alle Varianten des SCOMP am schnellsten den definierten fehlerfreien Bereich erreichen. In Abb. 2.4b ist qualitativ das gleiche Resultat für die Erhöhung der Sparsity  $K$  zu beobachten. Bezüglich des Rekonstruktionsfehlers ist der SCOMP den anderen Greedy-Verfahren überlegen.

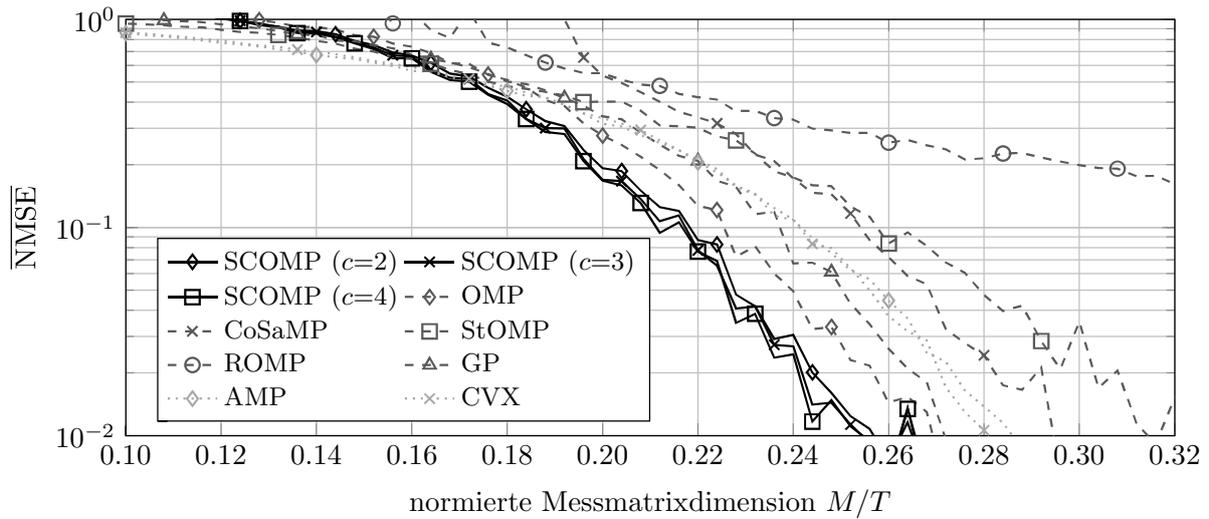
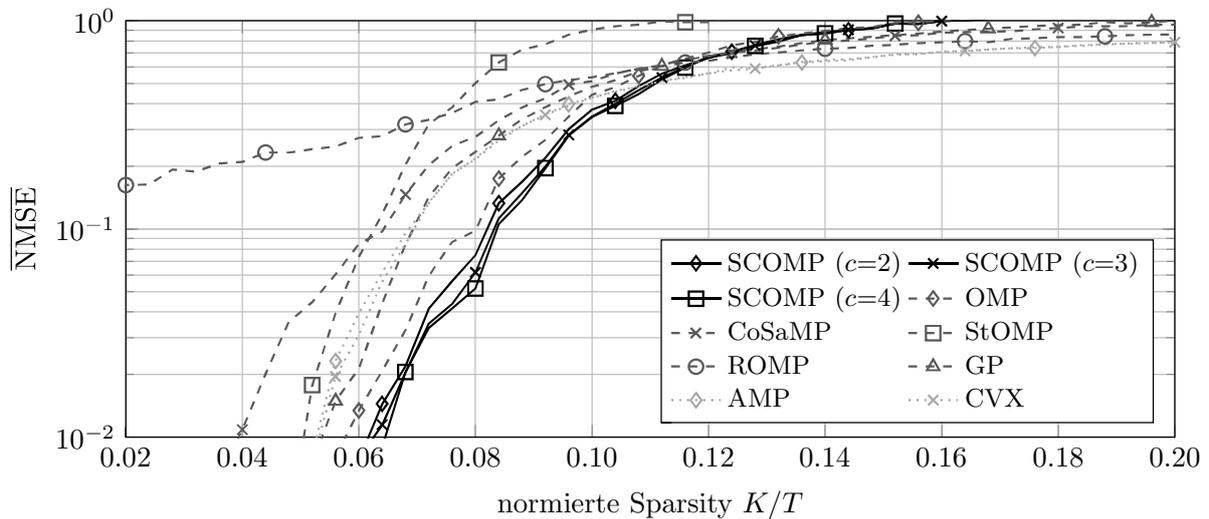
Aus praktischer Sicht ist es ausreichend, mit einer geringen Anzahl von Korrelationen zu arbeiten. Im Vergleich zum OMP müssen  $c - 1$  zusätzliche LS-Probleme pro Iteration gelöst werden. Gerade unter Berücksichtigung der zunehmenden Dimension von  $\mathbf{A}_\Lambda^\dagger$  pro Durchlauf ist die Berechnung der Pseudoinversen der Schritt mit dem größten Aufwand. Dementsprechend ist eine parallele Umsetzung dieser Komponente des SCOMP zur Reduktion der Berechnungszeit zu empfehlen.

Des Weiteren ist zu sagen, dass die vorgestellten Greedy-Verfahren zur sparsen Rekonstruktion von Vektoren mit Nichtnulleinträgen aus dem reellen Wertebereich ohne Hinzunahme einer Störgröße  $\mathbf{n}$  geeignet sind. Im folgenden Abschnitt wird ein neuartiger CS-Ansatz eingeführt, der robuster auf Störeinflüsse reagiert sowie ein endliches Wertealphabet berücksichtigt.

### 2.3.2.3 Compressed Sensing Viterbi-Rekonstruktion

In diesem Abschnitt wird ein algorithmischer Ansatz basierend auf dem Maximum Likelihood Sequence Estimation (MLSE) zur robusten sparsen Signalrekonstruktion unter Berücksichtigung eines endlichen Wertealphabets  $\mathcal{A}$  eingeführt. Ein solches Alphabet beinhaltet die Null und beispielsweise die Symbole einer klassischen Binary Phase-Shift Keying (BPSK), Quadrature Phase-Shift Keying (QPSK), o.ä. aus dem Bereich der Informationstechnik.

**Maximum Likelihood Sequence Estimation** Dafür ist der Ausgangspunkt ein Vektor  $\mathbf{x} \in \mathcal{A}^T$  mit Elementen aus einem endlichen Wertealphabet  $\mathcal{A}$  und ein Modell, welches sich äquivalent zu einem linearen, zeitvarianten Kanal mit zeitlich veränderlicher Kanalimpulsantwort  $\mathbf{b}_t \in \mathbb{R}^L$  verhält [63]. Hierbei wird angenommen, dass die jeweiligen

(a) NMSE über die Messmatrixdimension  $M/T$  mit festem  $K = 16$ .(b) NMSE über den Grad der Sparsity  $K/T$  mit festem  $M = 64$ .

**Abbildung 2.4:** Auswertung der Rekonstruktionsqualität NMSE hinsichtlich der Messmatrixdimension und Sparsity. Vergleich des vorgestellten SCOMP unter Berücksichtigung von  $c = \{2, 3, 4\}$  weiteren Korrelationen mit klassischen CS-Algorithmen. Die Einträge der Messmatrix  $\mathbf{A}$  folgen  $\mathcal{N}(0, \frac{1}{M})$  und die Störgröße  $\mathbf{n}$  wurde nicht implementiert.

Kanalimpulsantworten bekannt sind und sich die Länge des Gedächtnis  $L - 1$  des Kanals nicht ändert. Daraus resultiert, dass der Kanal durch eine Bandmatrix  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(T+L-1) \times T}$  mit den Impulsantworten  $\mathbf{b}_t$  auf der Hauptdiagonalen beschrieben werden kann. Somit gilt der folgende Zusammenhang

$$z_t = \sum_{l=1}^L b_{l,t-l} x_t \quad (2.49)$$

oder in vektorieller Notation unter Berücksichtigung einer Störgröße  $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^{T+L-1}$

$$\mathbf{z} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{n}, \quad (2.50)$$

woraus sich auch eine Finite Impulse Response (FIR)-Filterstruktur ableiten lässt. Dabei entspricht  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{T+L-1}$  dem Ausgangssignal.

Zur Wiederherstellung von  $\mathbf{x}$ , bei Kenntnis über den Kanal  $\mathbf{B}$  und dem Ausgangssignal  $\mathbf{z}$ , gibt es die Möglichkeit einer elementweisen Schätzung. Dabei wird der Wert aus dem bekannten Wertealphabet  $\mathcal{A}$  aus  $|\mathcal{A}| \in \mathbb{N}$  Elementen ausgewählt, welcher die maximale Wahrscheinlichkeit bei der Betrachtung des Ausgangssignals besitzt. Diese Vorgehensweise wird als Maximum a posteriori (MAP)-Kriterium bezeichnet. Unter Berücksichtigung eines endlichen Wertealphabets und des Satzes von Bayes kann die dazugehörige bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\arg \max_m P(\mathcal{A}_m | z_k) = \arg \max_m \frac{p_{Z_k | \mathcal{A}_m}(z_k) P(\mathcal{A}_m)}{p_{A_k}(z_k)} \quad (2.51)$$

formuliert werden [11]. Hierbei ist der Nenner der Gl. (2.51) zu vernachlässigen, da die Werte des Eingangssignals  $x_t$  unabhängig sind und somit die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion eines stationären Prozesses vorliegt. Damit lässt sich das MAP-Kriterium wie folgt definieren:

$$\arg \max_m p_{Z_k | \mathcal{A}_m}(z_k) P(\mathcal{A}_m). \quad (2.52)$$

Im Fall, dass die a priori Wahrscheinlichkeit  $P(\mathcal{A}_m)$  für jedes Eingangssignal  $x_k$  identisch oder unbekannt ist, kann selbige vernachlässigt werden. Dadurch geht die Entscheidungsdefinition vom MAP zu einem Maximum Likelihood (ML)-Kriterium über:

$$\arg \max_m p_{Z_k | \mathcal{A}_m}(z_k). \quad (2.53)$$

Darauf aufbauend soll der Übergang von einer Schätzung einzelner Werte  $x_k$  zu ganzen Sequenzen  $\mathbf{x}$  definiert werden. Die Maximierung der Verbundwahrscheinlichkeitsdichtefunktion, unter Berücksichtigung der Eigenschaften für Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von stationären Prozessen, führt zum MLSE [63]:

$$\arg \max_u p_{\mathbf{z} | u}(\mathbf{z}). \quad (2.54)$$

Die Lösung der MLSE ist jene Eingangssequenz  $\mathbf{x}_u$ , die mit  $u \in \{1, \dots, |\mathcal{A}|^T\}$  einen beliebigen Vektor, bestehend aus den Elementen des Alphabets  $\mathcal{A}$ , beschreibt. Daraus resultieren insgesamt  $|\mathcal{A}|^T$  Hypothesen zur Prüfung des Maximierungsproblems.

Um die Verbundwahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Ausgangssignals aufzustellen, wird zunächst die Gl. (2.50) nach der Störgröße  $\mathbf{n}$  umgeformt und nachfolgend in die Verbundwahrscheinlichkeitsdichtefunktion des reellen Gaußprozesses  $p_{\mathbf{N}}(\mathbf{n})$  eingesetzt:

$$p_{\mathbf{A}|u} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}^L} e^{-\frac{\mathbf{n}^T \mathbf{n}}{\sigma_n^2/2}} \quad (2.55)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}^L} e^{-\frac{(\mathbf{z}-\mathbf{B}\mathbf{x}_u)^T(\mathbf{z}-\mathbf{B}\mathbf{x}_u)}{\sigma_n^2/2}} = p_{\mathbf{N}}(\mathbf{z} - \mathbf{B}\mathbf{x}_u). \quad (2.56)$$

Da es sich beim Argument der Exponentialfunktion aus Gl. (2.56) um einen monoton steigenden Ausdruck handelt, kann die Betrachtung, im Hinblick auf eine Maximierung der Verbunddichte, auf diesen beschränkt werden. Unter Berücksichtigung eines Additive White Gaussian Noise (AWGN)-Kanals und der Eigenschaft, dass ein Maximierungsproblem durch Negierung zu einem korrespondierenden Minimierungsproblem umwandelbar ist, kann die MLSE

$$\arg \min_u (\mathbf{z} - \mathbf{B}\mathbf{x}_u)^T (\mathbf{z} - \mathbf{B}\mathbf{x}_u) = \arg \min_u \|\mathbf{z} - \mathbf{B}\mathbf{x}_u\|_2^2 \quad (2.57)$$

mit formuliert werden. Ein Weg um die Problemstellung aus Gl. (2.57) zu lösen, ist eine rekursive Berechnung der Eingangssequenz  $\mathbf{x}$ .

**Viterbi-Algorithmus** Diesbezüglich wird mit dem Viterbi-Algorithmus ein Ansatz eingeführt, welcher eine Großzahl der zur Prüfung stehenden Hypothesen bereits während der Berechnung verwirft. Das iterative Viterbi-Verfahren sucht, basierend auf einer Suchstrategie, die Lösung mit dem sogenannten kürzesten Weg. Damit lässt sich die Berechnungsdauer signifikant reduzieren. Der arithmetische Aufwand entspricht der Zweiganzahl von  $|\mathcal{A}|^L$  pro Zustand  $t \in [1, T + L - 1]$ , wobei durch den Verwurf lediglich  $|\mathcal{A}|^{L-1}$  Zustände gespeichert werden müssen [63, 99].

Basierend auf der Minimierung von  $\|\mathbf{z} - \mathbf{B}\mathbf{x}\|_2^2$  kann dadurch die Eingangssequenz mit der höchsten Wahrscheinlichkeit bestimmt werden. Die Anwendung des Viterbi-Algorithmus ermöglicht in diesem Zusammenhang eine rekursive Ermittlung der Lösung [46]. Der Ausgangspunkt bildet die Definition eines sogenannten Kanalzustandes  $\mathbf{s} \in \mathcal{A}^{L-1}$  durch

$$\mathbf{s}_t = (x_{t-L+1}, x_{t-L+2}, \dots, x_{t-1})^T \quad (2.58)$$

für jeden Zeitpunkt  $t$ . Erfolgt die Übertragung eines neuen Wertes  $x_t$ , so nimmt der Kanal den Zustand  $s_{i,t+1}$ , in Anlehnung an das FIR-Filter, im nächsten Zeitpunkt ein. Aus dieser Eigenschaft resultiert, dass in jedem Zustand insgesamt  $|\mathcal{A}|$  Zustandsübergänge existieren.

Mit einem sogenannten Trellisdiagramm lassen sich sämtliche Kombinationen der Zustandsübergänge kompakt darstellen. Das Kanalgedächtnis  $L - 1$  und die Signallänge  $T$  geben dabei die Anzahl der Trellisstufen  $T + L$  vor.

Im MLSE-Optimierungsproblem kann die euklidische Metrik für eine beliebige Sequenz  $\mathbf{x}$  rekursiv mit Hilfe von Gl. (2.49) bestimmt werden. Dadurch ergeben sich für jeden Zeitpunkt  $t$  sogenannte Summenpfadkosten

$$\rho_{\mathbf{s}_j,t} = \rho_{\mathbf{s}_d,t-1} + |z_t - \tau_{\mathbf{s}_d\mathbf{s}_j,t}|^2 \quad (2.59)$$

eines Pfades im Zustand  $\mathbf{s}_j$  mit  $j \in \{1, \dots, (L - 1)^{|\mathcal{A}|}\}$ , welche abhängig vom Zustandswechsel von  $\mathbf{s}_{d,t-1}$  in  $\mathbf{s}_{j,t}$  sind. Die Transistionskosten  $\tau_{\mathbf{s}_d\mathbf{s}_j,t}$  setzen sich dabei aus einer störfreien Kanalübertragung und dem Element der Eingangssequenz zum Zeitpunkt  $t$  zusammen:

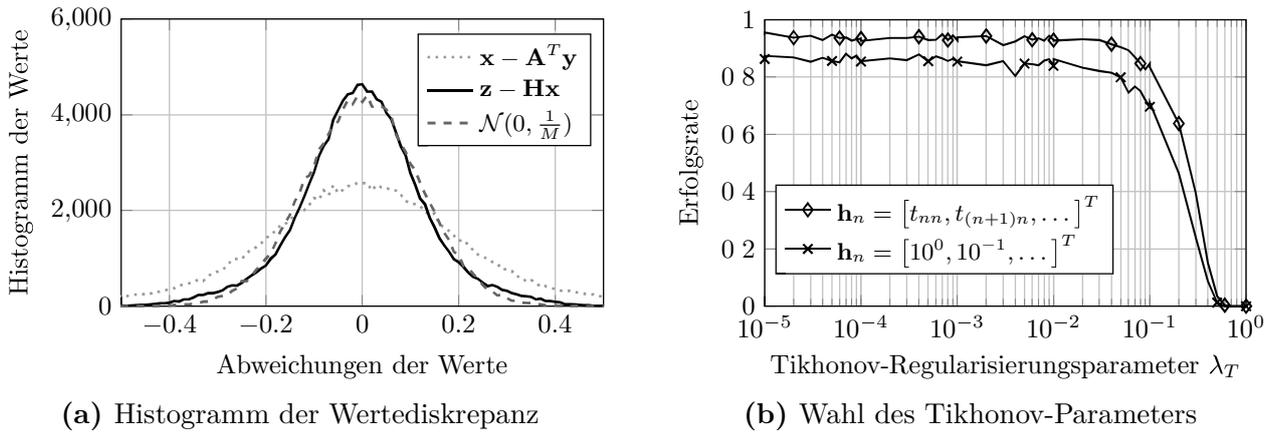
$$\tau_{\mathbf{s}_d\mathbf{s}_j,t} = \hat{\mathbf{b}}_t \begin{pmatrix} \mathbf{s}_d \\ x_t \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

Dabei beschreibt  $\hat{\mathbf{b}}_t$  die Kombination der Einträge aus den letzten  $L$  Kanalimpulsantworten, also der Zeile  $t$  der Matrix  $\mathbf{B}$ . Tritt der Fall ein, dass mehrere Pfade über den selben Zustand  $\mathbf{s}_j$  laufen, wird der Pfad mit den kleinsten Summenpfadkosten aus Gl. (2.59) für die weiteren Berechnungen verwendet. Alle weiteren Pfade werden verworfen, was zu der erwähnten Reduktion des Berechnungsaufwandes führt.

**Sparse Viterbi Rekonstruktion** Die Abb. 2.3 aus dem vorherigen Abschnitt zum SCOMP motiviert die Anwendung des Viterbi-Algorithmus. Hierbei bildet  $\mathbf{A}^T \mathbf{y} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ , als verzerrte Version des sparsen Signals  $\mathbf{x} \in \mathcal{A}^T$ , das Fundament zur Interpretation als nachrichtentechnisches Entzerrungsproblem. In dieser Arbeit dient für die Entzerrung des Signals der Viterbi-Algorithmus.

Das eingeführte Konzept dient als Grundlage für einen neuartigen Ansatz zur CS-Rekonstruktion basierend auf den Viterbi-Algorithmus, sofern die Diskrepanz zwischen der verzerrten Beobachtungen und dem Original (näherungsweise) einer Gauß-Verteilung  $\mathcal{N}$  folgt. Wie in Abb. 2.5a dargestellt, ist dies nicht ohne Anpassung von  $\mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{y}$  gegeben. Zur Übersetzung der Methodik in die CS-Terminologie werden dafür die Pfadmetriken durch die LASSO-Formulierung der Gl. (2.37) nach einer Regularisierung der Messmatrix angepasst. Der hier vorgestellte Ansatz ist noch nicht vollständig ausgereift und soll daher als mögliches Konzept für zukünftige CS-Algorithmen verstanden werden.

Der Ausgangspunkt für die Herleitung der entwickelten Compressed Sensing Viterbi (CSVit) Rekonstruktion bildet die Generierung einer Bandmatrix aus dem unterbestimmten linearen Gleichungssystem aus Gl. (2.27). Bekannt ist, dass das unvollständige System  $\mathbf{A}$  einen niedrigen Rang  $\text{rang}(\mathbf{A}) \leq M$  besitzt woraus folgt, dass die dazu-



**Abbildung 2.5:** Vergleich der Histogramme eines 16-sparsen Vektors  $\mathbf{x} \in \mathcal{A}^T$  mit  $\mathcal{A} = \{-1, 0, 1\}$  und dessen verzerrter Version  $\mathbf{A}^T \mathbf{y}$  mit einer Unterabtastung von  $M = 72$ . Normalverteilung für die Diskrepanz zwischen den Signalen als Grundlage für einen MLSE-Ansatz. Die Untersuchung des Tikhonov-Regularisierungsparameters  $\lambda_T$  führt für verschiedene Bandstrukturen in  $\mathbf{B}$  zu einer einheitlichen Schwelle von  $\lambda_T < 10^{-2}$  bzgl. einer erfolgreichen Trägerdetektion.

gehörige Gram-Matrix  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  singularär ist. Aus diesem Grund erfolgt vor der nötigen Matrixzerlegung die Anwendung der sogenannten Tikhonov-Regularisierung

$$\mathbf{A}^T \mathbf{y} = \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{n}) \quad (2.61)$$

$$\approx (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda_T \mathbf{1}) \mathbf{x} + \mathbf{A}^T \mathbf{n} \quad (2.62)$$

$$\approx \mathbf{T} \mathbf{x} + \mathbf{A}^T \mathbf{n}, \quad (2.63)$$

wobei  $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{T \times T}$  aufgrund des Tikhonov-Terms  $\lambda_T \in [0, 1]$  vollen Rang besitzt und  $\mathbf{A}^T \mathbf{n}$  die Veränderung des Rauschens kennzeichnet. Um eine abgeschnittene Bandmatrix  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{T \times T}$  für den Viterbi-Algorithmus zu generieren, ist die regularisierte Gram-Matrix  $\mathbf{T}$  im nächsten Schritt in

$$\mathbf{T} = \mathbf{V} \mathbf{B}. \quad (2.64)$$

zu zerlegen. Die Bandmatrix  $\mathbf{B}$  kann als äquivalenter Mehrwegekanal interpretiert werden, welche ausschließlich Nichtnulleinträge auf der Haupt- sowie  $L - 1$  untere Nebendiagonalen besitzt. Die Spalten  $\mathbf{b}_t$  von  $\mathbf{B}$  mit  $t \in \{1, 2, \dots, T\}$  können als zeitvariante Koeffizienten eines FIR-Filters verstanden werden. Die Abb. 2.5b zeigt die Untersuchung des Tikhonov-Regularisierungsparameters  $\lambda_T$  hinsichtlich der Erfolgsrate, Verhältnis der erfolgreichen Trägerdetektion und Gesamtdurchführungszahl, für verschiedene Bandvarianten in  $\mathbf{B}$ . Sowohl ein Bandausschnitt der Matrix  $\mathbf{T}$  als auch

eine Folge von konstanten, aber monoton fallenden Werten  $\{10^0, 10^{-1}, \dots\}$  führt zu der Wahl  $\lambda_T < 10^{-2}$ .

Der verbleibende Teil  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{T \times T}$  der Matrixzerlegung im CSVit ist unabhängig von  $\mathbf{y}$  und muss nur einmal durch  $\mathbf{V} = \mathbf{T}\mathbf{B}^{-1}$  bestimmt werden. Sowohl  $\mathbf{T}$  also auch  $\mathbf{B}$  sind invertierbar, was durch eine Singular Value Decomposition (SVD) einfach überprüfbar ist.

Aufgrund der Anwendung der Tikhonov-Regularisierung von Gl. (2.63) folgt eine alternative Formulierung

$$\mathbf{z} \approx \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{n} \quad (2.65)$$

$$\approx \mathbf{B}\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{n}} \quad (2.66)$$

für die lineare Abbildung des sparsen Vektors mittels der Bandmatrix  $\mathbf{B}$  auf eine modifizierte Version der Projektion  $\mathbf{z} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{y} \in \mathbb{R}^T$ . Hierbei kennzeichnet  $\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{n}$  die Veränderung des Rauschens  $\mathbf{n}$ .

Das endliche Alphabet  $\mathcal{A}$  des sparsen Vektors  $\mathbf{x}$  definiert die Anzahl der gültigen Zustände im sogenannten Trellisdiagramm an. Damit allerdings eine sparse Signalrekonstruktion durchführbar ist, erfolgt an dieser Stelle eine Modifikation der Pfadmetriken. Der klassische LS-Ansatz wird um den LASSO-Term  $\lambda_V\|\mathbf{x}\|_1$ , Gl. (2.37), erweitert

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 \Rightarrow \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda_V\|\mathbf{x}\|_1, \quad (2.67)$$

wobei der  $\lambda_V$  Strafparameter die Sparsity erzwingen soll. Allerdings beinhaltet Gl. (2.67) noch die traditionelle CS-Problemstellung, welche für den neuen Ansatz wie folgt angepasst werden muss:

$$= \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda_V\|\mathbf{x}\|_1 \quad (2.68)$$

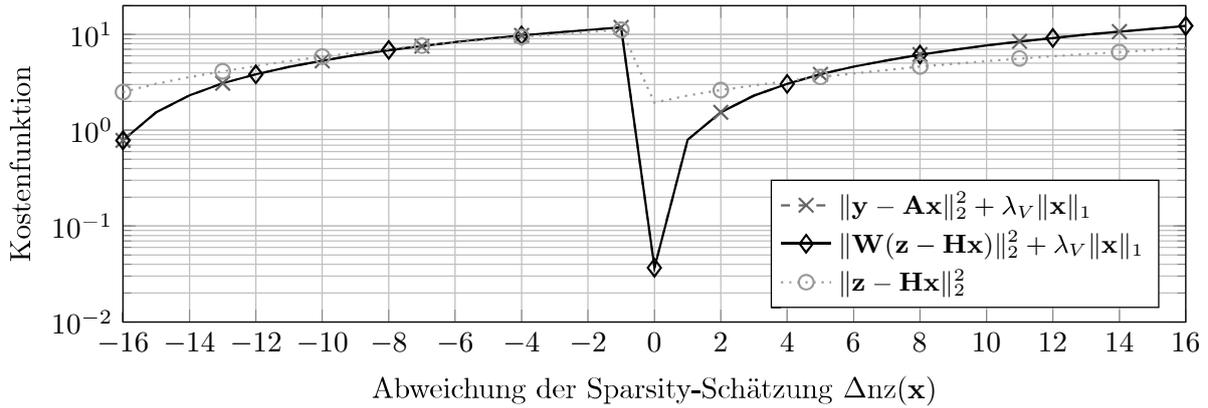
$$= \|(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x})\|_2^2 + \lambda_V\|\mathbf{x}\|_1 \quad (2.69)$$

$$\approx \|(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{y} - \mathbf{T}\mathbf{x})\|_2^2 + \lambda_V\|\mathbf{x}\|_1 \quad (2.70)$$

$$\approx \|(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}(\mathbf{z} - \mathbf{B}\mathbf{x})\|_2^2 + \lambda_V\|\mathbf{x}\|_1 \quad (2.71)$$

$$\approx \|\mathbf{W}(\mathbf{z} - \mathbf{B}\mathbf{x})\|_2^2 + \lambda_V\|\mathbf{x}\|_1, \quad (2.72)$$

hierbei bildet  $\mathbf{W} = (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}$  die sogenannte Gewichtsmatrix. Um die Formulierung aus Gl. (2.72) als Pfadmetrik innerhalb des Viterbi-Algorithmus zu verwenden, muss wie eingangs erwähnt gelten, dass die Diskrepanz  $\mathbf{z} - \mathbf{B}\mathbf{x}$  einer Normalverteilung folgt. Die Abb. 2.5a stellt ein Histogramm der Abweichung dar. Bei Zuhilfenahme von statistischen Parametern, wie die sogenannte Schiefe und Kurtosis, lässt sich über den sogenannten Jarque-Bera-Test [59] klassifizieren, ob der Datensatz näherungsweise Gauß-verteilt ist.



**Abbildung 2.6:** Kostenfunktion in Abhängigkeit der Varianz des Träger  $\Delta n_z(\mathbf{x})$  in dem Einträge hinzugefügt oder entfernt werden.

Die sparse Signalrekonstruktion für CS-Problemstellungen, basierend auf dem Viterbi-Algorithmus, bedarf einer Anpassung der Summenpfadkosten

$$\rho_t = \rho_{t-1} + \|\mathbf{w}_t \left( z_t + \langle \hat{\mathbf{B}}_t, \begin{pmatrix} \mathbf{s}_t \\ x_t \end{pmatrix} \rangle \right)\|_2^2 + \lambda_V |x_t|, \quad (2.73)$$

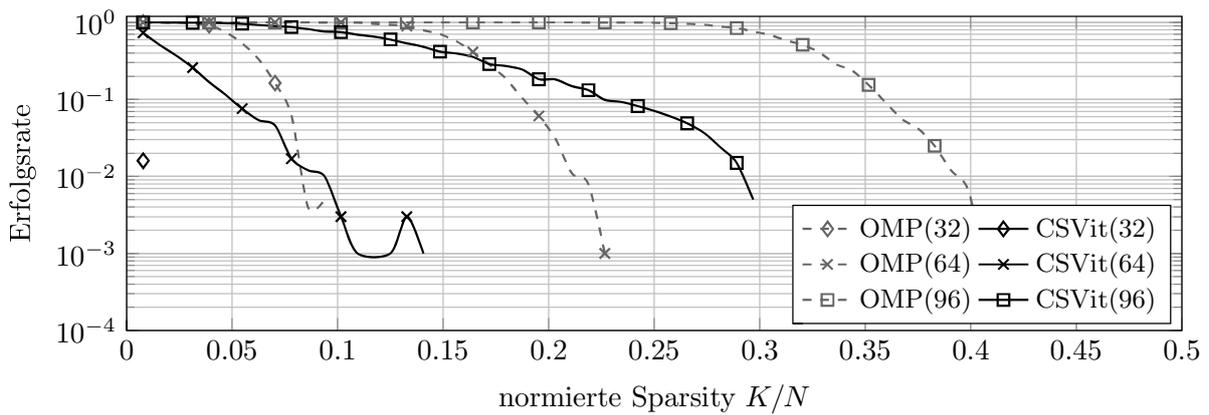
wobei Gl. (2.73) für jeden gültigen Pfad zum Zeitpunkt  $t$  im Trellisdiagramm zu berechnen ist. Der Vektor  $\hat{\mathbf{B}}_t$  stellt die  $t$ -te Zeile aus  $\mathbf{B}$ , reduziert auf die Nichtnulleinträge, dar. Des Weiteren bezeichnet  $\mathbf{s}_t$  den aktuellen Zustand des jeweiligen Pfades.

Die Abb. 2.6 zeigt den Einfluss einer fehlerhaften Trägerdetektion hinsichtlich der Kostenfunktion des Minimierungsproblems. In diesem Szenario werden zufällig einige Nichtnulleinträge des sparsen Vektors  $\mathbf{x}$  hinzugefügt oder entfernt

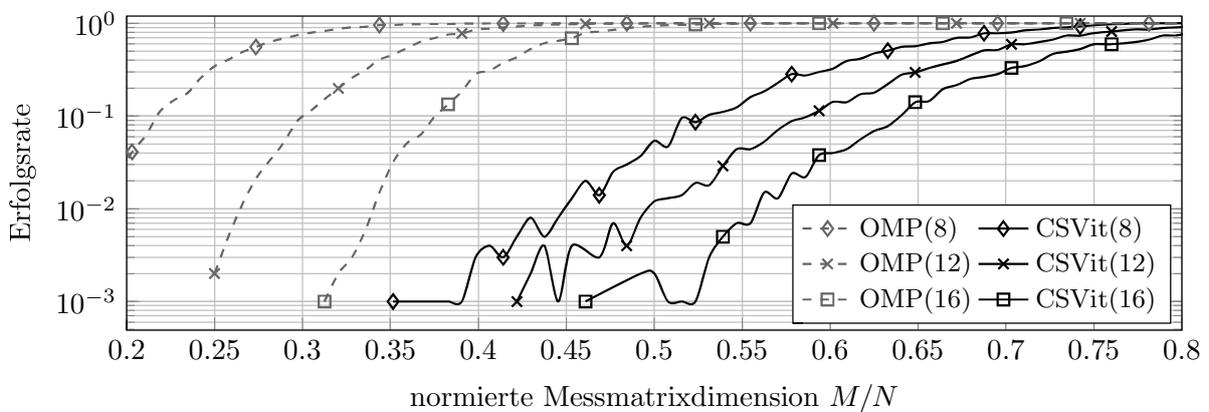
$$\Delta n_z(\mathbf{x}) = \pm |\text{supp}(\mathbf{x}) \oplus \text{supp}(\tilde{\mathbf{x}})|, \quad (2.74)$$

wobei  $\tilde{\mathbf{x}}$  die modifizierte Version darstellt. Jede der dargestellten Kostenfunktionen besitzt ihr globales Minimum bei  $\Delta n_z(\mathbf{x}) = 0$ , also fehlerfreie Detektion des Trägers. Des Weiteren wird deutlich, dass die Lösung des eingeführten CSVit-Algorithmus der klassischen LASSO-Formulierung entspricht. Die Vernachlässigung der Gewichtsmatrix  $\mathbf{W}$  sowie des Terms  $\lambda_V \|\mathbf{x}\|_1$  hat Uneindeutigkeiten bzgl. der Trägerdetektion zur Folge. Um die Qualität des vorgestellten CSVit-Ansatzes zu demonstrieren, zeigen die Abb. 2.7 und 2.8 die Rekonstruktion im Vergleich zum klassischen OMP. In den Auswertungen werden die typischen CS-Parameter, wie die Messmatrixdimension  $M$  oder der Grad der Sparsity  $K$ , für verschiedene Intensitäten  $\{0, 15, 20\}$  dB der Störgröße  $\mathbf{n}$  dargestellt. Jeder Datenpunkt in den Abbildungen setzt sich aus dem Mittelwert einer großen Anzahl von Rekonstruktionen zusammen.

Im störfreien Fall  $\mathbf{n} = \mathbf{0}$  erfolgt die Bewertung anhand der Erfolgsrate, die durch das Verhältnis zwischen der Anzahl der erfolgreichen Rekonstruktionen und Gesamtanzahl



(a) NMSE über Sparsity bei 0 dB

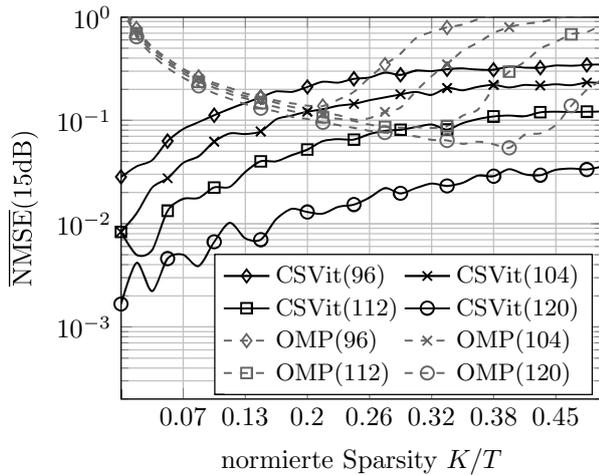


(b) NMSE über Messmatrixdimension bei 0 dB

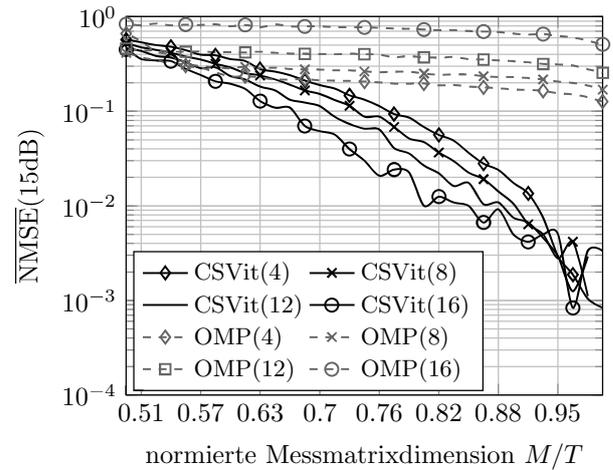
**Abbildung 2.7:** Rekonstruktionsqualität des CSVit ( $L = 7$ ) im Vergleich zum OMP für zufällig generierte sparse Vektoren  $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^{128}$ . Untersucht wird die Sparsity  $K$  (oben) sowie die Messmatrixdimension  $M$  (unten). Die Zahl in der Klammer innerhalb der Legende gibt jeweils die andere CS-Größe  $M$  bzw.  $K$  an.

der Versuche definiert ist. In der Untersuchung steht die Detektion des Trägers vom sparsen Vektor im Fokus. Der vorgestellte CSVit verzeichnet ein ideales Rekonstruktionsverhalten, allerdings für schlechtere Grenzwerte  $K$  und  $M$  im Vergleich zum OMP. Das bedeutet, dass der OMP eher den fehlerfreien Bereich erreicht.

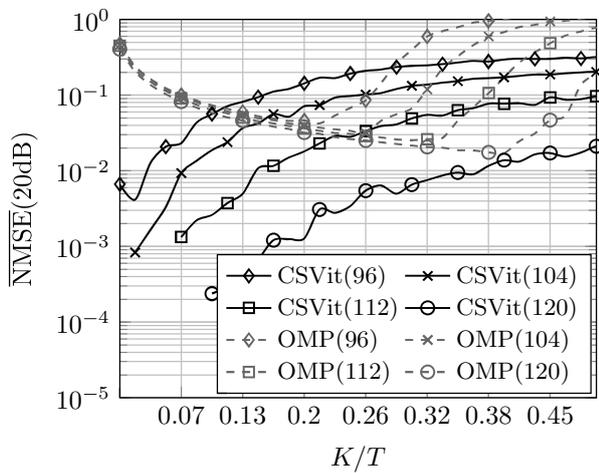
Die Abb. 2.8 stellt die Ergebnisse unter Berücksichtigung verschiedener Störungen  $\mathbf{n}$  dar. In diesem Szenario erreicht der OMP eine fehlerfreie Rekonstruktion, welche im Allgemeinen von der Anwendung abhängt zum Beispiel 0.01, für die hier verwendeten CS-Parameter. An dieser Stelle ist anzumerken, dass der OMP nicht grundlegend für Rauschen ausgelegt wurde. Im Gegensatz dazu, zeigt der CSVit deutlich robustere Rekonstruktionseigenschaften. Allerdings bedeutet in diesen Simulationen ein NMSE von  $1/K$ , dass der Träger um einen Nichtnulleintrag falsch rekonstruiert wurde. Liegt lediglich



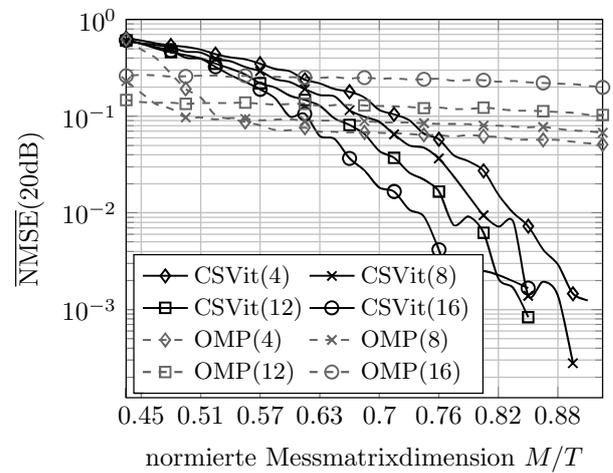
(a) NMSE über Sparsity bei 15 dB



(b) NMSE über Messmatrixdimension bei 15 dB



(c) NMSE über Sparsity bei 20 dB



(d) NMSE über Messmatrixdimension bei 20 dB

**Abbildung 2.8:** Rekonstruktionsqualität des CSVit ( $L = 5$ ) im Vergleich zum OMP für zufällig generierte sparse Vektoren  $\mathbf{x} \in \{-1, 0, 1\}^{128}$ . Untersucht wird die Sparsity  $K$  (links) sowie die Messmatrixdimension  $M$  (rechts) unter Berücksichtigung eines  $\{0, 15, 20\}$  dB AWGN-Kanals. Die Zahl in der Klammer, innerhalb der Legende, gibt jeweils die andere CS-Größe  $M$  bzw.  $K$  an.

die Verfehlung des Trägers bei  $\mathbf{x} \in \{-1, 0, 1\}$  um einen einzelnen Nichtnulleintrag vor, dann gilt

$$\overline{\text{NMSE}} < \frac{\|\mathbf{1}\|_2}{\|\mathbf{K}\|_2} = 1/K, \quad (2.75)$$

was ein Nachweis ist, dass in die arithmetische Mittelwertbildung der Rekonstruktionen mindestens eine fehlerfreie Wiederherstellung des  $K$ -sparsen Vektors einfließt. Die Überprüfung der Grenze aus Gl. (2.75) bzgl. des CSVit in den Abb. 2.7 und 2.8 belegt die

Fähigkeit, sparse Vektoren erfolgreich zu rekonstruieren. Allerdings geschieht dies nicht zuverlässig, was an verschiedenen Faktoren wie der Regularisierung oder Matrixzerlegung liegen kann. Der vorgestellte Ansatz ist noch nicht vollständig ausgereift und soll daher lediglich als Grundlage dienen.

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden die vorgestellten CS-Methoden zur Signalrekonstruktion, unter Verwendung des MATLAB CVX-Tools, als Vergleichsverfahren für die nachfolgend eingeführte Technik verwendet. Ausschlaggebend dafür ist die vorteilhafte Eigenschaft von CS, Daten mit Hilfe des unterbestimmten linearen Gleichungssystems  $\mathbf{A}$  (Messmatrix) zu erfassen. Dadurch erfolgt eine inhärente Datenkompression, für die lediglich Additionen und Multiplikationen zur Verrechnung von Messmatrixeinträgen und erfasstem Signal benötigt werden.

Im Hinblick auf Systeme mit beschränkten Ressourcen, zum Beispiel bzgl. schaltungstechnischem Energie- und Flächenbedarf, ist diese Vorgehensweise begünstigend. Die aufwendige Datenrekonstruktion erfolgt außerhalb des eingeschränkten Systems. In diesem Zusammenhang ist auch die Sprache von einer Verschiebung des Rechenaufwands von der Datenerfassungs- zur Rekonstruktionsseite. Klassische Datenkompressionsverfahren wie JPEG benötigen mehrere Berechnungsstufen wie eine Transformation, Quantisierung, Umsortierung mit Differenzkodierung, etc. Wie bereits in Abschnitt 2.2.3 aufgezeigt, resultieren diese verschiedenen Komponenten, je nach Optimierungsausrichtung der Implementierung, in eine gewisse schaltungstechnische Berechnungskomplexität größer Null. Der damit verbundene Nachteil hinsichtlich der Geschwindigkeit oder Flächen-/Energieverbrauch beim Parallelaufbau kann zu einem Realisierungsausschluss dieser Verfahren in Systemen mit einer begrenzten Verfügbarkeit genau dieser Ressourcen führen.

## 2.4 Inpainting

Zunächst soll das Inpainting, also die digitale Restauration von Daten, in diesem Abschnitt im Allgemeinen eingeführt werden. Im Sinne des besseren Verständnisses der Vorgehensweise erfolgt die Einschränkung auf Graustufendaten  $\mathbf{X} \in [0, 1]^{M \times T}$ . Anzumerken sei, dass die Verarbeitung von Farbdaten durch das Hinzufügen weiterer Layer zu erreichen ist.

Neben zweidimensionalen Bildern (2D) kann der betrachtete Datensatz  $\mathbf{X}$  auch durch ein Signal (1D), Video (3D) oder ein Array höherer Dimension definiert sein. Die ursprüngliche Dimension besitzt keine Relevanz, da nachfolgend, zur mathematischen Beschreibung der Problemstellung, überwiegend Vektoren verwendet werden. Die Überführung in eine vektorisierte Darstellung erfolgt mit Hilfe des  $\text{vec}(\cdot)$ -Operators, der die Spalten eines 2D Datensatzes untereinander anordnet

$$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{M \times T} : \text{vec}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}' \in \mathbb{R}^D \text{ mit } D = MT \quad (2.76)$$

oder im 3D Fall erst die Spalten eines sogenannten  $M \times N$ -Frames sowie danach folgend die weiteren Frames untereinander anordnet

$$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{M \times N \times T} : \text{vec}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}' \in \mathbb{R}^D \text{ mit } D = MNT. \quad (2.77)$$

In der klassischen Inpainting-Terminologie werden die Positionen im Datensatz  $\mathbf{X}$ , welche zum Restaurationsproblem gehören, durch die sogenannte Maske  $\mathbf{\Omega}$  gekennzeichnet [120]. Die Maske  $\mathbf{\Omega}$  besitzt dieselbe Dimension wie  $\mathbf{X}$  und beinhaltet lediglich binäre Einträge  $\{0, 1\}$ . Die Einsen bzw. Nullen charakterisieren hierbei die Einträge aus  $\mathbf{X}$ , welche unverändert erhalten bleiben bzw. gelöscht und anschließend mit Hilfe der Inpainting-Verfahren zu restaurieren sind. Mathematisch lässt sich die Maskierung auch durch eine logische Maske  $\mathbf{M} \in \{0, 1\}^{D \times D}$ , deren Einträge

$$M_{m,t} = \begin{cases} (\text{vec}(\mathbf{\Omega}))_t & m = t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.78)$$

sich auf der Hauptdiagonalen befinden und durch  $\mathbf{\Omega}$  definiert sind, mit Hilfe des linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{X}'_{\Omega} = \mathbf{M}\mathbf{X}' = \text{vec}(\mathbf{X}_{\Omega}) = \text{vec}(\mathbf{\Omega} \circ \mathbf{X}) \quad (2.79)$$

beschreiben, wobei der  $\circ$ -Operator das Hadamard-Produkt, also eine elementweise Multiplikation, kennzeichnet. Zwei wichtige Erweiterungen der Gl. (2.79) können die Berücksichtigung der Maskierung  $\mathbf{M}$  innerhalb einer alternativen Domäne  $\mathbf{S}' = \mathbf{D}\mathbf{X}'$  durch die Basismatrix  $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{D \times D}$  sowie der Einfluss von Störungen  $\mathbf{n} \in \mathbb{C}^D$  sein:

$$\mathbf{S}'_{\Omega} = \mathbf{M}\mathbf{S}' + \mathbf{n} = \mathbf{M}\mathbf{D}\mathbf{X}' + \mathbf{n}. \quad (2.80)$$

Erfolgt die Maskierung im ursprünglichen Bereich, so gilt  $\mathbf{S}'_{\Omega} = \mathbf{D}\mathbf{X}'_{\Omega} = \mathbf{X}'_{\Omega}$ , wobei  $\mathbf{D}$  die Einheitsmatrix  $\mathbf{1}$  ist.

Des Weiteren kennzeichnet  $O = \{o \in \mathbb{N} | o \leq D\}$  die Menge aller Datenpunkte von  $\mathbf{X}'$  an,  $B$  die Menge der unmaskierten Punkte sowie  $U$  die Menge der maskierten Punkte:  $|O| = |B| + |U|$ . Aufgrund der Nullzeilen in  $\mathbf{M}$  bilden die Gl. (2.79) und (2.80) ein unterbestimmtes Gleichungssystem, da  $\text{rang}(\mathbf{M}) = |B|$  gilt. Die Herausforderung der verschiedenen Inpainting-Ansätze besteht darin, eine möglichst exakte Approximation  $\mathbf{X}'_{\text{rec}} \in \mathbb{R}^D$ , unter Kenntnis von  $\mathbf{X}'_{\Omega}$ , der Basismatrix  $\mathbf{D}$  und der Maske  $\mathbf{M}$ , zu finden. Daraus lässt sich ein unbeschränktes Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{X}'} \|\mathbf{M}\mathbf{D}\mathbf{X}' - \mathbf{S}'_{\Omega}\|_2^2 + \lambda_I \mathcal{R}(\mathbf{X}') \quad (2.81)$$

formulieren, welches sich aus dem Residuum und einer regularisierten Funktion  $\mathcal{R}(\cdot)$  mit  $\lambda_I \in \mathbb{N}^+$  zur Beschreibung der Randbedingungen zusammensetzt [120]. Die Regularisie-

rung des unterbestimmten Systems aus Gl. (2.81) ist erforderlich, um eine eindeutige Rekonstruktion als Lösung des inversen Problems zu finden. Im Zuge dessen zeigt die Literatur verschiedene Vorschläge für  $\mathcal{R}$  auf. In der Bildverarbeitung erfolgt häufig eine Beschreibung über die  $\ell_p$ -Norm  $\|\mathbf{D}_{\mathcal{R}}\mathbf{X}'\|_p^p$  mit

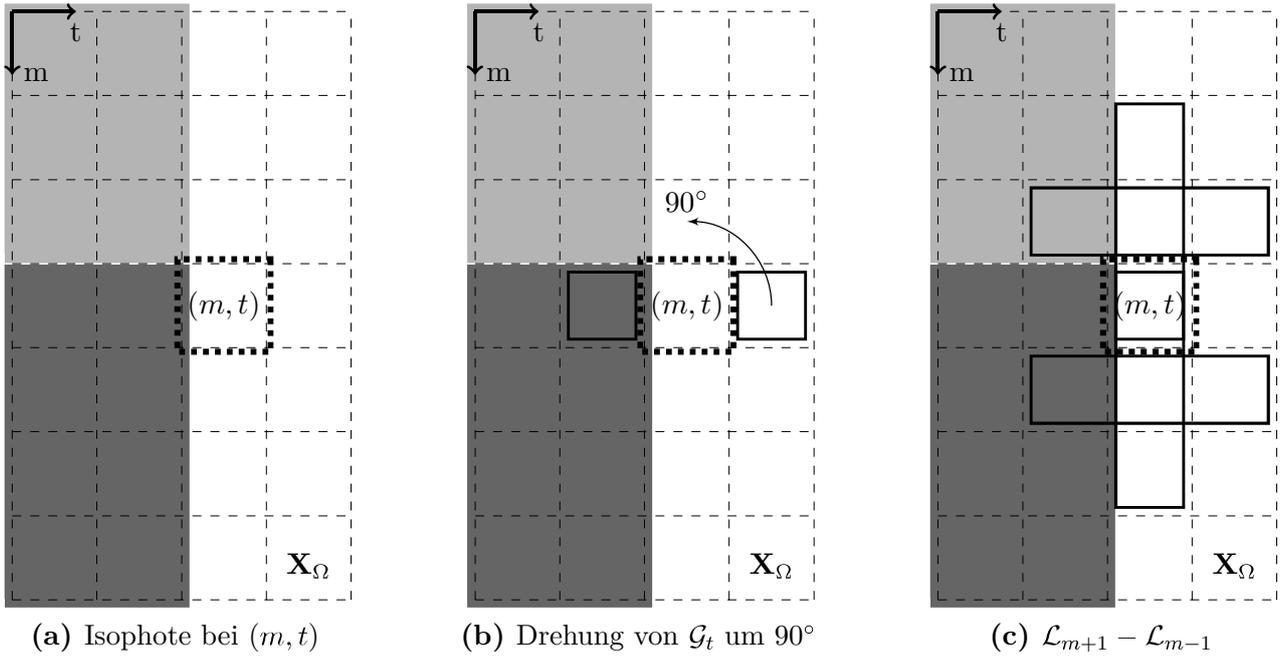
$$\|x\|_p := \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad (2.82)$$

wobei  $\mathbf{D}_{\mathcal{R}}$  eine beliebige Basismatrix darstellt. Wie im Verlauf der Arbeit gezeigt wird, kann die Basismatrix  $\mathbf{D}_{\mathcal{R}}$  für eine duale Rekonstruktion verwendet werden. Dabei erfolgt die Maskierung innerhalb des ersten Bereiches und die Datenwiederherstellung in Form eines Denoisings in der zweiten Domäne.

Ist die Zielsetzung der Rekonstruktion eine übermäßige Glättung des Bildes, so empfiehlt sich die Verwendung der  $\ell_2$ -Norm. Allerdings bietet diese klassische Tikhonov Regularisierung keine Möglichkeit, die Detailinformationen wiederherzustellen [116, 47]. Um diesen Nachteil auszugleichen, ist eine Erweiterung dieser Regularisierung ratsam. Die sogenannte Total-Variation (TV) optimiert in der  $\ell_2$ -Norm den Gradienten  $\mathcal{G}(\mathbf{X}')$  statt einfach nur  $\mathbf{X}'$  [96, 19]. Um eine sparse Lösung für  $\mathbf{X}'$  mit Hilfe von  $\mathbf{D}$  zu erzwingen, ist die  $\ell_1$ -Norm optional in Kombination mit einer weiteren Transformationsbasis anzusetzen. Des Weiteren lassen sich beliebige Randbedingungen unabhängig von der vorgestellten  $\ell_p$  als regularisierte Funktion oder Nebenbedingung (subject to (s.t.)) in Gl. (2.81) implementieren. Um eine Entkopplung der verschiedenen Kostenfunktionen des Minimierungsproblems zu erreichen, ist ein alternierender Lösungsprozess mit Teilproblem durch Hilfsvariablen möglich. Ein gängiger Ansatz für diese Vorgehensweise ist die Anwendung der sogenannten Alternating Direction Method of Multipliers (ADMM) [9]. Nachfolgend werden verschiedene Inpaintingverfahren zur Wiederherstellung eines maskierten Datensatzes eingeführt.

### 2.4.1 Strukturbasiertes Inpainting

Der sogenannte Structure-based Inpainting (SBI) Algorithmus aus [6] ist ein iteratives Verfahren zur Rekonstruktion von maskierten Daten  $\mathbf{X}_{\Omega} \in \mathbb{R}^{M \times T}$ . Dabei handelt es sich um eine alternierende Berechnungsvorschrift, bestehend aus zwei Komponenten für die Datenwiederherstellung: Isophotenwiederherstellung  $\mathcal{I}(\cdot)$  und Diffusion  $\mathcal{D}(\cdot)$ . Als Isophoten werden lokale Ansammlungen von Datenwerten mit näherungsweise gleichem Betrag bezeichnet, welche an Intensitäten mit (deutlich) abweichendem Wert grenzen. Demnach breitet sich die Isophote in der Abb. 2.9a horizontal entlang des Überganges der beiden Grauwerte links vom Punkt  $(m, t)$  aus. Die Fortsetzung solcher Isophoten am Rand der Maske  $\Omega$  bildet den Ausgangspunkt des Rekonstruktionsprozesses. Der Inhalt in diesem Abschnitt basiert auf der Einführung des SBI-Algorithmus aus [6]. Bezogen auf das Minimierungsproblem aus Gl. (2.81) werden in diesem Abschnitt Bilder



**Abbildung 2.9:** Visualisierung einer horizontalen Isophote im maskierten Datensatz  $\mathbf{X}_\Omega$  sowie die Detektion und Vervollständigung selbiger mit Hilfe der Differenz der verschobenen Laplace-Operatoren und des gedrehten Gradientens für den Punkt  $(m, t)$ .

im Originalbereich  $\mathbf{D} = \mathbf{1}$  rekonstruiert, wobei sich die Randbedingung beispielsweise aus einem Diffusionsvorgang zusammensetzt, welcher nachfolgend erklärt wird. In der angegebenen Gl. (2.83) bzw. (2.84) ist die Update-Vorschrift für  $a \in [1, A_{\max}]$  Iterationen mit Schrittweite  $\Delta a$  einmal in Matrix-Form

$$\mathbf{X}_\Omega^{a+1} = \mathbf{\Omega} \circ (\mathbf{X}_\Omega^a + \Delta a \cdot \mathcal{I}(\mathbf{X}^a)) \quad (2.83)$$

$$= \mathbf{\Omega} \circ (\mathbf{X}_\Omega^a + \Delta a \cdot \mathbf{X}_J^a) \quad (2.84)$$

und bezogen auf die einzelnen Einträge der Matrix, wobei in diesem Abschnitt aus Übersichtsgründen auch  $X(m, t) \doteq X_{m,t}$  gilt,

$$X_\Omega^{a+1}(m, t) = X_\Omega^a(m, t) + \Delta a \cdot X_J^a(m, t) \quad (2.85)$$

formuliert. Die Berechnung ist lediglich im Bereich der Maskierung  $\{m, t : \omega(m, t) = 0\}$  durchzuführen. Das Update  $\mathbf{X}_J = \mathbf{X}_D \circ \mathbf{X}_{\text{SL}}$  setzt sich aus der Detektion und Vervollständigung der Isophoten  $\mathbf{X}_D$  sowie dem sogenannten Slope-Limiter  $\mathbf{X}_{\text{SL}}$  für die Stabilität des Prozesses zusammen. Der Operator  $\mathcal{I}(\cdot)$  beinhaltet die beiden Berech-

nungskomponenten. Ersteres erfolgt auf Basis des sogenannten Laplace-Operators  $\mathcal{L}(\cdot)$  für die jeweiligen Koordinatenrichtungen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X(m, t)) &= X(m+1, t) + X(m-1, t) \\ &\quad + X(m, t+1) + X(m, t-1) - 4X(m, t). \end{aligned} \quad (2.86)$$

Diese Berechnungsvorschrift wird auch als sogenannter Laplace-Faltungskernel oder -Filter bezeichnet. Die Bestimmung der Differenz der jeweils verschobenen Laplace-Operatoren, nachfolgend exemplarisch für die vertikale Richtung  $m$  formuliert,

$$\mathcal{L}_{m+1}(X(m+1, t)) - \mathcal{L}_{m-1}(X(m-1, t)) \quad (2.87)$$

liefert die Detektion der Isophote am Rand von  $\Omega$ , da die Ausläufer, wie in Abb. 2.9c gezeigt, selbige einschließt. Über die Berechnung der Gradienten  $\mathcal{G}(\cdot)$  erfolgt die Identifikation der bevorzugten Richtung für das Update. In der Literatur wird dafür häufig die sogenannte Zentraldifferenz

$$\mathcal{G}_m(X(m, t)) = X(m+1, t) - X(m-1, t) \quad (2.88)$$

$$\mathcal{G}_n(X(m, t)) = X(m, t+1) - X(m, t-1) \quad (2.89)$$

verwendet. Allerdings sind zu Beginn des Rekonstruktionsprozesses die größten Differenzen am Rand von  $\Omega$ . Um die Vervollständigung von Isophoten zu priorisieren, muss der Vektor mit dem normierten Gradienten um  $90^\circ$  gedreht werden, was in Abb. 2.9b dargestellt ist. In diesem Beispiel ist  $\mathcal{G}_m = 0$  und  $\mathcal{G}_t \neq 0$ , sodass lediglich, aufgrund der  $90^\circ$  Drehung, die vertikale Differenz  $\mathcal{L}_{m+1} - \mathcal{L}_{m-1}$  in das Update einfließt. In Abb. 2.9c ist die Detektion einer Isophote mit Hilfe dieser Vorgehensweise dargestellt. Die Vervollständigung der Isophote lässt sich dann wie folgt berechnen:

$$X_D(m, t) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{G}_m^2 + \mathcal{G}_t^2}} \left\langle \begin{pmatrix} -\mathcal{G}_t \\ +\mathcal{G}_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{m+1} - \mathcal{L}_{m-1} \\ \mathcal{L}_{t+1} - \mathcal{L}_{t-1} \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (2.90)$$

Damit besteht das Update aus dem Produkt der Isophotenwiederherstellung  $\mathbf{X}_D$  und dem Slope-Limiter  $\mathbf{X}_{SL}$ :

$$X_I(m, t) = X_D(m, t) \cdot X_{SL}(m, t). \quad (2.91)$$

Aufgrund der fallabhängigen Präsenz von Instabilitäten in Gl. (2.90) zu Beginn der Rekonstruktion, wurde ein zusätzlicher Faktor  $\mathbf{X}_{SL}$  hinzugefügt. Dieser setzt sich aus

dem Betrag von ausgewählten Vorwärts-  $\mathcal{G}_f(\cdot)$  und Rückwärtsdifferenzen  $\mathcal{G}_b(\cdot)$  und in Abhängigkeit von der Vorzeichenfunktion  $\text{sgn}(\cdot)$  von  $\mathbf{X}_D$  zusammen:

$$X_{\text{SL}}(m, t) = \begin{cases} X_+ & X_D(m, t) > 0 \\ X_- & X_D(m, t) < 0 \end{cases}. \quad (2.92)$$

Die Separation in Gl. (2.92) gewährleistet, dass die Rekonstruktion nach endlicher Zeit konvergiert. Diese Eigenschaft ist abhängig von Schwellwertentscheidungen zwischen minimalen sowie maximalen Differenzen gegenüber Null:

$$X_+ = \sqrt{\min(0, \mathcal{G}_{mb})^2 + \max(0, \mathcal{G}_{mf})^2 + \min(0, \mathcal{G}_{tb})^2 + \max(0, \mathcal{G}_{tf})^2}, \quad (2.93)$$

$$X_- = \sqrt{\max(0, \mathcal{G}_{mb})^2 + \min(0, \mathcal{G}_{mf})^2 + \max(0, \mathcal{G}_{tb})^2 + \min(0, \mathcal{G}_{tf})^2}. \quad (2.94)$$

In den Gl. (2.93) und (2.94) kennzeichnen die Indizes  $m$  und  $t$  jeweils die Richtung der Vorwärts- bzw. Rückwärtsdifferenz, nachfolgend exemplarisch für zwei Fälle dargestellt

$$\mathcal{G}_{mf}(X(m, t)) = X(m + 1, t) - X(m, t), \quad (2.95)$$

$$\mathcal{G}_{nb}(X(m, t)) = X(m, t) - X(m, t - 1). \quad (2.96)$$

Nach den  $A_{\text{max}}$  Iterationen für die Isophotenwiederherstellung sieht der strukturbasierte Inpainting-Algorithmus einen Glättungsprozess vor. Dieser wird durch  $b \in [1, B_{\text{max}}]$  aufeinanderfolgende sogenannte anisotropen Diffusionen  $\mathcal{D}(\cdot)$  als Iterationsgleichung im maskierten Bereich  $\Omega$

$$X_{\Omega}^{b+1}(m, t) = X_{\Omega}^b(m, t) + \Delta b \cdot \mathcal{D}^b(X(m, t)) \quad (2.97)$$

mit der Schrittweite  $\Delta b$  umgesetzt. Das Ziel diese richtungsabhängigen Diffusion ist die Glättung bzw. das Entfernen von Rauschen um die vorhandenen Isophoten deutlicher

---

### Algorithmus 3 SBI nach [6]

---

**Eingang:**  $\mathbf{A}_{\Omega} \in \mathbb{R}^{M \times T}$ ,  $\Omega \in \{0, 1\}^{M \times T}$ ,  $A_{\text{max}}$ ,  $B_{\text{max}}$ ,  $I_{\text{max}}$

**Ausgang:**  $\mathbf{A}_{\text{rec}} \in \mathbb{R}^{M \times T}$

- 1:  $\mathbf{A}_{\Omega} \leftarrow \mathcal{D}(\mathbf{A}_{\Omega})$  ▷ Initiale Diffusion vor  $\mathcal{I}(\cdot)$
  - 2: **for**  $i = 1 \dots I_{\text{max}}$  **do**
  - 3:     **for**  $a = 1 \dots A_{\text{max}}$  **do**
  - 4:          $\mathbf{A}_{\Omega}^{a+1} \leftarrow \mathbf{A}_{\Omega}^a + \Delta a \cdot \mathcal{I}(\mathbf{A}_{\Omega})$  ▷ Detektion/Vervollständigung der Isophoten
  - 5:     **end for**
  - 6:     **for**  $b = 1 \dots B_{\text{max}}$  **do**
  - 7:          $\mathbf{A}_{\Omega}^{b+1} \leftarrow \mathbf{A}_{\Omega}^b + \Delta b \cdot \mathcal{D}(\mathbf{A}_{\Omega})$  ▷ Anisotrope Diffusion
  - 8:     **end for**
  - 9: **end for**
  - 10:  $\mathbf{A}_{\text{rec}} \leftarrow \mathbf{A}_{\Omega}$  ▷ Ausgabe der Approximation
-

heraus zu stellen. Für die Umsetzung der anisotropen Diffusion existiert eine Vielzahl an Realisierungsvarianten in der Literatur [6], wobei für die Inhalte dieser Arbeit entweder eine Exponentialfunktion

$$\mathcal{D}_e = \mathcal{G}_{mf} e^{-(\mathcal{G}_{mf}/\sigma_d)^2} + \mathcal{G}_{tf} e^{-(\mathcal{G}_{tf}/\sigma_d)^2} - \mathcal{G}_{mb} e^{-(\mathcal{G}_{mb}/\sigma_d)^2} - \mathcal{G}_{tb} e^{-(\mathcal{G}_{tb}/\sigma_d)^2} \quad (2.98)$$

oder eine Bruchfunktion

$$\mathcal{D}_f = \frac{\mathcal{G}_{mf}}{1 + (\mathcal{G}_{mf}/\sigma_d)^2} + \frac{\mathcal{G}_{tf}}{1 + (\mathcal{G}_{tf}/\sigma_d)^2} - \frac{\mathcal{G}_{mb}}{1 + (\mathcal{G}_{mb}/\sigma_d)^2} - \frac{\mathcal{G}_{tb}}{1 + (\mathcal{G}_{tb}/\sigma_d)^2} \quad (2.99)$$

verwendet wird. Hier steuert der Parameter  $\sigma_d$  die Kantensensitivität des Datensatzes. In der Regel wird der Wert für  $\sigma_d$  experimentell bestimmt. Die Gl. (2.98) und (2.99) geben die jeweiligen Terme der Richtungsabhängigkeiten für den Glättungsprozess an.

Die alternierende Berechnung von Isophotenvervollständigung und Diffusion wird für den Rekonstruktionsvorgang des SBI-Algorithmus in einem Prozess mit  $i \in [1, I_{\max}]$  Iterationen durchgeführt. Als Abbruchkriterium kann eine maximale Iterationsanzahl  $I_{\max}$ , ein tolerierbarer Restfehler  $\varepsilon$  oder fehlender Vorschrift im Sinne einer Verbesserung durch Konvergenz der Intensitäten implementiert werden. Der gesamte iterative Algorithmus ist im Pseudo-Code 3 nochmal kompakt zusammengefasst. Für eine Vertiefung der vorgestellten Theorie ist an dieser Stelle auf die Literatur verwiesen [6].

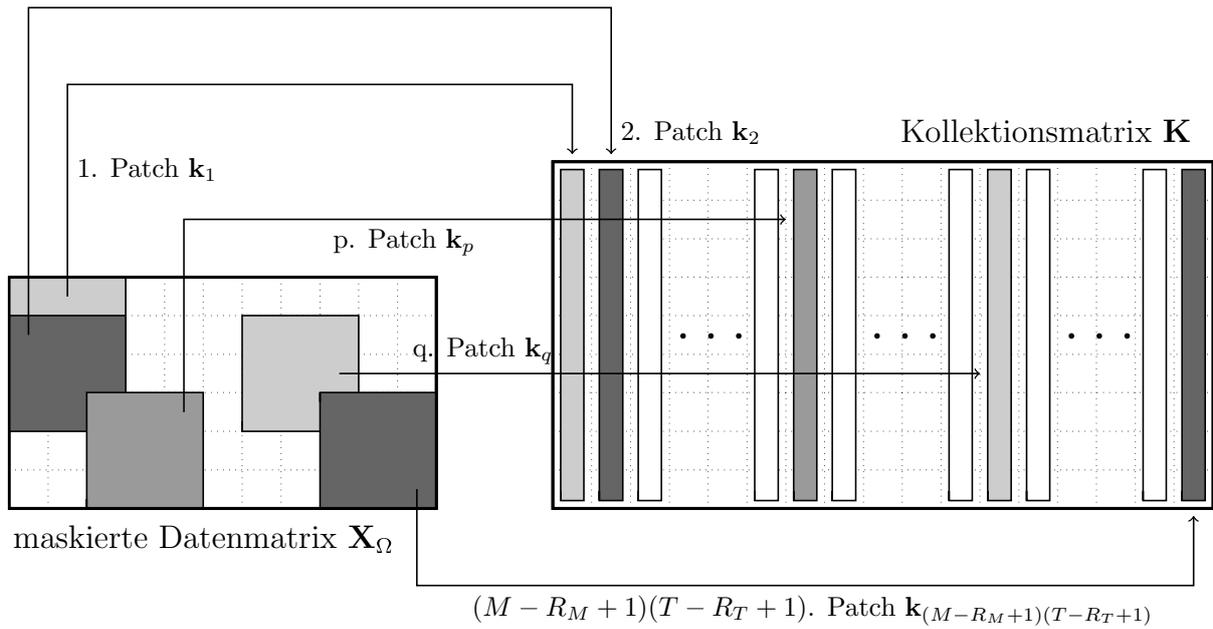
## 2.4.2 Repräsentantenbasierte Rekonstruktion

Eine weitere Kategorie der Inpainting-Verfahren basiert auf der Verarbeitung von sogenannten Repräsentanten und wird in diesem Abschnitt eingeführt. Der einheitliche Kernprozess dieser Verfahren besteht in der Ausnutzung von redundanter Information aus dem maskierten Datensatz  $\mathbf{X}_\Omega$ . Dies erfolgt durch die Extraktion  $\mathcal{E}(\cdot)$  von überlappenden  $R_T$  Windows,  $R_M \times R_T$  Patches bzw.  $R_M \times R_N \times R_T$  Cuboids im 1D, 2D bzw. 3D sowie dessen Adaption auf höhere Dimensionen.

Die Abb. 2.10 zeigt beispielhaft die Prozedur der Informationsentnahme, beginnend beim Eintrag  $X_{1,1}$ , aus einem zweidimensionalen Datensatz. Nach der Extraktion werden alle Repräsentanten  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^P$  in vektorisierter Form in der sogenannten Kollektionsmatrix  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{R \times N_R}$  angeordnet, wobei  $R = R_M R_T$  die Anzahl der Elemente in einem Patch und

$$N_R = \prod_{d=\{M,N,T,\dots\}} (d - R_d + 1) \quad (2.100)$$

die Gesamtzahl der extrahierten Repräsentanten, im zweidimensionalen Fall insgesamt  $(M - R_M + 1)(T - R_T + 1)$  Patches, kennzeichnet. Unter Berücksichtigung von Gl.



**Abbildung 2.10:** Exemplarische Extraktion  $\mathcal{E}(\cdot)$  von  $R_M \times R_T$  Patches aus dem maskierten Datensatz  $\mathbf{X}_\Omega \in \mathbb{R}^{M \times T}$  und die Generierung der Kollektionsmatrix  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{R \times N_R}$  durch das vektorisierte Anordnen der Patches.

(2.80) lässt sich die Extraktion  $\mathcal{E}(\cdot)$  des  $i$ -ten Repräsentanten in  $\mathbf{K}$  mathematisch wie folgt ausdrücken

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{E}_i \mathbf{S}'_\Omega = \mathbf{E}_i (\mathbf{M} \mathbf{D} \mathbf{X}' + \mathbf{n}), \quad (2.101)$$

wobei  $\mathbf{E}_i \in \{0, 1\}^{R \times D}$  die geeignete Extraktionsmatrix kennzeichnet und aus einer Anordnung ausgewählter Zeilen der Einheitsmatrix  $\mathbf{1}$  besteht. Des Weiteren sei an dieser Stelle die sogenannte Maskenkollektionsmatrix  $\mathbf{\Lambda} \in \{0, 1\}^{R \times N_R}$  durch die überlappende Extraktion von Repräsentanten  $\boldsymbol{\lambda}_i$  aus der Maske  $\Omega$  bzw.  $\mathbf{M}$  definiert. Mit dieser Vorgehensweise lässt sich auch das überlagerte Zurücksetzen  $\mathbf{C}_i \in \{0, 1\}^{N_R \times D}$  der sogenannten Teildarstellungen  $(\mathbf{K}^T)_i$  des Datensatzes, also die Zeilen  $(k_{i,1} \ k_{i,2} \ \dots \ k_{i,N_R})$  aus  $\mathbf{K}$ , zur Erstellung der resultierenden Approximation  $\mathbf{X}_{\text{rec}}$  definieren.

Die Weiterverarbeitung im Sinne einer Rekonstruktion ist individuell und abhängig vom Inpainting-Verfahren der Wahl. Im Zuge dessen werden nachfolgende verschiedene Methoden kurz vorgestellt, welche im Laufe der Arbeit verwendet werden und als Fundament für neue Ansätze dienen.

#### 2.4.2.1 Smooth Ordering of Patches

Zur Rekonstruktion der fehlenden Informationen wird ausgenutzt, dass die extrahierten Repräsentanten aus einem maskierten Datensatz  $\mathbf{X}_\Omega$  bzw. einem maskierten Spektrum  $\mathbf{S}_\Omega$  untereinander korrelieren. Aufgrund der starken Redundanz innerhalb der Kolle-

tionsmatrix  $\mathbf{K}$  durch die überlappenden Extraktion der Repräsentanten  $\mathbf{k}_i$  existieren unterschiedliche Lösungen für die Nulleinträge. Durch die Überlagerung von unabhängigen Teillösungen wird eine bestmögliche Approximation des ursprünglichen Datensatzes  $\mathbf{X}$  angestrebt.

Der sogenannte Smooth Ordering of Patches (SOP) Algorithmus aus [89] löst das Inpainting-Problem aus Gl. (2.81) mit Hilfe von zeilenweiser Interpolation der fehlenden Datenpunkte innerhalb der spaltenweise permutierten Kollektionsmatrix  $\mathbf{KP}$ . Dadurch entstehen glatte Verläufe der Teildarstellungen, also den Zeilen von  $\mathbf{K}$ , was nach dem Zurücksetzen der Repräsentanten an die ursprünglichen Positionen in  $\mathbf{X}$  zu einer Rekonstruktion  $\mathbf{X}_{\text{rec}}$  führt. Die individuelle Generierung einer Permutationsmatrix  $\mathbf{P} \in \{0, 1\}^{N_R \times N_R}$  basiert auf der Minimierung der TV und der Annahme, dass die Ähnlichkeit zwischen den permutierten Repräsentanten  $\mathbf{Kp}_i$  gleichbedeutend mit der Ähnlichkeit unmaskierter Ausschnitte aus  $\mathbf{X}'$  ist

$$\arg \min_{\mathbf{P} \in \{0,1\}^{N_R \times N_R}} \sum_{i=1}^{N_R-1} \frac{1}{R} \|\mathbf{Kp}_i - \mathbf{Kp}_{i+1}\|_2^2. \quad (2.102)$$

Die Optimierungsaufgabe aus Gl. (2.102) wird auch als Problem des Handlungsreisenden bzw. Travelling Salesman Problem (TSP) bezeichnet und fließt für die Rekonstruktion als Randbedingung  $\mathcal{R}(\mathbf{X}')$  in das Minimierungsproblem aus Gl. (2.81) ein. Das Erstellen der glatten Zeilen in der Kollektionsmatrix  $\mathbf{K}$  mit Hilfe der spaltenweisen Permutation der Repräsentanten ist entscheidend für die Rekonstruktionsgüte und gleichzeitig der Vorgang mit der höchsten Berechnungskomplexität.

Nach dem Finden einer geeigneten Permutation  $\mathbf{P}$  durch Gl. (2.102) erfolgt die Anwendung einer eindimensionalen Interpolation  $\mathcal{H}(\cdot)$  der Zeilen der permutierten Kollektionsmatrix  $\mathbf{KP}$  zur Approximation der fehlenden Einträge. In der Literatur wird dafür die Anwendung einer kubischen Spline-Interpolation empfohlen [89].

**Spline-Interpolation** Die Berechnung von sogenannten Splines (auch Polynomzug) erfordert verschiedene Randbedingungen. Diese dienen der Eliminierung der Freiheitsgrade im dazugehörigen linearen Gleichungssystem [65]. Die hohe Approximationsgüte durch recht glatte Interpolationsfunktionen in der Spline-Interpolation gehen mit einem sehr geringen Berechnungsaufwand zur Bestimmung der kubischen interpolierenden Splines einher.

Die vorgegebenen Stützstellen bzw. Funktionswerte sind die Nichtnulleinträge in der permutierten Kollektionsmatrix  $(\mathbf{KP})_{r,i}$  innerhalb der  $r$ -ten Zeile. Im Allgemeinen werden die kubischen Splines durch die explizite Berechnung von kubischen Polynomen  $\kappa_1(x), \dots, \kappa_{N_s-1}(x)$  bestimmt [25, 114]. Mit dem Ansetzen des  $i$ -ten kubischen Polynoms

$$\kappa_i(x) = c_{3,i}(x - x_i)^3 + c_{2,i}(x - x_i)^2 + c_{1,i}(x - x_i) + c_{0,i} \quad (2.103)$$

sind die  $4(N_s - 1)$  Koeffizienten  $c_{3,i}, c_{2,i}, c_{1,i}$  und  $c_{0,i}$  mit  $i = 1, \dots, N_s - 1$  zu bestimmen.

Die Berechnung der Koeffizienten gehen mit der Einhaltung der folgenden Interpolationsbedingungen und Stetigkeitsforderungen für die Gleichungen einher:

1.  $\kappa_i(x_i) = (\mathbf{KP})_{r,i}$  für  $i \in [1, N_s - 1]$
2.  $\kappa_i(x_{i+1}) = (\mathbf{KP})_{r,i+1}$  für  $i \in [1, N_s - 1]$
3.  $\frac{\partial}{\partial x} \kappa_i(x_{i+1}) = \frac{\partial}{\partial x} \kappa_{i+1}(x_{i+1})$  für  $i \in [1, N_s - 2]$
4.  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \kappa_i(x_{i+1}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \kappa_{i+1}(x_{i+1})$  für  $i \in [1, N_s - 2]$ .

Um die erforderliche Anzahl von  $4(N_s - 1)$  Gleichungen zu erhalten, werden oft zusätzliche Randbedingungen  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \kappa_1(x_1) = 0$  und  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \kappa_{N_s-1}(x_{N_s}) = 0$  festgelegt. Dies definiert die Berechnung eines natürlichen kubischen Splines. Es existieren noch andere Arten wie beispielsweise Clamped Splines und Not-A-Knot [25]. Zur weiterführenden Vertiefung der Splineinterpolation sowie die Aufstellung des linearen Gleichungssystems für die Koeffizienten sei an dieser Stelle auf die angegebene Literatur verwiesen.

Ist das lineare Gleichungssystem vollständig aufgestellt, kann dies mit sehr wenig Berechnungsaufwand mit Hilfe einer LR-Zerlegung numerisch gelöst werden [48, 11]. Der Rechenaufwand zur numerischen Lösung dieses Gleichungssystems ist sehr gering, da die Systemmatrix symmetrisch, tridiagonal und positiv definit ist [48]. Aufgrund dieser Konditionierung bietet sich zur Lösung die sogenannte Cholesky-Zerlegung an.

**Rekonstruktion** Die stückweise Definition sorgt für die Vermeidung ein starkes Schwingungsverhalten zwischen zwei Stützstellen im Vergleich zu einer höhergradigen Polynominterpolation. Die Anwendung eines Glättungsoperators  $\mathcal{H}(\cdot)$  durch die Spline-Interpolation schließt die Approximation ab. Nachfolgend müssen die rekonstruierten Repräsentanten invers permutiert und zurück an ihre ursprünglichen Positionen im Datensatz platziert werden:

$$\mathbf{K}_{\text{rec}} = \frac{1}{N_P} \sum_{i=1}^{N_P} \mathcal{H}(\mathbf{KP}_i) \mathbf{P}_i^{-1}. \quad (2.104)$$

Im Sinne einer genaueren Rekonstruktion können mehrere Permutation, verdeutlicht durch die Summe in Gl. (2.104) und in Anlehnung an das Cycle-Spinning Verfahren [28], durchgeführt werden. Die Mittelwertbildung reduziert den Einfluss einer unvorteilhaften Sortierung der Repräsentanten. Für jede Permutation erfolgt die zufällige Wahl des initialen Repräsentanten zur Lösung des Minimierungsproblems aus Gl. (2.102), um eine hohe Ergebnisvielfalt zu erzeugen.

Um die Lösung  $\mathbf{X}_{\text{rec}}$  zu erhalten, wird anschließend das Zurücksetzen der rekonstruierten Teildarstellungen, also die Zeilen  $(\mathbf{K}^T)_i = (k_{i,1} \ k_{i,2} \ \dots \ k_{i,N_R})$  aus  $\mathbf{K}_{\text{rec}}$ , durch eine gewichtete arithmetische Mittelwertbildung

$$\mathbf{X}'_{\text{rec}} = \mathcal{E}^{-1}(\mathbf{K}_{\text{rec}}) = \mathbf{W}^{-1} \sum_{i=1}^R (k_{i,1} \ k_{i,2} \ \dots \ k_{i,N_R}) \mathbf{C}_i \quad (2.105)$$

**Algorithmus 4** SOP nach [89]**Eingang:**  $\mathbf{X}_\Omega \in \mathbb{R}^{M \times T}$ ,  $\Omega \in \{0, 1\}^{M \times T}$ **Ausgang:**  $\mathbf{A}_{\text{rec}} \in \mathbb{R}^{M \times T}$ 

- 
- 1:  $\mathbf{K} \leftarrow \mathcal{E}(\mathbf{X}_\Omega)$  ▷ Extraktion der Repräsentanten
  - 2: **for**  $i = 1 \dots I_{\text{max}}$  **do**
  - 3:     **for**  $j = 1 \dots N_P$  **do**
  - 4:          $\mathbf{K}\mathbf{P}_j \leftarrow \mathcal{P}(\mathbf{K})$  ▷ Permutation
  - 5:          $\mathbf{K}_{\text{rec},j} \leftarrow \mathcal{H}(\mathbf{K}\mathbf{P}_j)\mathbf{P}_j^{-1}$  ▷ Approximation durch Glättung
  - 6:     **end for**
  - 7:      $\mathbf{K} \leftarrow \frac{1}{N_P} \sum_{k=1}^{N_P} \mathbf{K}_{\text{rec},k}$  ▷ Mittelung über Permutationen
  - 8: **end for**
  - 9:  $\mathbf{X}'_{\text{rec}} \leftarrow \mathcal{E}^{-1}(\mathbf{K})$  ▷ Ausgabe des Approximation
- 

bestimmt, wobei die Matrix  $\mathbf{C}_i$  zum überlappenden Überlagern – inverse Extraktion – der Teildarstellung verwendet wird. Aufgrund der Überlappung sind für das Resultat der Mittelwertbildung individuelle Gewichte zu berücksichtigen. Die Gewichtsmatrix  $\mathbf{W} \in \mathbb{N}^{D \times D}$

$$\mathbf{W} = \sum_{i=1}^{N_R} \mathbf{E}_i^T \mathbf{E}_i = \sum_{i=1}^D \mathbf{C}_i^T \mathbf{C}_i \quad (2.106)$$

weist ausschließlich Werte entlang der Hauptdiagonalen  $w_{i,i}$  auf, sodass die Inverse  $\mathbf{W}^{-1}$  lediglich die Kehrwerte der Hauptdiagonalen besitzt.

Zur Erhöhung der Güte der Lösung  $\mathbf{X}_{\text{rec}}$  im Sinne einer Approximation mit höherer Güte kann der beschriebene Prozess mit dem Rekonstruktionsergebnis als neue Berechnungsgrundlage, mehrfach wiederholt werden. Für jede Iteration können Parameter, wie die Anzahl der Permutationen  $N_P$  oder die Dimension für die überlappende Extraktion der Repräsentanten, individuell gewählt werden. Der vollständige Algorithmus ist nochmal kompakt im Pseudocode 4 dargestellt. Der Kern des SOP-Verfahrens dient in der vorliegenden Arbeit nachfolgend als Fundament für neuartige Ansätze.

**Dimension und Vielfalt der Repräsentanten** In Abhängigkeit der dimensionalen Ausdehnung der Repräsentanten innerhalb der überlappenden Extraktion ändert sich die Dimension der Kollektionsmatrix  $R \times N_R$ . Eine große Anzahl  $N_R \gg R$  von extrahierten Repräsentanten in  $\mathbf{K}$  geht mit einer hohen Vielfalt einher. Mit der Vielfalt in der Kollektionsmatrix wird die große Ähnlichkeit und Anzahl von Repräsentanten bezeichnet, die, nach der Permutation, in eine gleichmäßige Verteilung von Stützstellen für eine vorteilhafte Interpolation resultieren. Außerdem hängt die Qualität des SOP-Ergebnisses maßgebend von der Anzahl der Teildarstellungen  $R$ , aufgrund der gewichteten Mittelwertbildung, ab. Entsprechend muss ein Trade-Off zwischen der Vielfalt der Repräsentanten und Anzahl der Teildarstellungen gewählt werden.

### 2.4.2.2 Block Matching und Filterung

Die iterative Anwendung der Kombination aus sogenanntem Block-Matching und mehrdimensionaler Filterung wird in diesem Abschnitt zur Rekonstruktion von maskierten Datensätzen  $\mathbf{X}_\Omega$  eingeführt. Bekannte Ansätze zu diesem Thema aus der Literatur sind das Block-Matching 3D (BM3D) [120] und Block-Matching 4D (BM4D) [75] zur Verarbeitung mehrdimensionaler Datensätze. Die Vorgehensweise beim Block-Matching lässt sich grundlegend in drei Schritte kategorisieren: Gruppierung der extrahierten Repräsentanten, Filterung durch Thresholding sowie Rekonstruktion.

**Gruppierung der extrahierten Repräsentanten** Analog zur Vorgehensweise des SOP-Algorithmus erfolgt im ersten Schritt die überlappende Extraktion von Repräsentanten  $\mathbf{k}$  aus dem Datensatz  $\mathbf{X}$  mit Hilfe von  $R_M \times R_T$  Patches [31]. Basierend auf der Korrelation bzw. euklidischen Distanz zwischen den extrahierten Repräsentanten werden diese in mehrdimensionale Gruppen  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{R_M \times R_T \times N_B}$  der gleichen Größe  $N_B$  angeordnet. Je nach Implementierung des Block-Matching-Ansatzes kann ein Repräsentant mehreren oder mindestens einer Gruppe zugeordnet sein. Die Menge  $G_b \in \mathbb{N}^{N_B}$  kennzeichnet die Indizes der dazugehörigen Repräsentanten  $\mathbf{k}$  in der  $b$ -ten Gruppe. Der Zusammenschluss aller Gruppen ist über die Menge  $G = \{G_b : b = 1, \dots, N_G\}$  definiert.

**Filterung durch Thresholding** Im nächsten Schritt werden die Gruppen einer sogenannten 3D-Decorrelation durch eine Transformation, wie beispielsweise die FFT, DCT, DWT, o.ä., unterzogen. In Zuge dessen erfolgt die Anwendung einer 2D-Intrablock- $\mathbf{D}_R \in \mathbb{R}^{R_M \times R_T}$  und 1D-Interblock-Transformation  $\mathbf{D}_B \in \mathbb{R}^{N_B \times N_B}$  auf die Gruppen [31]. Typischerweise wird ersteres aus einer Kombination von zwei einzelnen 1D-Transformationen  $\mathbf{D}_R \mathbf{G}_j \mathbf{D}_R^T$  realisiert, wobei  $\mathbf{G}_j \in \mathbb{R}^{R_M \times R_T}$  dem jeweiligen Repräsentanten in Patchform entspricht. In vektorisierter Darstellung lässt sich die Intrablock-Transformation mit Hilfe des Kroneckerproduktes  $\otimes$  zweier Matrizen

$$\mathbf{Z}'_j = (\mathbf{D}_R \otimes \mathbf{D}_R) \text{vec}(\mathbf{G}_j) \quad (2.107)$$

darstellen. Um das 3D-Spektrum der  $b$ -ten Gruppen zu erhalten, erfolgt eine Interblock-Transformation bezüglich der Zeilen der Zusammensetzung der einzelnen 2D-Intrablock-Spektren  $[\mathbf{Z}'_{j_b,1}, \dots, \mathbf{Z}'_{j_b,N_B}]$  des Blocks. Daraus resultieren die Spektralkoeffizienten der  $b$ -ten 3D-Gruppe  $\mathbf{G}$  in vektorisierter Form

$$\mathbf{S}'_b = \sum_{j \in G_b} \mathbf{d}_{B,j} \otimes ((\mathbf{D}_R \otimes \mathbf{D}_R) \text{vec}(\mathbf{G}_j)) \quad (2.108)$$

$$= \left( \sum_{j \in G_b} \mathbf{d}_{B,j} \otimes ((\mathbf{D}_R \otimes \mathbf{D}_R) \mathbf{E}_j) \right) \mathbf{X}', \quad (2.109)$$

wobei  $\mathbf{d}_{B,j}$  die  $j$ -te Spalte der Matrix  $\mathbf{D}_B$  kennzeichnet. Liegt eine starke Korrelation zwischen den Repräsentanten innerhalb einer Gruppe vor, so besitzt das 3D-Spektrum

einen dominanten niederfrequenten Anteil. Das anschließende kollaborative Filter wird durch ein Hard-Thresholding

$$\mathcal{T}(S'_b) = \begin{cases} S'_{b,i} & \text{für } |S'_{b,i}| \geq \lambda_B \\ 0 & \text{für } |S'_{b,i}| < \lambda_B \end{cases} \quad (2.110)$$

bezüglich der Spektralkoeffizienten  $S'_{b,i}$  realisiert und führt durch die Glättungseigenschaft zu einem Denoising. Die Schwelle  $\lambda_B$  setzt sich u.a. aus dem additiven Rauschen zusammen.

**Rekonstruktion** Nach der Anwendung des kollaborativen Filters erfolgt die Synthese zur Wiederherstellung des Datensatzes. Dazu werden die inversen Transformationen auf die Gruppen der 3D-Spektren angewandt. Die Approximation des  $b$ -ten Blocks ist definiert durch

$$\mathbf{X}'_b = \sum_{j \in G_b} \mathbf{d}_{B,j}^T \otimes (\mathbf{E}_j^T (\mathbf{D}_R \otimes \mathbf{D}_R)^T) \mathbf{S}'_b. \quad (2.111)$$

Im Anschluss werden die Teilnehmer der Gruppen durch gewichtetes, arithmetisches Mitteln in den Datensatz zurückgesetzt. Diese Gewichtung

$$\mathbf{W} = \sum_b q_b \sum_{j \in G_b} \mathbf{E}_j^T \mathbf{E}_j \quad (2.112)$$

setzt sich aus der Überlappung  $\mathbf{E}_j^T \mathbf{E}_j$  sowie der Mehrfachverwendung  $q_b$  einzelner Repräsentanten in unterschiedlichen Gruppen zusammen.

Das Block-Matching zur Rekonstruktion von Inpainting-Problemen wird im Verlauf der Arbeit als Vergleichsverfahren im Bereich der Bild- sowie Videoverarbeitung eingesetzt.

### 2.4.2.3 K-SVD Inpainting

In [76] erfolgt die Einführung eines Inpaintingansatzes basierend auf angelernten sparsen Repräsentationen zur Lösung von Denoising-, Inpainting- oder Demosaicking-Problemen. Die Erstellung der sparsen Darstellung wird mit Hilfe des sogenannten  $K$ -Means Clustering Singular Value Decomposition ( $K$ -SVD)-Algorithmus durchgeführt. Dieser Algorithmus setzt sich aus einem Clusterverfahren, dem sogenannten  $k$ -Means-Algorithmus, sowie einer SVD zur Matrixzerlegung zusammen.

**$k$ -Means-Clustering** Der  $k$ -Means ist ein sogenanntes Clusterverfahren, welches mit einer festen Anzahl von  $k$  Gruppen/Clustern eine Partitionierung eines Datensatzes

$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{M \times T}$  vornimmt. Im Zuge dessen sind die jeweiligen Cluster  $\mathbf{G}_i$  über ihre Zentroide oder Mittelwerte  $\boldsymbol{\mu}_i \in \mathbb{R}^k$  definiert:

$$\boldsymbol{\mu}_i = \frac{1}{|\mathbf{G}_i|} \sum_{g \in \mathbf{G}_i} g. \quad (2.113)$$

Dementsprechend muss ein Optimierungsproblem zur Bestimmung von  $k$  optimalen Zentroiden gelöst werden. Formal hat die Gesamtkostenfunktion des Clusterings folgende Gestalt:

$$\min \sum_{i=1}^k \sum_j \|\mathbf{x}_j - \boldsymbol{\mu}_i\|_2^2. \quad (2.114)$$

In dieser Arbeit wird der  $k$ -Means-Algorithmus für das Clustering von Vektoren eingesetzt. Daraus ergibt sich die nachfolgende iterative Vorgehensweise nach [70] zur Berechnung der Teilnehmer der Gruppen  $\mathbf{G}_i$  sowie den dazugehörigen Zentroiden:

1. Wähle zufällige, initiale Zentroide aus  $\mathbf{X}$
2. Setze  $\mathbf{x}_j \in \mathbf{G}_i$  mit  $i := \arg \min_{1 \leq i \leq k} \|\mathbf{x}_j - \boldsymbol{\mu}_i\|_2^2$  für alle  $\mathbf{x}_j$
3. Setze  $\boldsymbol{\mu}_i := \frac{1}{|\mathbf{G}_i|} \sum_{g \in \mathbf{G}_i} g$  für alle  $1 \leq i \leq k$

**Singulärwertzerlegung** Das Ziel der SVD ist die Dekomposition einer Matrix  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{M \times T}$  als Produkt drei spezieller Matrizen der Gestalt

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^T. \quad (2.115)$$

Die Singulärwerte  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \sigma_r$  sind die positiven Hauptdiagonaleinträge der Matrix  $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{M \times T}$ , welche bis zum existierenden Rang  $r$  der ursprünglichen Matrix  $\mathbf{X}$  vorliegen. Die Matrizen  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{M \times M}$  und  $\mathbf{V}^T$  sind unitäre Matrizen bzw. die Adjungierte der unitären Matrix  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{T \times T}$ . Die Spalten  $\mathbf{u}_i$  von  $\mathbf{U}$  werden als die Links-Singulärvektoren und die Spalten  $\mathbf{v}_i$  von  $\mathbf{V}$  als Rechts-Singulärvektoren der Matrix  $\mathbf{X}$  bezeichnet. Des Weiteren gilt die Eigenschaft

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} = (\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^T)^T (\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^T) \quad (2.116)$$

$$= (\mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^T \mathbf{U}^T) (\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^T) \quad (2.117)$$

$$= \mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{V}^T \quad (2.118)$$

$$= \mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^2 \mathbf{V}^T. \quad (2.119)$$

Daraus resultiert, dass die Singulärwerte aus  $\mathbf{X}$  gleich den Quadratwurzeln aus den positiven Eigenwerten von  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  (Gl. (2.119)) sind.

Das  $K$ -Means-Clustering und die SVD bilden die Grundlage für den sogenannten  $K$ -SVD-Algorithmus, welcher zum Anlernen eines sogenannten Dictionarys bzw. einer Transformationsbasis verwendet werden kann. Diese Technik bietet Vorteile für die Bildverarbeitung. Mit dem  $K$ -SVD können – basierend auf der Redundanz – Bilddaten in einer angepassten Basismatrix repräsentiert werden, um nachfolgend das Inpainting oder Denoising durchzuführen.

**K-SVD-Rekonstruktion** Im ersten Teil erfolgt die Extraktion aller  $R_M \times R_T$  überlappenden Repräsentanten  $\mathbf{k}_i \in \mathbb{R}^{R_M R_T}$  aus dem maskierten Datensatz  $\mathbf{X}_\Omega = \mathbf{\Omega} \mathbf{X}$ , analog zur Beschreibung der Abb. 2.10, wobei  $\mathbf{\Omega} \in \{0, 1\}^{M \times T}$  und  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{M \times T}$  mit  $D = MT$  gilt. Das Ziel ist es nach der Extraktion ein angepasstes Dictionary  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{R \times D}$  zu finden, um eine sparse Darstellung  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^D$  der Repräsentanten auszunutzen. Diese Approximationen der Repräsentanten werden anschließend einer arithmetischen Mittelwertbildung unterzogen, was letztendlich zum Rekonstruktionsergebnis führt. Das korrespondierende Minimierungsproblem lautet

$$\arg \min_{\mathbf{D}, \mathbf{X}', \boldsymbol{\alpha}_i} \lambda_K \|\mathbf{X}' - \mathbf{X}'_\Omega\|_2^2 + \sum_i \mu_i \text{nz}(\boldsymbol{\alpha}_i) + \sum_i \|\mathbf{D} \boldsymbol{\alpha}_i - \mathbf{E}_i \mathbf{X}'\|_2^2, \quad (2.120)$$

wobei  $i$  die Position des extrahierten Repräsentanten kennzeichnet. Genau wie beim SOP-Algorithmus wird die Extraktion über ein binäre Matrix  $\mathbf{E}_i \in \{0, 1\}^{R \times D}$  beschrieben. Als Resultat der Optimierungsvorschrift aus Gl. (2.120) ergibt sich das angelehrte Dictionary  $\mathbf{D}$ , eine Schätzung des ursprünglichen Datensatzes  $\mathbf{X}$  sowie die dazugehörige sparse Darstellung  $\boldsymbol{\alpha}$ .

Die Hauptprozedur des  $K$ -SVD-Algorithmus zur iterativen Rekonstruktion von maskierten Daten basiert auf drei Berechnungsabschnitten [76]. Im ersten Schritt erfolgt das sparse Coding mit Hilfe des OMP. Dem OMP-Algorithmus liegt das Optimierungsproblem

$$\arg \min_{\boldsymbol{\alpha}} \text{nz}(\boldsymbol{\alpha}) \quad \text{s.t.} \quad \|\mathbf{E}_i \mathbf{X}' - \mathbf{D} \boldsymbol{\alpha}\|_2^2 \leq \varepsilon \quad (2.121)$$

zugrunde. Im Abschnitt 2.3.2.1 wurde bereits eine Technik zur Bestimmung der sparsen Darstellung eingeführt. Der zweite Schritt besteht aus dem Update des Dictionarys. Dafür sind Rang-1 Approximationen zur gleichzeitigen Aktualisierung des Dictionarys  $\mathbf{D}$  und der sparsen Darstellung  $\boldsymbol{\alpha}$  zu lösen. Das Update einer Spalte  $\mathbf{d}$  erfolgt über das Minimierungsproblem

$$\arg \min_{\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{d}} \|\mathbf{R} - \mathbf{d} \boldsymbol{\alpha}^T\|_F^2, \quad (2.122)$$

wobei sich die Spalten des Residuums  $\mathbf{R}$  aus den jeweiligen Vektoren  $\mathbf{E}_i \mathbf{X}' - (\mathbf{D} \boldsymbol{\alpha}_i - \mathbf{d} \boldsymbol{\alpha}_i)$ , unter Ausschluss der betrachteten Spalte  $\mathbf{d}$ , für das Update zusammensetzen. Diese Vorgehensweise wird als Rang-1 Approximation bezeichnet und über die abgeschnittene

SVD von  $\mathbf{R}$  berechnet. Im letzten Schritt erfolgt die Durchführung einer arithmetischen Mittelwertbildung

$$\mathbf{X}'_{\text{rec}} = (\lambda \mathbf{1} + \sum_i \mathbf{E}_i^T \mathbf{E}_i)^{-1} (\lambda \mathbf{X}'_{\Omega} + \sum_i \mathbf{E}_i^T \mathbf{D} \alpha_i), \quad (2.123)$$

welche – ähnlich zum SOP – durch das Produkt der Extraktionsmatrizen  $\mathbf{E}_i^T \mathbf{E}_i$  gewichtet wird.

Für diese Art der Rekonstruktion werden die Nullen in der Maske  $\Omega$  als Fehlstellen mit unendlich hoher Rauschenergie interpretiert, wodurch sich ein inhomogenes Denoising-Problem formulieren lässt. Innerhalb dieser Arbeit dient das Inpainting, basierend auf angelernten sparsen Repräsentationen, als Vergleichsverfahren sowie als Fundament für neue Ansätze.

#### 2.4.2.4 Wavelet-Thresholding

In diesem Abschnitt erfolgt die Einführung des Redundant Tree-based Wavelet Transform (RTBWT)-Algorithmus [88], dessen Einsatzgebiet die Lösung von Problemstellung aus dem Bereich Inpainting und Denoising ist. Die Tree-based Wavelet-Transformation besteht aus der Permutation des Approximationsanteiles einer Stationary Wavelet Transform (SWT) in den jeweiligen Zerlegungsstufen. Daraus resultiert eine hochgradig sparse Darstellung der Koeffizienten. Die anschließende Verarbeitung der restlichen dominanten Koeffizienten ist abhängig von der Problemstellung. Im Verlauf der Arbeit dient das Verfahren – welches nachfolgend im Detail vorgestellt wird – als Grundlage für neuartige Ansätze zur mehrdimensionalen Rekonstruktion von maskierten Daten.

Der Ausgangspunkt der Beschreibung des RTBWT-Algorithmus bildet die maskierte und korrumpierte Version des Inpainting-Problems  $\mathbf{S}'_{\Omega} = \mathbf{M} \mathbf{D} \mathbf{X}' + \mathbf{n}$  aus Gl. (2.80). Die Lösung des Problems erfolgt durch die Optimierung der Funktion  $\mathcal{R}(\cdot)$  aus Gl. (2.81), welche aus der Analyse  $\mathbf{D}_A$  und Synthese  $\mathbf{D}_S$  der Transformation zur Sparsity-Regularisierung besteht. Aufgrund der Verkopplung der Zielfunktionen, bestehend aus  $\|\mathbf{M} \mathbf{D} \mathbf{X}' - \mathbf{S}'_{\Omega}\|_2^2$  und  $\mathcal{R}(\mathbf{X}') = \|\mathbf{D}_A \mathbf{X}'\|_p$  mit  $p \in \{0, 1\}$ , ist die Rekonstruktion von  $\mathbf{X}'$  sehr komplex. Durch das Einführen der Hilfsvariable  $\mathbf{Z}' = \mathbf{D}_A \mathbf{X}'$ , mit  $\mathbf{D}_A \mathbf{D}_S = \mathbf{1}$  als zusätzliche Nebenbedingung, lassen sich die einzelnen Zielfunktionen entkoppeln. Anschließend kann durch alternierendes Lösen der Teilprobleme die Rekonstruktion deutlich effizienter durchgeführt werden. Die Erweiterung der Zielfunktion um die Nebenbedingung als Strafterm führt zur unbeschränkten Formulierung des ursprünglichen Optimierungsproblems:

$$\min_{\mathbf{X}', \mathbf{C}'} \|\mathbf{M} \mathbf{D} \mathbf{X}' - \mathbf{S}'_{\Omega}\|_2^2 + \lambda_I \text{nz}(\mathbf{Z}') + \lambda_X \|\mathbf{X}' - \mathbf{D}_S \mathbf{Z}'\|_2^2 + \lambda_Z \|\mathbf{Z}' - \mathbf{D}_A \mathbf{X}'\|_2^2. \quad (2.124)$$

Das entkoppelte Problem aus Gl. (2.124) kann dann durch die Anwendung der ADMM [9] gelöst werden. Die Minimierung erfolgt durch ein alternierendes Konstanthalten der Variablen  $\mathbf{X}'$  für die Invertierung und  $\mathbf{Z}'$  für das Denoising:

$$\tilde{\mathbf{X}}' = \arg \min_{\mathbf{X}'} \|\mathbf{MDX}' - \mathbf{S}'_{\Omega}\|_2^2 + \lambda_X \|\mathbf{X}' - \mathbf{D}_S \mathbf{Z}'\|_2^2 \quad (2.125)$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}' = \arg \min_{\mathbf{Z}'} \frac{\lambda_I}{\lambda_Z} \text{nz}(\mathbf{Z}') + \|\mathbf{Z}' - \mathbf{D}_A \mathbf{X}'\|_2^2. \quad (2.126)$$

Dadurch können die Zielfunktionen mit relativ einfachen Verfahren iterativ optimiert werden. Die Lösung des Invertierungsschrittes erfolgt über eine Tikhonov-Regularisierung

$$\tilde{\mathbf{X}}' = \left( (\mathbf{MD})^T \mathbf{MD} + \lambda_X \mathbf{1} \right)^{-1} \left( (\mathbf{MD})^T \mathbf{S}'_{\Omega} + \lambda_X \mathbf{D}_S \mathbf{Z}' \right) \quad (2.127)$$

und das Denoising wird durch die Anwendung eines Thresholding-Operators  $\mathcal{T}(\cdot)$  erreicht

$$\tilde{\mathbf{Z}}' = \mathcal{T}(\mathbf{D}_A \mathbf{X}'). \quad (2.128)$$

In Abhängigkeit der Art der Sparsity-Nebenbedingung  $\|\cdot\|_p^p$  ist die Schwellwertentscheidung entweder soft ( $p = 1$ )

$$\tilde{Z}'_i = \text{sgn}(\mathbf{1}_i \circ \mathbf{D}_A \mathbf{X}') \cdot \max(|\mathbf{1}_i \circ \mathbf{D}_A \mathbf{X}'| - \lambda_I/2, 0) \quad (2.129)$$

oder hard ( $p = 0$ )

$$\tilde{Z}'_i = \mathbf{1}_i \circ \mathbf{D}_A \mathbf{X}' \cdot \mathcal{HS}(|\mathbf{1}_i \circ \mathbf{D}_A \mathbf{X}'| - \sqrt{\lambda_I}) \quad (2.130)$$

anzusetzen, wobei  $\mathcal{HS}(\cdot)$  die Heaviside-Funktion darstellt [11, 31].

Eine effiziente (sparse) Repräsentation  $\mathbf{Z}'$  des Datensatzes  $\mathbf{X}'$  durch  $\mathbf{D}_A$  wird mit Hilfe der in [88] eingeführten RTBWT erzeugt. Diese modifizierte Wavelet-Transformation erfolgt jeweils auf die Zeilen der Kollektionsmatrix  $\mathbf{K}$  nach der Extraktion  $\mathcal{E}(\cdot)$  aller überlappenden Repräsentanten aus dem originalen Datensatz  $\mathbf{X}$ . Als Fundament der Transformation dient die Skalierung  $\phi$  und Wavelet-Zerlegung  $\psi$  der Daten durch die Anwendung der zyklischen Faltung mit dem jeweiligen Hochpass-  $\mathbf{h}$  und Tiefpassfilter  $\mathbf{g}$ . Die Theorie zu dieser Vorgehensweise wurde bereits im Abschnitt 2.2.2 eingeführt. Anhand der Gl. (2.16) und (2.17) sowie der Abb. 2.1 wird die Dekomposition des Vektors  $\mathbf{x}$  in die Wavelet-Koeffizienten verdeutlicht. Nach der Filterung unterliegen die Koeffizienten einer Unterabtastung um den Faktor zwei bezogen auf die geraden  $\downarrow 2^e$  und ungeraden Indizes  $\downarrow 2^o$ . Diese Vorgehensweise resultiert in den jeweiligen Wavelet-Approximations-  $\mathbf{a}^l$  und Detailkoeffizienten  $\mathbf{d}^l$  der Stufe  $l$ .

**Redundante Wavelet-Transformation** Aufgrund des Downsamplings innerhalb der Wavelet-Dekompositionsstufen führt ein minimal verschobener Eingangsvektor zu starken Abweichungen in den Koeffizienten. Diese Eigenschaft der DWT wird als Ver-

schiebungsvarianz bezeichnet. Zur Vermeidung dieser kann eine modifizierte Wavelet-Transformation, die sogenannte SWT, eingesetzt werden. In der SWT erfolgt innerhalb jeder Stufe der Dekomposition die Implementierung beider Fälle des Downsamplings [112]. Damit ist eine Einteilung der approximierten Wavelet-Koeffizienten in unabhängige Mengen für gerade ( $\downarrow 2_e$ ) und ungerade Indizes ( $\downarrow 2_o$ ) gemeint. Die Anzahl der Wavelet-Koeffizienten bleibt in jeder Stufe  $l$  der Transformation konstant. Die Anpassung des Downsamplings der Approximationskoeffizienten führt zu einer  $L$ -fachen Redundanz gegenüber dem Vektor  $\mathbf{X}'$ , wodurch hier die Sprache von einer stationären bzw. redundanten Wavelet-Transformation ist. Nach der Anpassung des Downsamplings kann aus (2.16) und (2.17) die Dekompositionsvorschrift der SWT

$$\mathbf{a}^l = \mathbf{a}^{l-1} * \mathbf{g}_{d,l} = \mathbf{G}_{d,l}^l \mathbf{a}^{l-1} \quad (2.131)$$

$$\mathbf{d}^l = \mathbf{a}^{l-1} * \mathbf{h}_{d,l} = \mathbf{H}_{d,l}^l \mathbf{a}^{l-1} \quad (2.132)$$

abgeleitet werden. Wobei die Faltungsmatrizen die gestreckte Version der Filterkoeffizienten  $\mathbf{g}_{d,l}$  und  $\mathbf{h}_{d,l}$  besitzen. Die gleiche Modifikation gilt ebenfalls für die Rekonstruktion. Hier wird aus Gl. (2.19) das Upsampling entfernt:

$$\mathbf{a}^{l-1} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{a}^l * \mathbf{g}_{r,l} + \mathbf{d}^l * \mathbf{h}_{r,l} \right) \quad (2.133)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \mathbf{G}_{r,l}^l \mathbf{a}^l + \mathbf{H}_{r,l}^l \mathbf{d}^l \right). \quad (2.134)$$

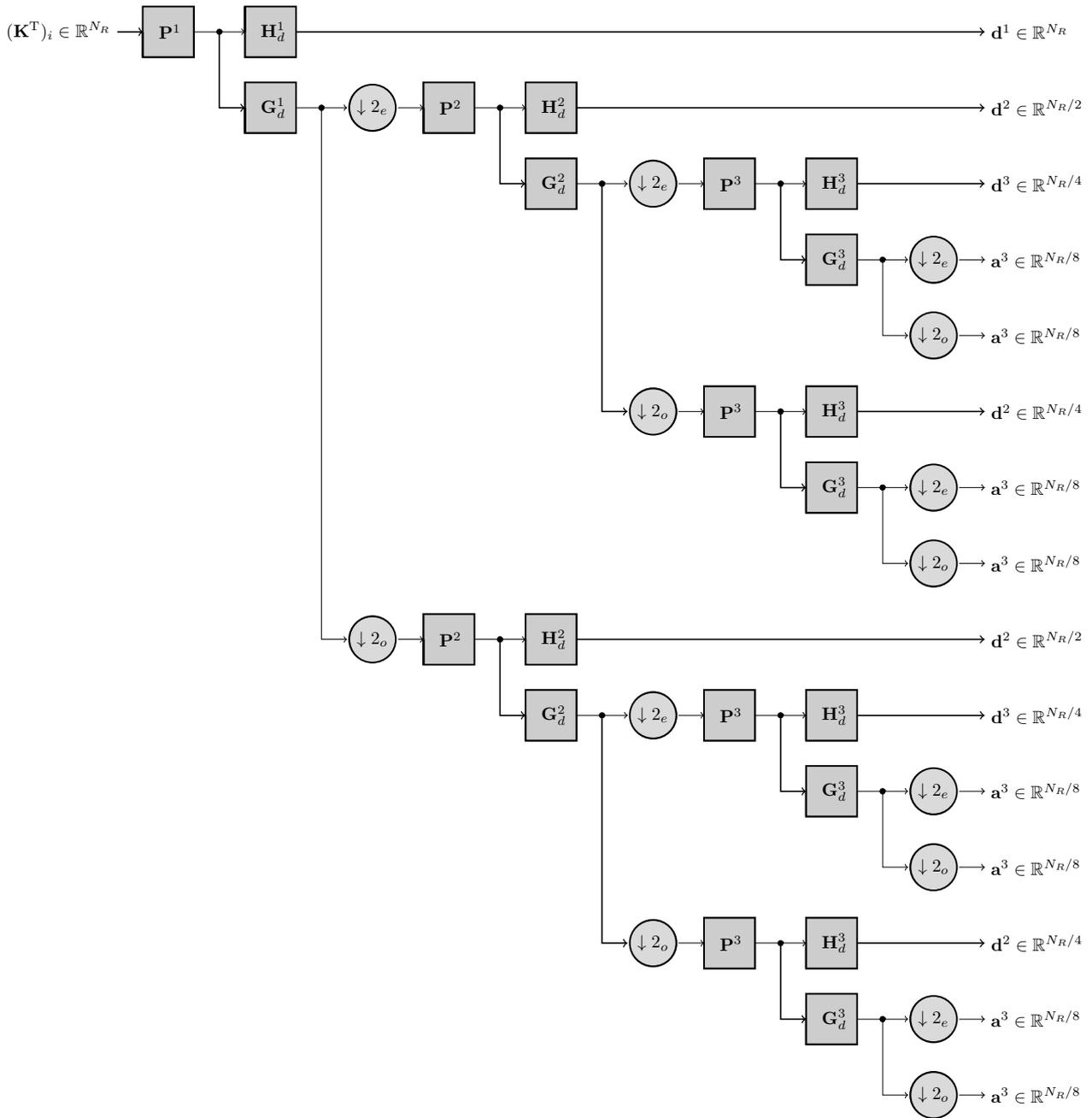
**Permutation** Die Implementierung einer Permutation  $\mathbf{P} \in \{0, 1\}^{N_R \times N_R}$  dieser Approximationskoeffizienten  $\mathcal{P}(\mathbf{a}^l)$  stellt den Unterschied zwischen der nachfolgend verwendeten Sparse Redundant Wavelet Transform (SRWT) und der klassischen redundanten Wavelet-Transformation dar [88]. Das Permutieren erzeugt eine reguläre Darstellung hinsichtlich der extrahierten Repräsentanten. Mit den unterschiedlichen Stufen  $l$  der SRWT und damit verbundenen redundanten Abbildung können die Wavelet-Koeffizienten durch rekursive Berechnung

$$\mathbf{a}^l = \mathbf{G}_d^l \mathbf{P}^l \mathbf{a}^{l-1} \quad (2.135)$$

$$\mathbf{d}^l = \mathbf{H}_d^l \mathbf{P}^l \mathbf{a}^{l-1} \quad (2.136)$$

pro Teildarstellung, also die Zeilen der Kollektionsmatrix  $(\mathbf{K}^T)_i$ , immer weiter in näherungsweise sparse Signale zerlegt werden [77]. Des Weiteren wird dadurch die erwähnte Eigenschaft der Verschiebungsvarianz vermieden [90].

Analog zum SOP aus Abschnitt 2.4.2.1 liegt die Permutationsvorschrift der Wavelet-Approximationskoeffizienten ebenfalls dem TSP zugrunde. Als Maß der Ähnlichkeit dient die Minimierung der TV wie in Gl. (2.102) aufgezeigt. Wie bereits erwähnt, wird die Wavelet-Zerlegung auf die Zeilen  $(\mathbf{K}^T)_i$  der jeweiligen Kollektionsmatrizen  $\mathbf{K}$  angewandt. Da die Bestimmung der Wavelet-Stützstellen mit einer Unterabtastung der geraden ( $\downarrow 2_e$ ) und ungeraden Indizes ( $\downarrow 2_o$ ) einhergeht, erfolgt lediglich die Um-



**Abbildung 2.11:** Schematische Blockdarstellung der Wavelet-Transformation der Stufe  $L = 3$  mit permutierten Koeffizienten. Als Eingangsvektor  $(\mathbf{K}^T)_i$  dienen in diesem Fall die Zeilen der Kollektionsmatrix  $\mathbf{K}$  nach der Repräsentantenextraktion.

sortierung des Approximationsanteils auf einer Untermenge der Koeffizienten. Für die Berechnung der Koeffizienten in jeder Stufe wird die Implementierung der SWT nach [112] verwendet. Durch das Downsampling verringert sich die Anzahl der Repräsentanten für die Bestimmung der Permutation in jeder Wavelet-Zerlegungsstufe aufgrund der Multiskalenanalyse um den Faktor zwei.

Ein schematisches Blockdiagramm zur SRWT-Prozedur ist in Abb. 2.11 dargestellt. Aus Gründen der Übersicht beschränkt sich die Kennzeichnung der Größen innerhalb der Abbildung auf die Zerlegungsstufe  $l$  durch die Exponenten sowie die Unterscheidung von Approximations- und Detailkoeffizienten  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{d}$ . Alle Permutationsmatrizen  $\mathbf{P}$  müssen individuell berechnet werden. Lediglich die Tiefpass-  $\mathbf{G}$  und Hochpassfilter  $\mathbf{H}$  sind in jeder Zerlegungsstufe gleich. Aus dieser Vorgehensweise resultiert eine stark redundante Kollektionsmatrix mit  $L$ -facher Größe  $R \times (L + 1)N_R$  zur ursprünglichen Matrix  $\mathbf{K}$ , welche die Wavelet-Koeffizienten beinhaltet.

Wie in Abb. 2.11 dargestellt, ist die Bestimmung der Permutation unabhängig von den Detailkoeffizienten. Es erfolgt lediglich eine Speicherung der Detailkoeffizienten, um diese nach der Wavelet-Zerlegung zusammen mit dem approximierten Anteil dem Thresholding zu unterziehen.

**Rekonstruktion** Nach der schrittweisen Zerlegung und Permutation der Approximationskoeffizienten erfolgt die Anwendung des beschriebenen Thresholdings  $\mathcal{T}(\cdot)$ . Dadurch werden alle Wavelet-Koeffizienten, approximierter und detaillierter Anteil, unterhalb einer definierten Schwelle auf Null gesetzt. Anschließend werden die verbleibenden Stützstellen mit Hilfe der Wavelet-Synthese  $\mathbf{D}_S$ , unter Berücksichtigung der Permutationsmatrizen  $\mathbf{P}^l$  innerhalb der jeweiligen Stufen, zurücktransformiert. Die inverse Permutation erfolgt hinsichtlich der Spalten der zerlegten Kollektionsmatrix, wohingegen die inverse SWT zeilenweise angewandt wird. Aufgrund der Orthogonalität der Permutationsmatrizen  $\mathbf{P}^l$  in den Wavelet-Zerlegungsstufen gilt für die inverse Permutation  $(\mathbf{P}^l)^{-1} = (\mathbf{P}^l)^T$ . Daraus resultiert die folgende rekursive Rekonstruktionsvorschrift

$$\mathbf{a}^{l-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{P}^l)^T (\mathbf{G}_r^l \mathbf{a}^l + \mathbf{H}_r^l \mathbf{d}^l) \quad (2.137)$$

pro Teildarstellung. Analog zum SOP ist die gewichtete Überlagerung, gemäß Gl. (2.105) und (2.106), der rekonstruierten Teildarstellungen durchzuführen, um die Lösung  $\mathbf{X}_{\text{rec}}$  aus  $\mathbf{K}_{\text{rec}}$  zu erhalten.

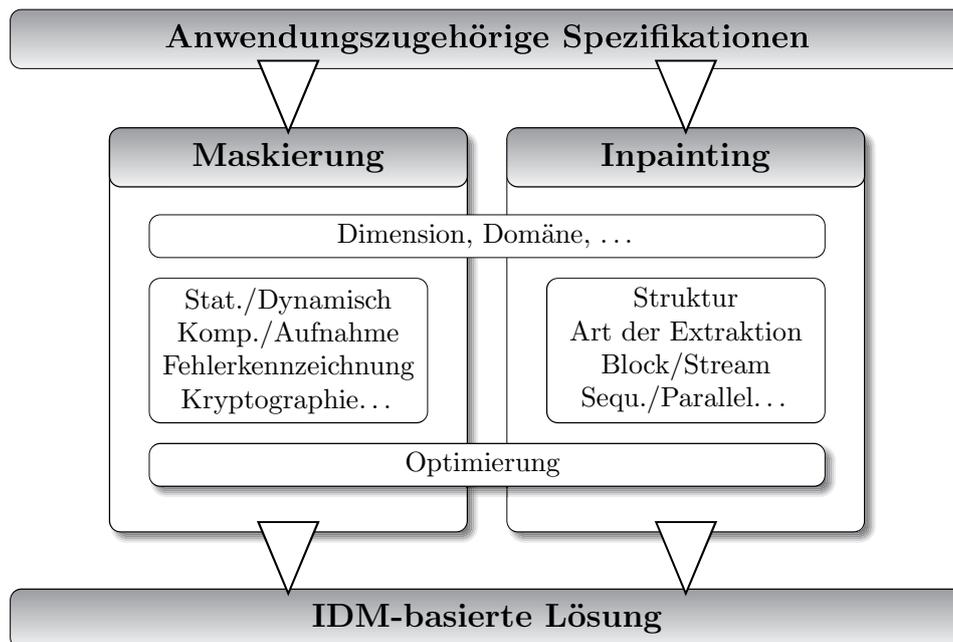
Die soeben eingeführte Vorgehensweise wird im Verlauf der Arbeit als Lösungsverfahren für verschiedene Inpainting-Probleme sowie Ansatz für neue Rekonstruktionsverfahren verwendet.

## 2.5 Inpainting Design Methodik

In dieser Arbeit erfolgt die Einführung der Inpainting Design Methodology (IDM) [106] zur Entwicklung neuartiger Lösungsvorschläge sowie zur effizienten Verbesserung bestehender Ansätze. Im Zuge dessen werden anwendungsspezifische Systeme betrachtet, welche aus verschiedenen Gründen starken Restriktionen hinsichtlich der vorliegenden Ressourcen unterliegen. Der Begriff Ressource bezeichnet in dieser Arbeit eine geometrische Fläche, Energieverbrauch, Zeitaufwand, o.ä. für Berechnungskomponenten, die zur Verarbeitung von großen Datenmengen erforderlich sind. Die Betrachtung von ressourcenbegrenzten Systemen umfasst ein riesiges Spektrum von unterschiedlichen (konträren) Anwendungen. Die Spanne reicht einerseits von Systemen, in denen die benötigte Berechnungskapazität, beispielsweise aufgrund von fehlender Flächen- oder Energiebereitstellung, nicht zur Verfügung steht, um ein großes Datenvolumen zu bewältigen. Und endet andererseits bei Systemen, die trotz hoher Berechnungskapazität nicht in der Lage sind, das gesamte Datenvolumen in einer spezifizierten Zeit zu erfassen oder zu verarbeiten. In solchen Szenarien bietet die IDM innovative Lösungsansätze basierend auf einer Neuverteilung der Berechnungskomplexität unter der Verwendung einer Maskierung bei der Datenerfassung sowie einer inpaintingbasierten Datenwiederherstellung.

**Spezifikation** Der Ausgangspunkt für die Anwendung der vorgestellten Methodik ist die Erörterung von Spezifikationen, welche an das ressourcenlimitierte System gestellt werden. Mit dem IDM-Ansatz wird eine lösungsorientierte Brücke zwischen den unvermeidbaren systeminhärenten Diskrepanzen der vorhandenen Ressourcen und den Anforderungen an das System geschaffen. Das könnten beispielsweise ein große Datenvolumen  $\mathbf{X}$  gepaart mit einer geringen Übertragungsrate neben dem Vorhandensein von Energie- und Flächenbeschränkungen sein oder eine aufwändige Datenerfassung hinsichtlich Energie oder Zeit trotz der Forderung an eine hohe Datenqualität. In solchen anwendungsspezifischen Szenarien entwirft die vorgestellte IDM einen hochwertigen Lösungsansatz, wohingegen bekannte Standardverfahren in der Regel keinen gültigen Vorschlag bieten, ohne die Spezifikationen zu verletzen.

**Domäne und Dimension** Die Abb. 2.12 verdeutlicht, dass die Spezifikationen des anwendungsbezogenen Systems die Grundlage für die beiden entwurfstechnischen Kerne der eingeführten IDM bildet. Der Entwurf einer individuellen Problemlösung basiert einerseits auf der Maskierung für die reduzierte Datenerfassung und andererseits auf der Rekonstruktion unter Verwendung von Inpaintingalgorithmen. Übergeordnet können diese beiden Kerne, unter priorisierter Berücksichtigung von gemeinsamen Entwurfsfaktoren, unabhängig bearbeitet werden, um eine optimierte Lösung für das betrachtete Szenario zu erstellen. Zu den Faktoren gehören beispielsweise die Dimension oder Domäne der Datenverarbeitung. Mit ersterem kann interpretiert werden, ob die Daten



**Abbildung 2.12:** Anwendungsspezifische Lösungsgenerierung der eingeführten IDM.

$\mathbf{X}$  als Signal, Bild, Video, usw. eingesetzt werden. Hierbei sind auch Kombinationen zwischen verschiedenen Dimensionen möglich, beispielsweise eine Maskierung im Frame-by-Frame-Stil (eine Serie aus 2D Arrays) gefolgt von der anschließenden dreidimensionalen Rekonstruktion der Daten. Die Domäne definiert die Basis der Verarbeitung. Beispielsweise lässt sich die Maskierung in einem Transformationsbereich realisieren. Während im dazugehörigen Schritt der Datenwiedergewinnung alternierend zwischen der ursprünglichen und transformierten Domäne gewechselt wird, um eine inhärente Verifikation der Rekonstruktion ausnutzen zu können.

**Maskierung** Die Art der logischen Maskierung  $\Omega$  der Daten ist in der Regel geprägt durch die Spezifikationen der vorgegebenen Anwendung und kann zur effizienten Erfassung bzw. Kompression mit minimalem Berechnungsaufwand eingesetzt werden. Die Nulleinträge von  $\Omega$  identifizieren nicht ausschließlich ein Verwerf einzelner Datenpunkte nach der vollständigen Datenerfassung. Vielmehr kann  $\Omega$  zu einer Aussparung definierter Datenpunkte eingesetzt werden, wodurch sich die Berechnungskomponenten für die Datenerfassung hinsichtlich der Ressourcen Fläche, Energie bzw. Zeit optimieren lassen. Die Konsequenz ist ein reduziertes Datenvolumen direkt bei der Erfassung, was wiederum vorteilhaft für die Datenübertragungsrate bzw. -speicherung ist. In Abhängigkeit der Spezifikationen der betrachteten Anwendung muss des Weiteren entschieden werden, ob die Maskierung in der originalen Domäne oder innerhalb eines Transformationsbereiches durchzuführen ist. In einigen Fällen kann letzteres auch aufgrund der Erfassungstechnologie, zum Beispiel beim MRT, vorgegeben sein. Neben statischen Konstellationen der Einträge  $\{0, 1\}$  existiert zusätzlich die Möglichkeit der dynamischen Erstellung der Maske  $\Omega$  anhand der vorliegenden Daten, beispielsweise basierend auf

einer Kantendetektion. Die damit verbundenen Vorteile gehen zwangsläufig mit einem größeren Bedarf der Systemressourcen einher. Selbstverständlich ist eine dynamische Maske nicht realisierbar, wenn der Berechnungsaufwand im Konflikt mit den Spezifikationen steht. Des Weiteren kann die Maske in sicherheitskritischen Anwendungen als eine Art kryptographische Verschlüsselung der ursprünglichen Daten verstanden werden. Solange in der Verarbeitungskette ausschließlich die Einheiten für die Erfassung und Rekonstruktion jeweils die Struktur der Maske (Schlüssel) kennen, ist es einem potentiellen Angreifer fast unmöglich aus dem reduzierten Datensatz die originalen Aufnahme wiederherzustellen.

**Inpainting** Parallel und bedingt abhängig vom Entwurf der Maskierung, wie in der Abb. 2.12 dargestellt, erfolgt die Entwicklung und Erörterung eines geeigneten Inpaintingalgorithmus zur effizienten Datenwiederherstellung. Die Kenntnis über das Design sowie die dazugehörige Domäne der Maske ist essentiell für die Rekonstruktion. Ein (alternierender) Wechsel in eine zusätzliche Transformationsbasis kann diesbezüglich zu einer Verbesserung ausgenutzt werden. Daher muss  $\Omega$  entweder a priori bekannt sein oder zusätzlich zum reduzierten Datenvolumen dem Inpaintingalgorithmus zur Verfügung gestellt werden. Die Anzahl und Position der Nichtnulleinträge in der Maske ist dementsprechend ausschlaggebend für die Qualität der Rekonstruktion, gemäß *inpainting makes every sample count* [106]. Im Gegensatz zur Maskierung ist die verwendete Dimension in der Datenwiedergewinnung maßgebend für die Qualität. Sofern die Daten inhärente Korrelationen aufweisen, ist der Einsatz einer mehrdimensionalen Rekonstruktion vorteilhaft. Diese Interpretation der Verarbeitung muss nicht konsistent mit der Art der Maskierung sein. In Abhängigkeit der Dateneigenschaften und Systemspezifikationen muss im nächsten Schritt festgelegt werden, ob ein struktur- oder repräsentantenbasierter Inpaintingansatz zu verwenden ist. Ersteres ist geeignet für die Rekonstruktion von Strukturen zwischen eher regulären Arealen und geht mit einem geringen Speicherbedarf einher. Zweiteres ermöglicht eine schnelle und detailliertere Wiederherstellung allerdings basierend auf komplexen Berechnungen und zusätzlich anfallende große Datenmengen. Darüber hinaus spielt die Art der Verarbeitung, ob blockweise oder streaming, in beiden Kategorien eine wichtige Rolle. Abschließend müssen die spezifischen Parameter für die verschiedenen Inpaintingalgorithmen untersucht und definiert werden. Beispielsweise gehört bei repräsentantenbasierten Ansätzen der Typ der Repräsentantenextraktion dazu, also der Einsatz von Patches, Cuboids, o.ä. in Abhängigkeit der gewählten Dimension.

**Optimierung** Im Fall, dass der initiale Entwurf der IDM die Spezifikationen der betrachteten Anwendung zunächst nur partiell erfüllt, kann eine sukzessive Optimierung des Lösungsvorschlags erfolgen. Hinsichtlich der Maske  $\Omega$  umfasst dies das Design und die Domäne mit dem Ziel den Grad der Datenreduktion zu erhöhen und gleichzeitig die Rekonstruierbarkeit zu gewährleisten. Die Optimierung bezüglich der Rekonstruktionsprozedur fokussiert sich hauptsächlich auf der Qualität und Laufzeit der Daten-

wiederherstellung. In der Regel lässt sich beides durch die Einstellung der Parameter oder mittels algorithmischer Anpassung erreichen. Hält die gegenwärtige Latenz der Datenwiedergewinnung nicht die Vorgaben der Spezifikation ein, kann beispielsweise durch die Einschränkungen von Suchbereichen innerhalb der repräsentantenbasierten Verfahren oder funktionalen Approximation eine Reduktion des Berechnungsaufwandes eingeleitet werden. Letzteres eröffnet weitergehend das Potential für eine Beschleunigung der Berechnungen mit Hilfe von Hardwareunterstützung.

**IDM-basierte Lösung** Nach geeignetem Entwurf der Maske und des Inpaintingrekonstruktionsverfahrens sowie dem erfolgreichen Durchlaufen der Optimierung liegt die Lösung der IDM vor. Der generierte Ansatz sollte dann bezüglich des betrachteten ressourcenbegrenzten Systems konform mit den vorgegebenen Spezifikationen der Anwendung sein. Das qualitative Ergebnis der IDM zeichnet sich sowohl durch den Grad der Datenreduktion auf der Erfassungsseite als auch über die Genauigkeit der Datenrekonstruktion auf der Wiederherstellungsseite aus. Der Hauptvorteil der IDM für Systeme mit Ressourcenbeschränkungen besteht allerdings in der Komplexitätsverschiebung des Berechnungsaufwands von der Datenerfassungs- zur Datenwiederherstellungsseite. Gegeben wird diese inhärente Eigenschaft der vorgestellten Methodik durch den Einsatz der Maske  $\Omega$  zur reduzierten Erfassung der Quelldaten und der nachfolgenden Interpretation dieser als Inpaintingproblemstellung.





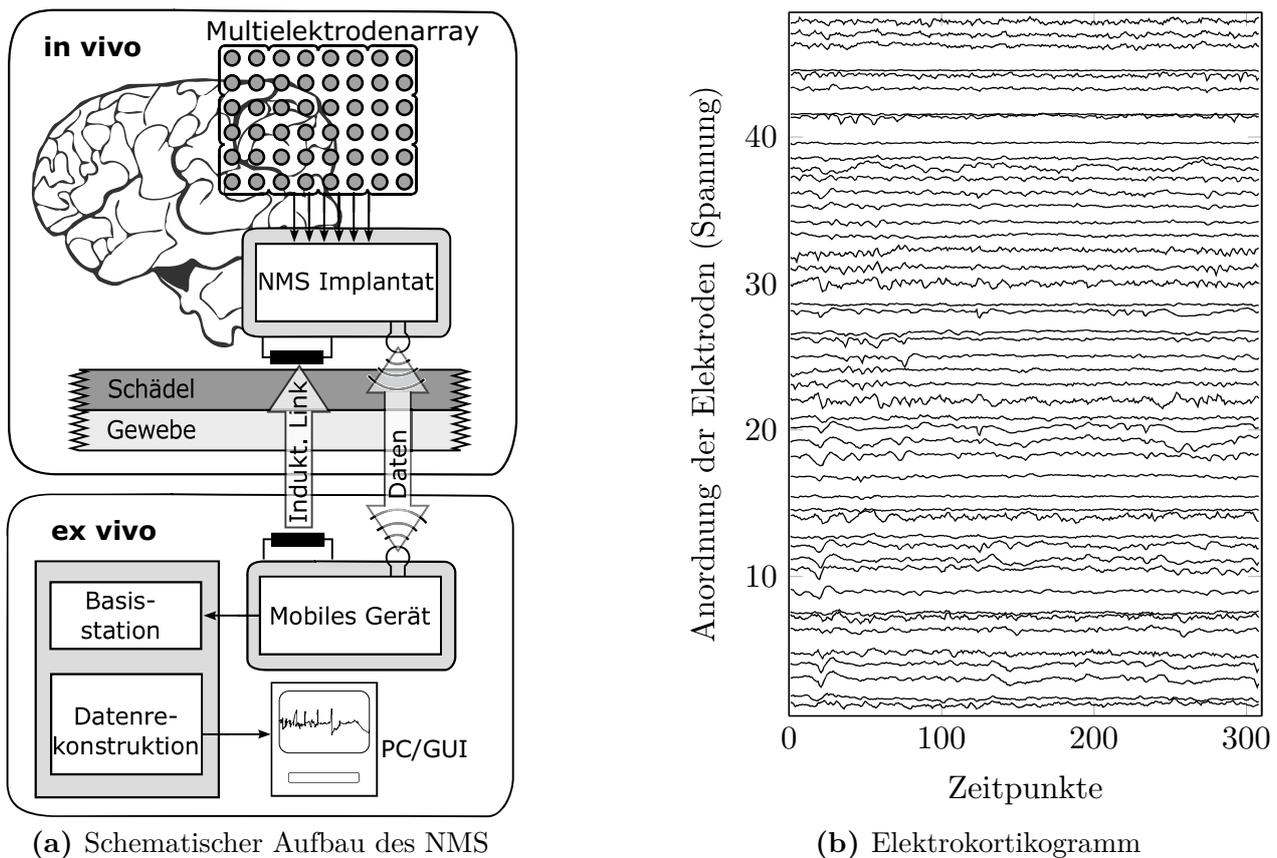
## 3 Neurologisches Messsystem

In diesem Kapitel erfolgt die Anwendung der vorgestellten IDM aus Abschnitt 2.5 zur Realisierung eines vollständig implantierbaren Neural Measurement System (NMS) um medizinische Local Field Potential (LFP) von beispielsweise Epilepsiepatienten zu erfassen. Die Lösung dieser Problemstellung basiert auf den Inpainting-Ansätzen aus Abschnitt 2.4 und wird abschließend den eingeführten klassischen Datenkompressionsverfahren aus Abschnitt 2.2 sowie den State-of-the-Art (SotA) Methoden, wie CS aus Abschnitt 2.3, gegenübergestellt.

### 3.1 Problemstellung

Eine der Hauptherausforderungen in diversen Bereichen in der neurologischen Forschung und medizinischen Diagnostik, wie beispielsweise der Detektion von epileptischen Anfällen mittels Elektrokortikogramm (ECG)/Elektroenzephalogramm (EEG) [79] oder die Steuerung von Prothesen [111], ist die kontinuierliche Langzeitdatenaufnahme der neurologischen Aktivität. Die Umsetzung eines solchen Fernüberwachungssystems in Form eines vollständig implantierbaren Messimplantats ist ein vielversprechender Ansatz. Ein Klinikaufenthalt ist somit nicht mehr zwingend notwendig. Ein solches NMS ermöglicht den alltäglichen Einsatz am Patienten, ohne Abstriche der Lebensqualität machen zu müssen. Dafür muss das NMS direkt an der Gehirnoberfläche positioniert sein, ohne eine Verkabelung durch den Schädel oder das Gewebe nach außen. Der Verzicht der physikalischen Verbindungen minimiert das Risiko einer Infektion an den Eintrittsstellen. Sowohl die Daten- als auch Energieübertragung, in Form von induktiver Kopplung, sollen durch drahtlose Ansätze realisiert werden. Hinsichtlich der begrenzten Auswahl an medizinisch zugelassenen Übertragungsgeräten, aus Gründen des Flächen- bzw. Energiebedarfs [23], was mit einer potentiell schädlichen Hitzeentwicklung einhergeht, sind die verfügbaren Datenraten eingeschränkt.

Aus medizinischer Sicht ist das Ziel die Untersuchung der Gehirnaktivität anhand von Daten mit sehr hoher zeitlicher und örtlicher Auflösung zur Erforschung von neurologischen Krankheiten und Störungen. Aus technischer Sicht werden die biomedizinischen Signale mit Hilfe eines Multi Electrode Array (MEA) erfasst, ggf. verstärkt sowie gefiltert und nach der Analog-to-Digital Converter (ADC) als Daten zur Verfügung gestellt [53].



**Abbildung 3.1:** Schematische Darstellung der Signalableitung über ein NMS und die Aufbereitung der Daten aus [51] für die visuelle Bewertung durch das medizinische Fachpersonal.

In der Abb. 3.1a sind alle technischen Komponenten in dem Modul NMS Implantat zusammengefasst. Die riesige Menge an aufgenommenen Daten steht mit der Restriktion der Datenrate im Konflikt.

Um diese Diskrepanz in den Spezifikationen zu schließen, ist ein Datenkompressionsansatz mit minimalem Berechnungsaufwand auf dem NMS erforderlich [101, 104]. Hierbei muss es sich um einen asymmetrischen Ansatz handeln, da die Rekonstruktion auf einer externen Plattform mit ausreichender Berechnungskapazität durchgeführt wird [106]. Sowohl CS als auch die eingeführte IDM besitzen, im Gegensatz zu klassischen Kompressionsverfahren wie JPEG, diese Eigenschaft.

## 3.2 Datenaufnahme

Alle nachfolgenden Untersuchungsergebnisse basieren auf klinischen, invasiv abgeleiteten Messdaten  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^D$ , welche vom Epilepsiezentrum Erlangen (EZE) zur Verfügung gestellt wurden [51]. Dabei handelt es sich um eine 24 h Signalerfassung bei einem männlichen Epilepsiepatienten. Verwendet wurde u.a. ein Oberflächen-MEA aus 48 Messeinheiten in

rechteckförmiger Form  $M \times N = 6 \times 8$ , welche in der Lage sind, das LFP des Patienten zu messen. LFPs besitzen eine Bandbreite von 1 Hz bis 300 Hz und Spannungsamplituden von  $< 5$  mV [56]. Die einzelnen Elektroden haben einen Abstand von 1 cm zueinander und erfassen die neurologische Aktivität mit einer Abtastfrequenz von 1024 Hz und 16 Bit Auflösung. Für die medizinische Auswertung werden die Daten  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{MN \times T}$  der Elektroden – wie in Abb. 3.1b dargestellt – untereinander angeordnet und anschließend visuell vom medizinischen Fachpersonal bewertet. In Abhängigkeit des verwendeten Ansatzes erfolgt, sowohl für die Darstellung als auch Verarbeitung der Daten, eine Normierung auf die Wertebereiche  $[0, 1]$  bzw.  $[0, 255]$ .

Die Untersuchungen in [101] haben gezeigt, dass die betrachteten Daten eine nutzbare Signalkorrelation zwischen den Elektroden aufweisen. Durch die Anordnung der Elektroden, hinsichtlich ihrer örtlichen Nachbarschaft, lässt sich die Zwischenelektrodenkorrelation in  $\mathbf{X}$  erhöhen. Eine ausgeprägte Signalähnlichkeit innerhalb von  $\mathbf{X}$  korrespondiert mit dominanten niederfrequenten Schwingungen in Ortsrichtung. Aufgrund dieser Eigenschaft bilden sich stellenweise optische Strukturen entlang der Elektroden aus, welche vorteilhaft für die Datenkompression nutzbar sind. Dadurch wird beispielsweise, hinsichtlich CS, der Grad der Sparsity  $K$  innerhalb einer geeigneten Basis  $\mathbf{D}$  begünstigt, was zu einer geringeren Zeilenanzahl der Messmatrix  $\mathbf{A}$  und damit höheren Kompression  $\eta$  führt [22, 103]. Das Vorhandensein von (optischen) Strukturen, aufgrund der Signalkorrelationen, eröffnet den Ansatz, die neurologische Aufnahme in  $\mathbf{X}$  als Bild [104] oder Video [110] zu interpretieren. Durch die intelligente Implementierung der Maske  $\Omega \in \{0, 1\}^{MN \times T}$  lässt sich auf diese Weise eine Inpainting-Problemstellung definieren.

### 3.2.1 Maske als Elektrodensteuerung

Bei der Signalableitung bestimmt die Maske  $\Omega$  – im Sinne einer Datenkompression – zu definierten Zeitpunkten die Deaktivierung einer Untermenge der vorhandenen Elektroden. Ein Verwurf eines Aufnahmepunktes entspricht in  $\Omega$  einem Nulleintrag. Mit Null gekennzeichnete Elektroden sind ausgeschaltet, verbrauchen idealerweise keine Energie, und fließen in diesem Zeitabschnitt nicht in Datenübertragung ein. Die definierte Konstellation aus Nullen und Einsen wird als Einheit zur Elektrodensteuerung (zum Beispiel in Form einer Finite State Machine (FSM)) implementiert und periodisch wiederholt. In diesem Szenario gilt als Forderung an das Muster der Maske, dass innerhalb einer Periode jede Elektrode mindestens zu einem Zeitpunkt einen Beitrag zur Messung liefern muss.

Lediglich die tatsächlichen Messungen, korrespondierend zu den Einträgen  $\Omega_{m,t} = 1$ , werden nach der Analog-to-Digital (A/D)-Wandlung ohne weitere nennenswerte Verarbeitung an die Basisstation übertragen. Das Design der Maske ist der Basisstation

a priori bekannt. Die übertragenen biomedizinischen Werte werden an die ursprünglichen Koordinaten innerhalb der Maske positioniert. Daraus resultiert die maskierte Matrix

$$\mathbf{A}_\Omega = \mathbf{\Omega} \circ \mathbf{X}, \quad (3.1)$$

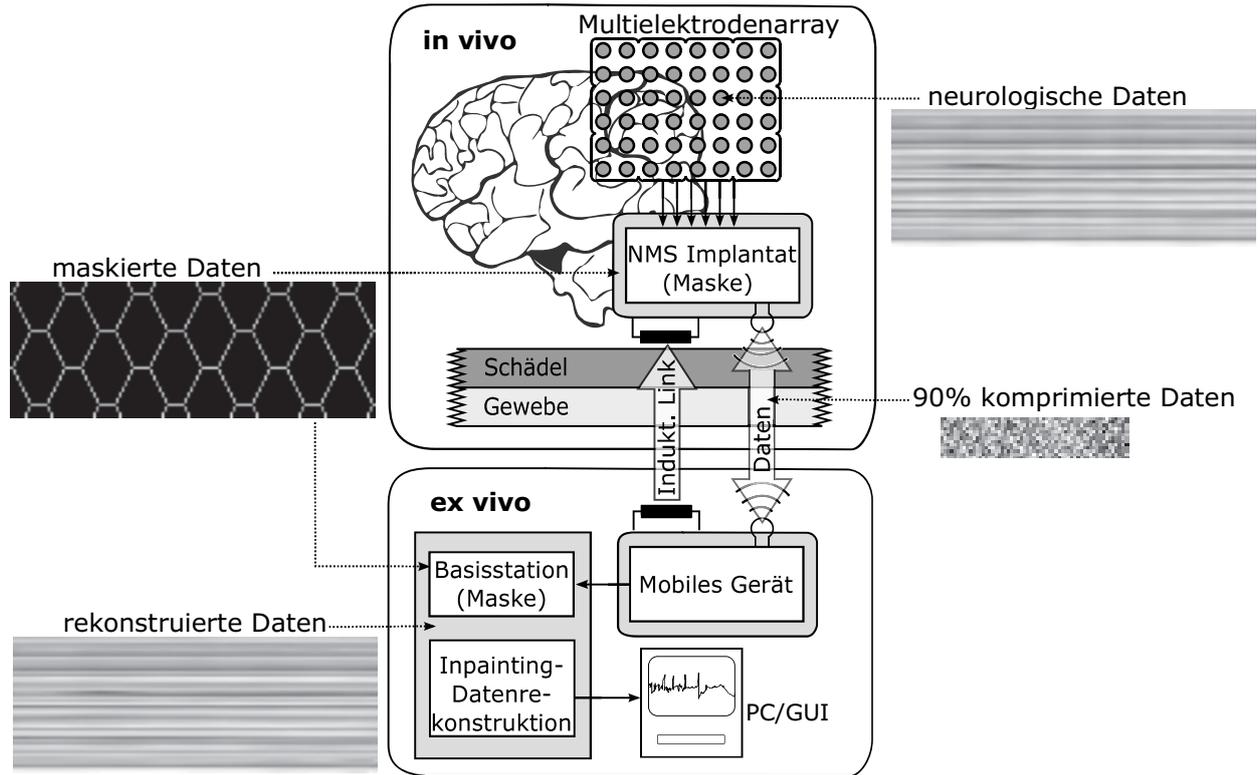
wie in Gl. (2.79) aus Abschnitt 2.4 eingeführt, welche als Ausgangspunkt für die Datenwiederherstellung mit Hilfe von Inpaintingverfahren dient. Dabei hängt die Güte der jeweiligen Rekonstruktionsansätze maßgeblich von der Anzahl der Nichtnulleinträge und deren Anordnung in der Maske ab.

**Maske als kryptographischer Schlüssel** Neben der Datenkompression, welche sich besonders effizient in Systemen mit begrenzten Ressourcen wie Fläche der Schaltung oder Energiebedarf implementieren lässt, bietet die Maske  $\mathbf{\Omega}$  noch weitere vorteilhafte Eigenschaften. In sicherheitskritischen Anwendungen kann die Maske als nativer Schlüssel im Sinne einer symmetrischen Kryptographie verstanden werden. In medizinischen Anwendung fallen überwiegend vertrauliche Daten an. Das Einsehen dieser ist lediglich dem Patienten selbst und dem medizinischen Fachpersonal vorbehalten und muss vor Unbefugten geschützt werden.

Die Verwendung der Maske bietet eine inhärente Verschlüsselung, da die exakte Anordnung der Nullen und Einsen lediglich im implantierbaren NMS für die Elektrodensteuerung und an der externen Basisstation für die Rekonstruktion bekannt ist. Die CS-Messmatrix weist dieses Attribut ebenfalls auf. Sollte ein Unbefugter während der Übertragung die maskierten Daten ausspähen, kann dieser ohne die Maske, trotz leistungsstarkem Inpainting-Verfahren, die Daten mit hoher Wahrscheinlichkeit nicht wiederherstellen.

### 3.3 Zweidimensionale Datenrekonstruktion

Die verschiedenen Zustände der neurologischen Daten in Abhängigkeit der inpainting-basierten Verarbeitung sind in der Abb. 3.2 exemplarisch dargestellt. Während der invasiven Ableitung erfolgt die Maskierung der Daten. Die unmaskierten Aufnahmewerte werden übertragen und anschließend, nach der Repositionierung an die ursprünglichen Koordinaten, rekonstruiert. Um eine hohe Güte zu erreichen, ist das Wiederherstellungsverfahren der verwendeten Maskierung bzw. der Dimension sowie Domäne anzupassen. In den folgenden Abschnitten werden die Ergebnisse verschiedener Inpaintingansätze, basierend auf der IDM, diskutiert und mit SotA- sowie Standardmethoden für Datenkompression verglichen.

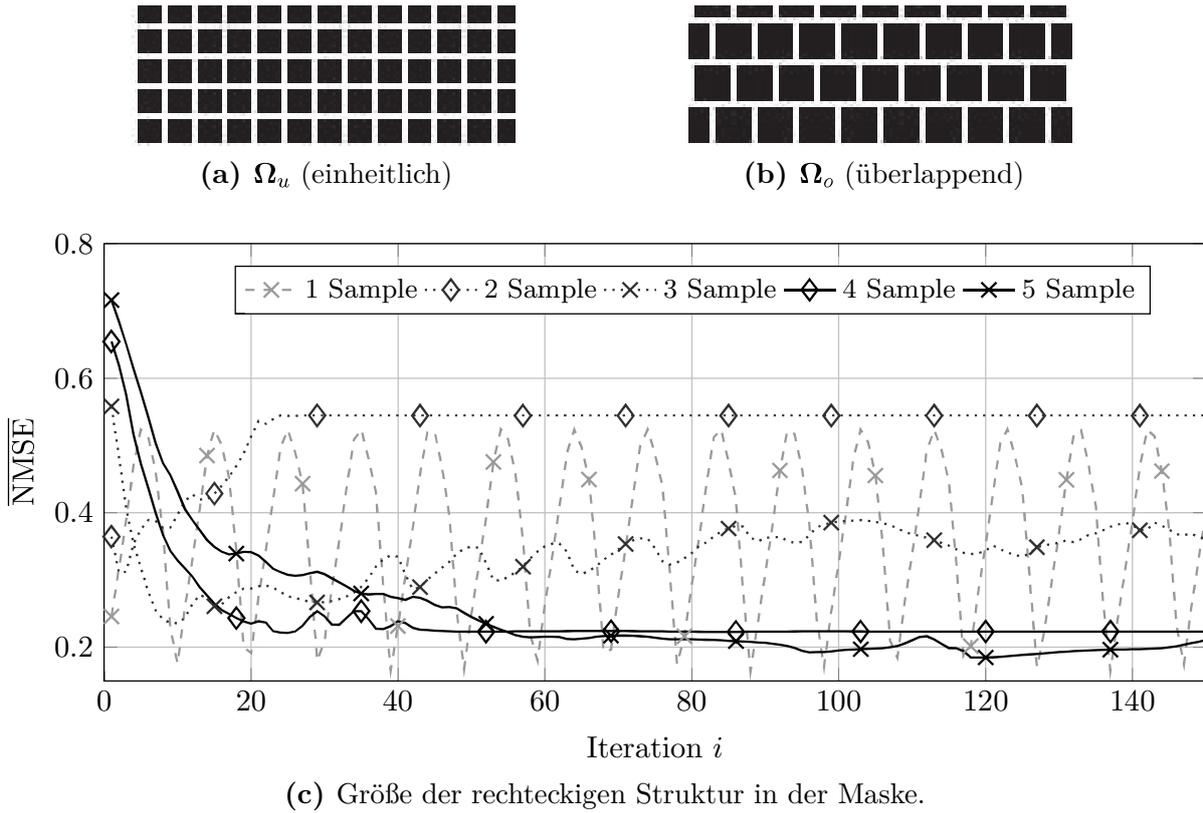


**Abbildung 3.2:** Realisierung des NMS basierend auf der IDM. Die am Rand befindlichen Daten stellen Matrizen mit Signalamplituden als Grauwerte dar. Die vertikale Richtung entspricht der Anordnung der Elektroden 1 bis 48 und die horizontale Richtung der dazugehörigen Aufnahmezeitpunkte.

### 3.3.1 Strukturrekonstruktion in neurologischen Daten

Der SBI-Algorithmus aus [6], eingeführt in Abschnitt 2.4.1, legt die primäre Konzentration auf die Rekonstruktion von Strukturen in Form von Isophoten zwischen näherungsweise homogenen Arealen. Dieses Inpaintingverfahren nutzt für die Aktualisierung des betrachteten Datenpunktes  $\Omega_{m,t} X_{m,t}$  lediglich die lokalen angrenzenden Informationen zur Wiederherstellung aus. Wie bereits in den drei Abb. 2.9 verdeutlicht wurde, benötigt der klassische Algorithmus aufgrund der Laplace-Operatoren insgesamt 13 umliegende Informationsquellen für die Rekonstruktion. Mit Blick auf das Update  $\hat{X}_{m,t}$  an der Position  $(m, t)$  sind dabei folgende Werte für die Berechnung mit einzubeziehen:

$$\{\mathcal{L}_{m+1} - \mathcal{L}_{m-1} \cup \mathcal{L}_{t+1} - \mathcal{L}_{t-1}\} = \left\{ \begin{array}{ccccc} & & X_{m-2,t} & & \\ & X_{m-1,t-1} & X_{m-1,t} & X_{m-1,t+1} & \\ X_{m,t-2} & X_{m,t-1} & X_{m,t} & X_{m,t+1} & X_{m,t+2} \\ & X_{m+1,t-1} & X_{m+1,t} & X_{m+1,t+1} & \\ & & X_{m+2,t} & & \end{array} \right\}. \quad (3.2)$$

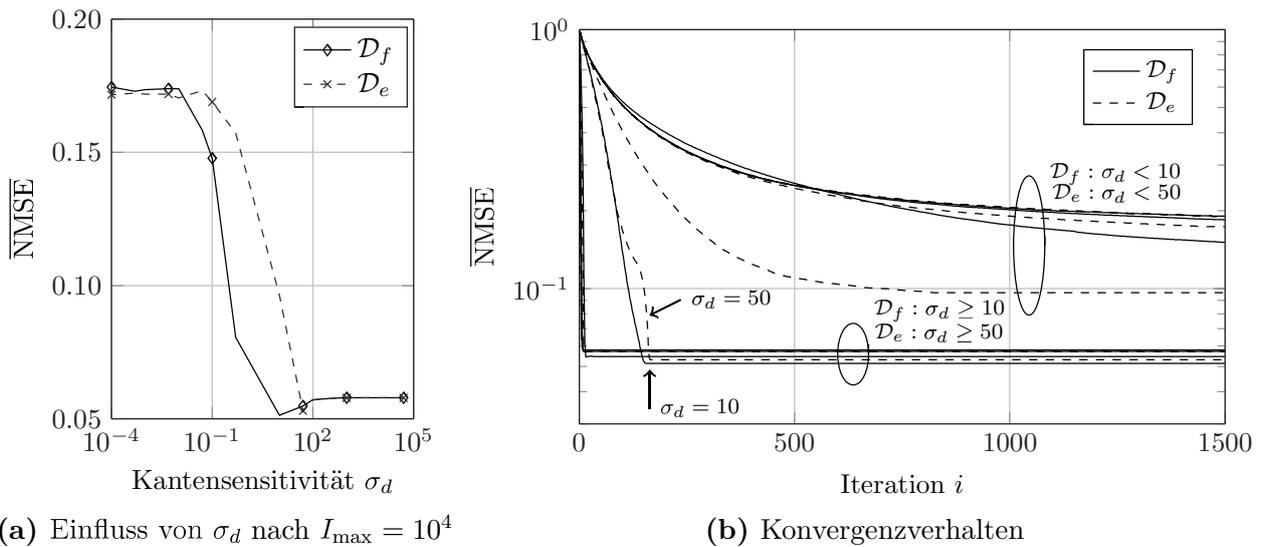


**Abbildung 3.3:** Darstellung der Masken  $\Omega \in \{0, 1\}^{MN \times T}$  für das strukturbasierte Inpainting: Einheitliche Rechteckstruktur  $\Omega_u$  und verschobene Rechteckstruktur  $\Omega_o$ . Untersuchung der Größe der rechteckigen Struktur als Maskierung hinsichtlich der Rekonstruktionsgüte.

Dies resultiert in einer maximalen Zugriffsweite von zwei hinsichtlich der umliegenden Datenpunkte. Bezogen auf das strukturbasierte Inpainting lassen sich daraus zwei Entwurfsmerkmale für die Maske  $\Omega \in \{0, 1\}^{MN \times T}$  ableiten:

1. Für die ideale Detektion von Isophoten ist die Wahl von rechteckigen Strukturen, in denen sich die Nullen befinden, aufgrund der geraden Kanten, vorteilhaft.
2. Um eine unabhängige Rekonstruktion zu gewährleisten, ist eine minimale Distanz von zwei Datenpunkten zwischen diesen Strukturen anzusetzen.

Die exemplarische Untersuchung einer maskierten Isophote für unterschiedliche Größen von rechteckigen Strukturen soll nachfolgend einen Indikator für den Entwurf der Maske liefern. Das Ergebnis hinsichtlich des Rekonstruktionsfehlers ist in Abb. 3.3c dargestellt. Als Maske wurde ein rechteckiger Ausschnitt, in dem sich die Nulleinträge befinden, verwendet. In der Betrachtung erfolgte eine sukzessive Erhöhung der Breite des Ausschnitts von einem Datenpunkt auf fünf Datenpunkte. Festzuhalten ist, dass schmale Strukturen als grundlegende Maskierung zu Schwingungen des Fehlers führen können. Ein Konvergenzverhalten ist erst ab einer Breite von vier zusammenhängenden Datenwerten zu beobachten.

(a) Einfluss von  $\sigma_d$  nach  $I_{\max} = 10^4$ 

(b) Konvergenzverhalten

**Abbildung 3.4:** Untersuchung der anisotropen Diffusion  $\mathcal{D}$  für die SBI-Rekonstruktion von neurologischen Daten. Betrachtung des Parameters  $\sigma_d$  für die Varianz und der maximalen Iterationszahl  $I_{\max}$  für die Bruch-  $\mathcal{D}_f$  sowie Exponentialfunktion  $\mathcal{D}_e$ .

Unter Berücksichtigung der eingeführten Entwurfsmerkmale werden für die nachfolgenden Simulationen dementsprechend die beiden Masken  $\Omega$  aus den Abb. 3.3a und 3.3b eingesetzt. Diese begünstigen die Rekonstruktion der Daten durch das strukturbasierte Inpainting. In den Abbildungen stellt die vertikale Richtung die Elektrodenanordnung ( $MN = 48$ ) und die horizontale Richtung die Zeitpunkte ( $T = 256$ ) dar. Des Weiteren entspricht schwarz einer Null bzw. weiß einer Eins, korrespondierend zu einer aktivierten bzw. deaktivierten Elektrode. Für die Datenkompression kann die Aktivität der Elektroden somit relativ trivial durch eine logische Steuerung implementiert werden.

Die Tab. 3.1 zeigt die Parameter für den Inpaintingalgorithmus. Dazu gehören die Operatoren für die Isophotenwiederherstellung sowie die Schrittweiten und Grenzen des iterativen Verfahrens. Diese Wahl der Parameter ist nicht optimiert und basiert auf zwei Punkten. Erstens wurden Empfehlungen aus der Literatur [6, 86, 18, 49] initial in Betracht gezogen und zweitens nachfolgend experimentell hinsichtlich der neurologischen Signale angepasst.

Im letzten Schritt der Vorbereitung erfolgt die Untersuchung der anisotropen Diffusion  $\mathcal{D}$ . Diese besitzt als Freiheitsgrad einen Parameter  $\sigma_d$  für die Kantensensitivität. Die

**Tabelle 3.1:** Übersicht der Parameter für das strukturbasierte Inpainting zur Rekonstruktion der neurologischen Daten des EZEs.

Operator $\{\mathcal{G}, \mathcal{L}\}$	Schrittweite $\{\Delta a, \Delta b\}$	Iteration $\{A_{\max}, B_{\max}, I_{\max}\}$
{ Zentral, Filter }	{ 0.1, 0.1 }	{ 30, 5, 10000 }

Implementierung der Bruch- sowie Exponentialfunktion aus Gl. (2.98) und (2.99) dient zur Gewichtung der Vorwärts- und Rückwärtsdifferenzen.

In Abb. 3.4a ist die Auswirkung der Kantensensitivität der anisotropen Diffusion auf die Rekonstruktionsgüte dargestellt. Dabei geht eine Erhöhung von  $\sigma_d$ , aufgrund des Arguments  $-(\Delta u/\sigma_d)^2$  in den Realisierungen von  $\mathcal{D}$ , mit einer Verbreiterung der jeweiligen Funktionen im Intervall der Differenz  $\Delta u \in [-1, 1]$  einher. Dementsprechend führen kleinere Werte für  $\sigma_d$  zu einer lokalen Schärfung um Null. In diesem Fall kommt es zu einer Verstärkung kleiner Differenzen  $\Delta u$  sowie einer Dämpfung großer Abweichungen. Im Umkehrschluss führen große Werte der Kantensensitivität zu einer Gleichgewichtung. Basierend auf Abb. 3.4a ist ein Wert für  $\sigma_d$  aus dem Bereich  $[0.5, 50]$  für die vorhandenen neurologischen Daten zu wählen.

Die Abb. 3.4b veranschaulicht das Konvergenzverhalten der Rekonstruktion in Abhängigkeit der beiden Varianten der anisotropen Diffusion sowie der Kantensensitivität. Tendenziell verzeichnet eine Gleichgewichtung der Differenzen  $\Delta u$  eine deutlich schnellere Konvergenz zu einem Restfehler. Dabei ist eine stabile Rekonstruktionsgüte für die maskierten neurologischen Daten bereits nach einigen hundert Iterationen  $i$  erreicht. Des Weiteren erzielt die Umsetzung der Bruchfunktion  $\mathcal{D}_f$  aus Gl. (2.99) im Vergleich zur Exponentialfunktion  $\mathcal{D}_e$  in der Regel eine frühere NMSE-Sättigung. Die optimale Rekonstruktionsqualität für die EZE-Daten wird für die Bruchfunktion bei 10 und für die Exponentialfunktion bei dem Wert 50 für die Kantensensitivität erreicht.  $\mathcal{D}_f$  erzielt in dieser Untersuchung den kleinsten Fehlerpegel. Dementsprechend ist die Bruchfunktion  $\mathcal{D}_f$  als Realisierung der anisotropen Diffusion, basierend auf den Ergebnissen der Abb. 3.4, für die nachfolgenden Untersuchungen auszuwählen.

Nach der Erörterung zum Design der Maske und der Parameter für das strukturbasierte Inpainting erfolgt an dieser Stelle die experimentelle Untersuchung der Lösung der IDM. Dazu werden die eingeführten Bewertungskriterien aus Abschnitt 2.1 betrachtet. Trotz der unausgewogenen Vergleichsbasis, sollen klassische Datenkompressionsverfahren, wie beispielsweise JPEG, zur Einschätzung der Güte nachfolgend in die Betrachtung einfließen. Der Grund dafür ist die symmetrische Verteilung des Berechnungsaufwandes zugunsten einer optimierten Kompression. Allerdings schließt dieser erhöhte Aufwand solche Verfahren als Lösungsansatz für Systeme mit beschränkten Ressourcen aus. Um die Lösung der IDM vergleichen zu können, ist die Gegenüberstellung mit anderen asymmetrischen Ansätzen wie CS sinnvoll. Wie in der Tab. 3.2 dargestellt, wurde dafür die Rekonstruktionsgüte NMSE bei gleichem Kompressionsgrad  $\eta$  betrachtet. Bei CS erfolgt letzteres durch die Größe der Messmatrix  $\mathbf{A}$ . Für die Kompression sind daher lediglich Additionen und Multiplikationen mit den Einträgen der Messmatrix  $a_{m,n}$ , welche für die Analyse einer Gauß-Verteilung  $\mathcal{N}$  folgen, notwendig. In Anlehnung an die Ergebnisse aus [103] wurde zur sparsen Repräsentation der neurologischen Signale als Transformationsbasis die DCT aus Abschnitt 2.2.1 verwendet. Für die CS-Betrachtung erfolgt die Berechnung des  $\ell_1$ -Optimierungsproblems als lineare Programmierung mit Hilfe des CVX-Tools [58]. Der Kompressionsgrad der Lösung der IDM wird über die

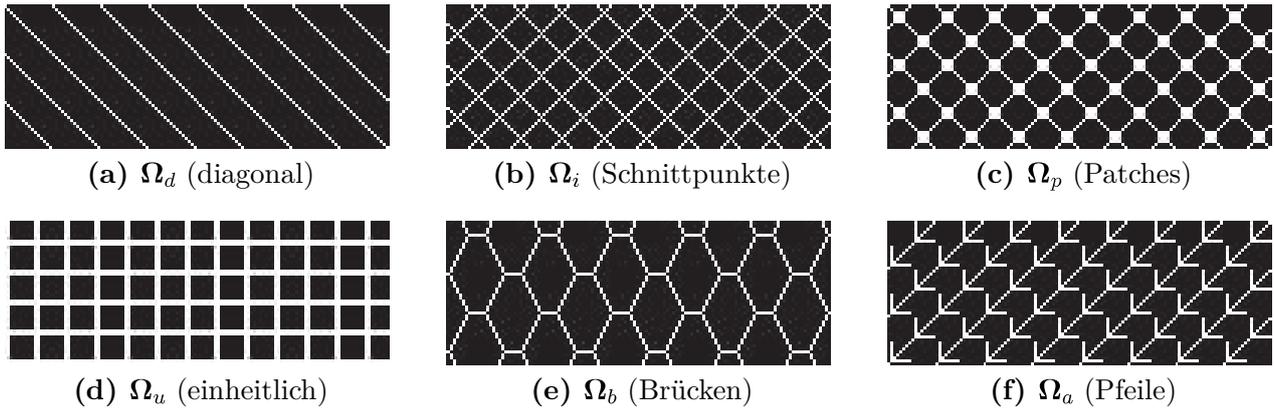
Anzahl und Größe von quadratischen Anordnungen der Nulleinträge in der Maske gesteuert. Die Tab. 3.2 beinhaltet Ergebnisse basierend auf der Realisierung der einheitlichen Maske  $\Omega_u$  mit  $8 \times 8$  und der verschobenen Maske  $\Omega_o$  mit  $12 \times 12$  quadratischen Aussparungen. In den Simulationen wurde eine blockweise Verarbeitung der EZE-Daten aus Abschnitt 3.2 mit  $MN = 48$  Elektroden und  $T = 256$  Zeitpunkten verwendet.

Die Klassifikation der rekonstruierten Signale auf Eignung für die neurologische Forschung oder medizinische Diagnostik hängt von der jeweiligen Anwendung und dem dazugehörigen Ziel ab. Somit werden Wiederherstellungsergebnisse in dieser Arbeit nicht in Kategorien, wie näherungsweise verlustfrei oder gerade noch ausreichend, zugeordnet. Es erfolgt daher lediglich eine Gegenüberstellung der algorithmischen Ansätze und keine Beurteilung der Daten, da dies dem medizinischen Fachpersonal vorbehalten ist.

Im Vergleich der Kompressionsansätze für die NMS-Realisierung mit asymmetrischem Berechnungsaufwand ist die IDM- der CS-Lösung überlegen. Für die angegebenen Kompressionsgrade erreicht der Inpainting-Ansatz mit seiner Approximation der Daten einen deutlich geringeren Rekonstruktionsfehler. Das bedeutet, dass die Elektrodenkorrelation dieser niederfrequenten LFP-Aktivität näherungsweise als isophotenbehaftete Struktur in diesem Inpaintingansatz verstanden und ausgenutzt werden kann. Die Qualität der CS-Implementierung hängt maßgeblich von der sparsen Repräsentation der Signale ab. Ohne Weiteres lässt sich die Sparsity nicht ideal erreichen, da der EZE-Datensatz aus echten Messwerten besteht, welche u.a. von Rauschen betroffen sind. Die Implementierung einer Vorverarbeitung, wie in [103] zur Sparsifizierung der Signale auf dem Implantat, würde die Spezifikationen des NMS verletzen und ist somit nicht praktikabel. Die Betrachtung von JPEG, einem Verfahren ausgelegt zur Datenkompression, verdeutlicht, dass trotz hoher Datenreduktion eine präzise Wiederherstellung für diese Art von biomedizinischen Daten möglich ist. Motiviert durch diese Erkenntnis, folgt im nächsten Abschnitt die Optimierung der Lösung der IDM für das NMS. Die Anpassung erfolgt durch die Umsetzung von repräsentantenbasierten Inpaintingansätzen zur weiteren Ausschöpfung des IDM-Potentials.

**Tabelle 3.2:** Vergleich von asymmetrischen Ansätzen für die Datenkompression, SBI und CS, zur Realisierung eines NMS. Die Auswertung beinhaltet die Rekonstruktionsgüte NMSE und den Kompressionsgrad  $\eta$ .

Verfahren	$\overline{\text{NMSE}}$	Kompression	Berechnungsverteilung
Win-ZIP	verlustfrei	35.90%	symmetrisch
CS ( $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{123 \times 256}$ )	$0.117 \pm 0.030$	52.08%	asymmetrisch
IDM, SBI ( $\Omega_u$ )	$0.079 \pm 0.014$	52.08%	asymmetrisch
CS ( $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{97 \times 256}$ )	$0.170 \pm 0.037$	62.11%	asymmetrisch
IDM, SBI ( $\Omega_o$ )	$0.078 \pm 0.012$	62.11%	asymmetrisch
JPEG	$0.017 \pm 0.003$	78.59%	symmetrisch

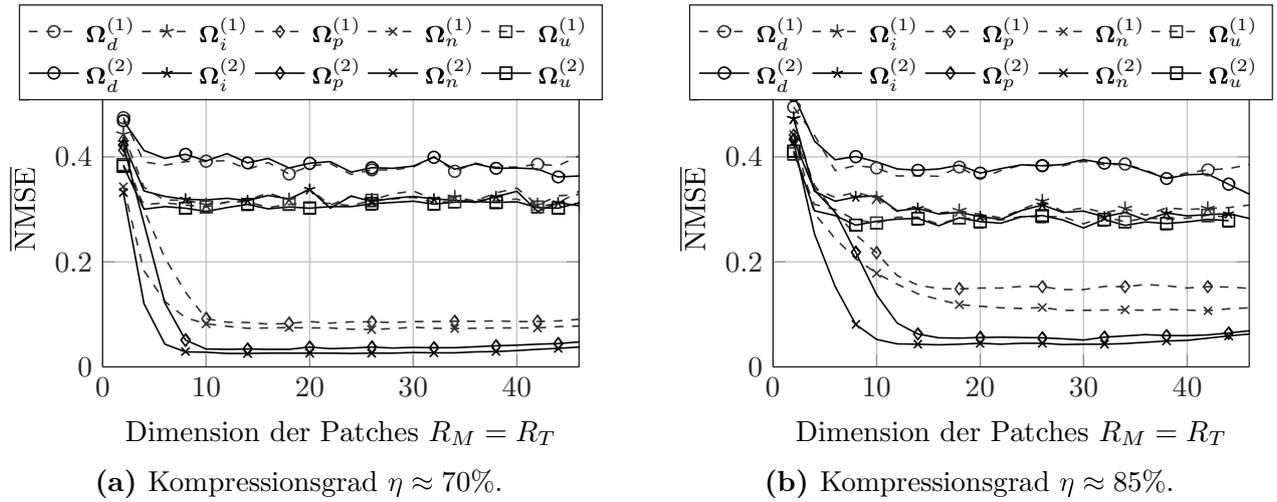


**Abbildung 3.5:** Darstellung der Masken  $\Omega \in \{0, 1\}^{MN \times T}$  für das repräsentantenbasierte Inpainting, verändert aus [105, 108]. Es liegen  $MN = 48$  Elektroden und  $T = 128$  Zeitpunkte pro Datenblock vor.

### 3.3.2 Repräsentantenbasierte Inpainting

Beim Wechsel zu einem repräsentantenbasierten Inpaintingverfahren bleibt die vorgeschlagene Lösung der IDM zur Realisierung des NMS, welches in Abb. 3.2 dargestellt ist, erhalten [105]. Entsprechend ändert sich am Schema einer maskenbasierten Elektrodensteuerung zur Kompression und die zweidimensionale Verarbeitung der Daten nichts. Lediglich die algorithmische Verarbeitung der maskierten Daten während der Datenwiederherstellung sowie das Design der Maske weichen vom strukturbasierten Inpainting ab. In der Regel bildet die Extraktion  $\mathcal{E}(\cdot)$  von überlappenden Ausschnitten oder Patches  $R_M \times R_T$  den Ausgangspunkt der patchbasierten Inpaintingverfahren. Im Hinblick auf die nachfolgenden Untersuchungen der algorithmischen Freiheitsgrade wird aus Gründen der Übersicht die Extraktion auf quadratische Ausschnitte  $R_M = R_T$  festgelegt.

Im Gegensatz zum strukturbasierten Inpainting beziehen die repräsentantenbasierten Ansätze ihre Information zur Rekonstruktion nicht lokal, sondern aus dem gesamten Datensatz. Die Ausnutzung von idealen geraden Kanten aus Nulleinträgen innerhalb der Maske zur vereinfachten Detektion von Isophoten während der Rekonstruktion ist daher nicht mehr erforderlich. Zur Erhöhung der extrahierten Information von benachbarten Elektroden in Ort- und Zeitrichtung werden zusätzlich Masken mit diagonalen Strukturen analysiert. In der Abb. 3.5 sind die Entwürfe zur maskenbasierten Kompression der neurologischen Aktivität für die nachfolgenden Untersuchungen dargestellt. Neben den rechteckigen und diagonalen Strukturen werden auch einige Hybride dieser und eine zufällige Verteilung der Einträge  $\{0, 1\}$  als  $\Omega_n$  betrachtet. Letzteres dient lediglich als Referenz, da eine solche Elektrodensteuerung aufgrund der unstrukturierten Verteilung der Werte einhergeht. Damit ist diese Maske unpraktikabel, da die (Pseudo-)Zufallswerte auf dem NMS in einem großen Look Up Table (LUT) hinterlegt werden müssten.



**Abbildung 3.6:** Vergleich verschiedener Masken hinsichtlich der Rekonstruktionsgüte in Abhängigkeit der Dimension der überlappenden quadratischen Patches  $R_M \times R_T$  zur Extraktion  $\mathcal{E}(\cdot)$ . Die Exponenten  $\Omega^{(\cdot)}$  in der Legende kennzeichnen die jeweilige Iteration, wobei die Patchdimension iterationsübergreifend identisch ist. Die Verarbeitung der neurologischen Signale  $\mathbf{X} \in [0, 1]^{48 \times 128}$  erfolgt blockweise.

Im nächsten Schritt stellt sich die Frage nach der Wahl des geeigneten Ansatzes für die repräsentantenbasierten Datenwiederherstellung. Verfahren wie der BM3D aus Abschnitt 2.4.2.2 eignen sich aufgrund der schlechten Kondition der Daten für die kollaborative Filterung nicht. Unglücklicherweise besteht die Spektraldarstellung der transformierten Patchgruppen innerhalb einer klassischen Basis  $\mathbf{D}$  aus vielen großen Koeffizienten im hochfrequenten Bereich. Die Ursache dafür liegt in der Überlagerung von zwei Effekten. Erstens sind die individuellen Signalvariationen entlang der Elektroden zu gleichen Zeitpunkten sehr stark oszillierend. Genau dieses Phänomen wurde auch im letzten Abschnitt diskutiert und ist mitverantwortlich für die unzureichende CS-Rekonstruktion. Und zweitens dominieren die Beiträge der großen Gradienten, welche durch die Nulleinträge in den maskierten Daten  $\mathbf{X}_\Omega$  hervorgerufen werden. In den nachfolgenden Simulationen ist der BM3D daher lediglich als Referenz im Bereich moderater Kompression verwendbar.

Da der SOP Algorithmus aus Abschnitt 2.4.2.1 die neurologischen Daten im Originalbereich verarbeitet, bildet dieser nachfolgend das Fundament der patchbasierten Rekonstruktion. In diesem Abschnitt soll der SOP zur Maximierung der Rekonstruktionsgüte bezüglich zweier Aspekte untersucht werden. Im ersten Schritt erfolgt die Suche nach einer geeigneten Maske  $\Omega$ . Die gewonnenen Erkenntnisse werden anschließend als Übertrag zur Erstellung weiterer Masken verwendet. Der zweite Schritt beinhaltet die Untersuchung und Anpassung der SOP-Parameter für der Wiederherstellung der neurologischen Daten.

### 3.3.2.1 Design der Maske

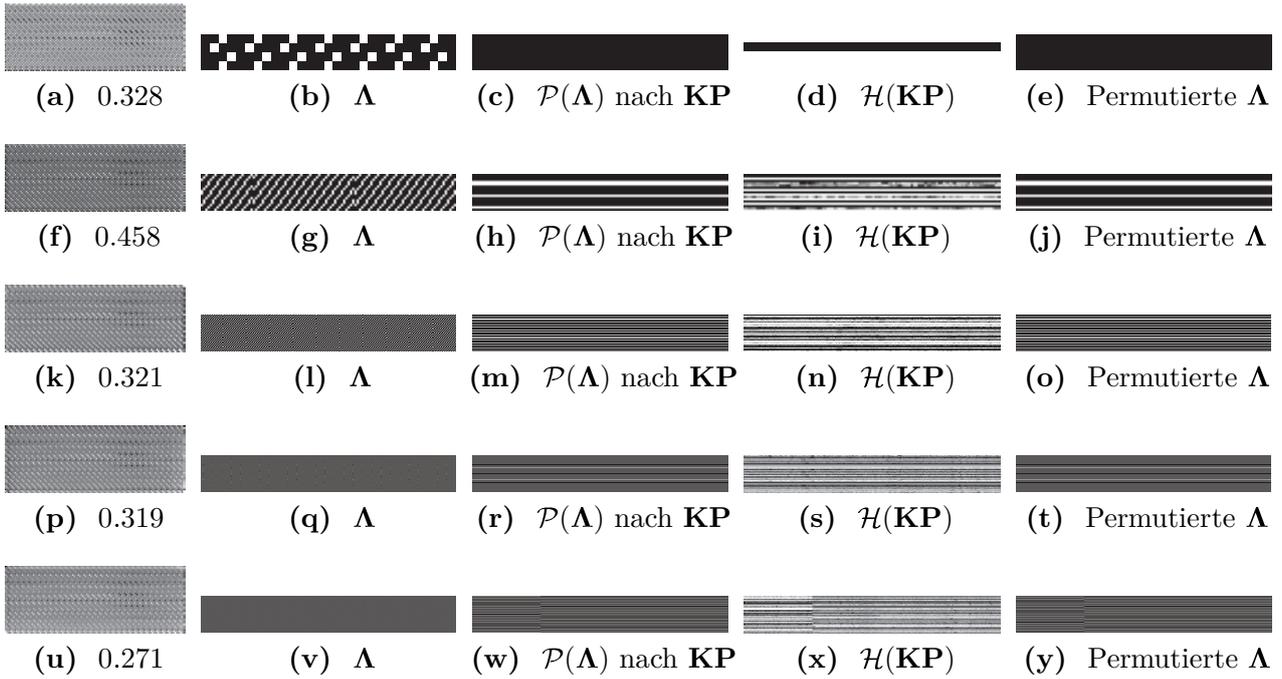
Für die initiale Analyse der Maskenstruktur werden zwei Iterationen  $I_{\max}$  mit jeweils zwei unabhängigen Permutationen  $N_P$  für die Rekonstruktion verwendet. Diese nicht optimierten Werte basieren auf Empfehlungen aus der Literatur [89] und experimentellen Erfahrungen mit den biomedizinischen Daten. Des Weiteren erfolgt eine Normierung der Daten auf den Wertebereich  $[0, 1]$ . Zudem ist die Dimension der Patches iterationsübergreifend identisch.

In Abb. 3.6 ist der Rekonstruktionsfehler in Abhängigkeit der Patchdimension  $R_M \times R_T$  für die verschiedenen Masken aus Abb. 3.5a bis 3.5d sowie einer Zufallsmaske  $\Omega_n$  für die Kompressionsgrade  $\{70\%, 85\%\}$  dargestellt. Sowohl die Entwürfe der Maske, bestehend aus einzelnen Linien  $\{\Omega_d, \Omega_i\}$ , als auch die Strukturen  $\Omega_u$ , welche formgleich zum Extraktionsausschnitt sind, führen zu einem näherungsweise konstanten Fehlerlevel. Im Gegensatz dazu weisen die Zufallsmaske  $\Omega_n$  und die diagonale Maske mit Quadraten in den Schnittpunkten  $\Omega_p$  ab einer quadratischen Mindestpatchgröße einen starken Fehlerabfall mit anschließendem Sättigungsverhalten auf. Um den Grund für diesen Effekt zu verstehen, ist der explizite Blick auf die individuelle Struktur der Maske  $\Omega$  sowie der extrahierten Repräsentanten und dessen Position in der Kollektionsmatrix  $\mathbf{K}$  in Abhängigkeit der Patchdimension erforderlich.

Zunächst ist allgemein festzuhalten, dass der Verlauf des Rekonstruktionsfehlers in Abb. 3.6, unabhängig von der Gestalt der Maske, erst für kleine Patchdimensionen abfällt und anschließend auf einem näherungsweise konstanten Niveau bleibt. In diesem Bereich haben die Patches eine so kleine Ausdehnung, dass regelmäßig Repräsentanten mit ausschließlich Nulleinträgen extrahiert werden. In Anlehnung an Abb. 3.5 liegt dieser Fall genau dann vor, wenn die Extraktionspatches geometrisch, überschneidungsfrei zwischen die unmaskierten Strukturen der Maske passen. Aufgrund der nicht vorhandenen Distanz werden diese sogenannten Nullrepräsentanten innerhalb der anschließenden Permutation nebeneinander angeordnet. Basierend auf dem TSP und der Implementierung der Distanzberechnung

$$\|(\boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\lambda}_j) \circ (\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_j)\|_2^2, \quad (3.3)$$

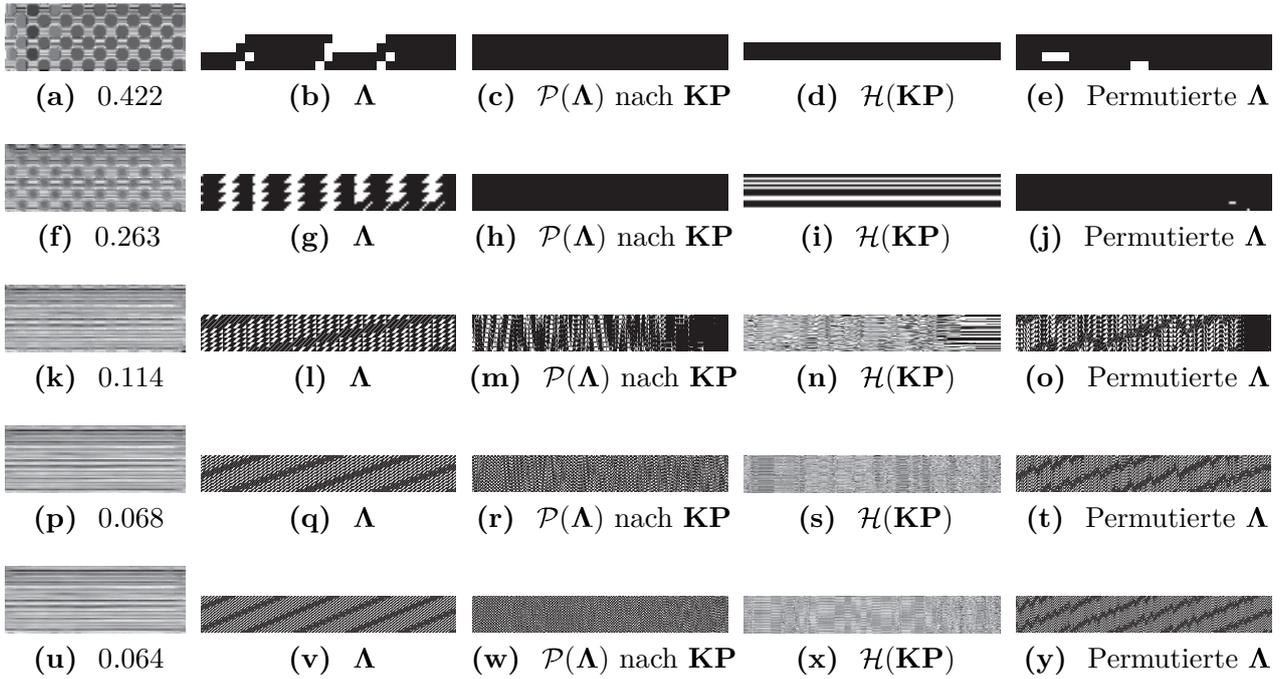
welche zusätzlich die Ähnlichkeit der extrahierten Repräsentanten aus der Maske  $\Omega$  berücksichtigt, werden alle Nullrepräsentanten als Block am Ende der Kollektionsmatrix  $\mathbf{K}$  positioniert. In der ersten Zeile ( $R_M = R_T = 2$ ) von Abb. 3.7 und 3.8 sind die letzten Maskenrepräsentanten  $\{\dots, \boldsymbol{\lambda}_{N_R-1}, \boldsymbol{\lambda}_{N_R}\}$  innerhalb der Maskenkollektionsmatrix  $\mathbf{\Lambda}$  (zweite Spalte) sowie der dazugehörigen permutierten Version  $\mathcal{P}(\mathbf{\Lambda})$  (dritte Spalte) visualisiert. Für die eingeführten Masken  $\Omega$  existieren in diesem Abschnitt der Kollektionsmatrix  $\mathbf{K}$  ausschließlich Nullrepräsentanten. Die anschließende 1D-Interpolation der Signale bzw. Teildarstellung ist, aufgrund der fehlenden Stützstellen, nicht in der Lage, den Datensatz adäquat zu rekonstruieren. Wie in der vierten Spalte ersichtlich, verbleiben einige Teildarstellungen, die aus Sequenzen von Nullen bestehen. Das dazuge-



**Abbildung 3.7:** Die erste Spalte zeigt das optische Rekonstruktionsergebnis der neurologischen Daten nach der Maskierung mit  $\Omega_d$  für die quadratischen Patchdimensionen  $R_M = R_T = \{2, 4, 8, 12, 14\}$  (Zeilen). In der zweiten bis vierten Spalte sind die letzten Repräsentanten aus der Maskenkollektionsmatrix  $\Lambda$  sowie der permutierten Version  $\mathcal{P}(\Lambda)$  basierend auf  $\mathcal{H}(\mathbf{KP})$  (vierte Spalte) visualisiert. Die letzte Spalte stellt das Resultat der Permutation hinsichtlich  $\Lambda$  dar.

hörige unzureichende Resultat der Inpaintingwiederherstellung ist in der ersten Spalte der jeweiligen Abbildung dargestellt. Mit der Vergrößerung der Patchdimension nimmt die Anzahl der Teildarstellungen zu. Dadurch wird die Rekonstruktion, aufgrund der gewichteten arithmetischen Mittelwertbildung, begünstigt. Des Weiteren lässt sich mit dem Erreichen der Patchgröße, welche die Extraktion von Nullrepräsentanten vermeidet, der abfallende Verlauf des Rekonstruktionsfehlers begründen.

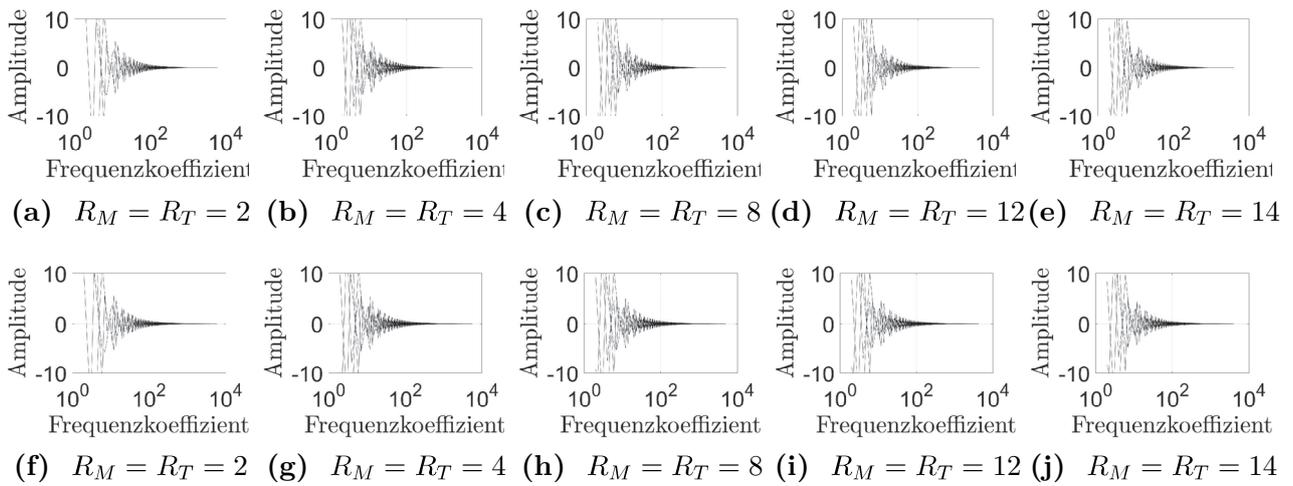
Im nächsten Schritt soll die Frage zur Abweichung hinsichtlich der Rekonstruktionsqualität bei Verwendung verschiedener Masken trotz der Vermeidung von Nullrepräsentanten beantwortet werden. Denn die Abb. 3.6 zeigt, dass nicht alle geometrischen Strukturen für das Design der Maske  $\Omega$  zur Kompression mit anschließender erfolgreicher Datenwiederherstellung in Frage kommen. Für die Erklärung soll die Struktur der Maske nachfolgend in drei Kategorien zugeordnet werden: zufällig ( $\Omega_n$ ) sowie einfach ( $\Omega_d, \Omega_i, \Omega_u$ ) und komplex periodisch ( $\Omega_p$ ). Selbsterklärend trifft diese Kategorisierung auch nach dem Extraktionsvorgang auf die jeweiligen Kollektionsmatrizen  $\mathbf{K}$  und  $\Lambda$  zu. Das Ziel der anschließenden Permutation und Interpolation der Repräsentanten ist die Generierung von regulären Teildarstellungen bzw. Signalen in  $\mathbf{K}$ . Willkürliche sowie komplex periodische Strukturen resultieren dabei in einer permutierten Anordnung von



**Abbildung 3.8:** Die erste Spalte zeigt das optische Rekonstruktionsergebnis der neurologischen Daten nach der Maskierung mit  $\Omega_p$  für die quadratischen Patchdimensionen  $R_M = R_T = \{2, 4, 8, 12, 14\}$  (Zeilen). In der zweiten bis vierten Spalte sind die letzten Repräsentanten aus der Maskenkollektionsmatrix  $\Lambda$  sowie der permutierten Version  $\mathcal{P}(\Lambda)$  basierend auf  $\mathcal{H}(\mathbf{KP})$  (vierte Spalte) visualisiert. Die letzte Spalte stellt das Resultat der Permutation hinsichtlich  $\Lambda$  dar.

Repräsentanten ohne erkennbare Regularität innerhalb der Maskenkollektionsmatrix  $\mathcal{P}(\Lambda)$  - Vergleich mit Abb. 3.8 (vierte und fünfte Zeile). Dadurch ist in jedem Abschnitt der permutierten Kollektionsmatrix ein optimales Fundament für die nachfolgende Spline-Interpolation der fehlenden Werte gelegt. Die vierte Spalte zeigt das Resultat der Interpolation der Teildarstellungen. Nach der Vermeidung der Nullrepräsentanten verbleiben keine Sequenzen aus Nullen oder Einsen innerhalb der Teildarstellungen. Ab dieser Patchdimension stellt sich nur noch eine geringe Abweichung zwischen der Approximation und den ursprünglichen Daten ein, wie in Abb. 3.6 zu sehen ist.

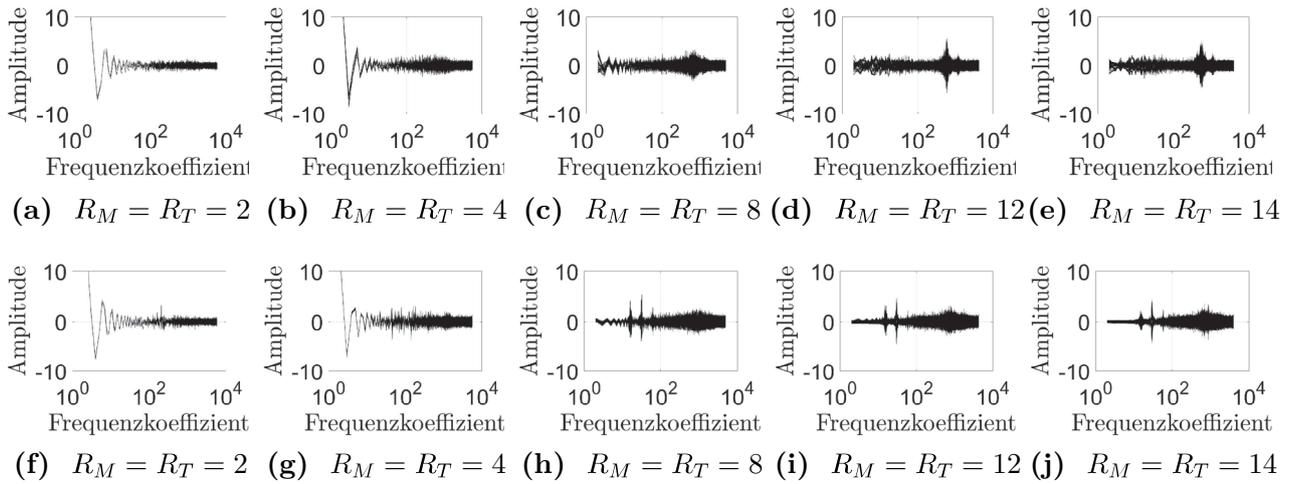
Im Gegensatz dazu erfolgt bei einfach periodischen Strukturen, wie in Abb. 3.7 (vierte und fünfte Zeile) dargestellt, die Ausbildung von stückweisen Verläufen aus Nullen oder Einsen in  $\mathcal{P}(\Lambda)$ . In den Abschnitten, bestehend aus langen Abfolgen von Nullen, fehlen die Stützstellen, um ein adäquates Ergebnis der Interpolation zu erreichen. Wie bereits in Abschnitt 2.4.2.1 eingeführt, müssen für die Spline-Interpolation verschiedene Eigenschaften eingehalten werden. Um die Stetigkeitsbedingung nicht zu verletzen, kann lediglich Null als Lösung der fehlenden Werte eingesetzt werden. Das interpolierte Ergebnis  $\mathcal{H}(\mathbf{KP})$ , welches nur geringfügig von  $\mathcal{P}(\Lambda)$  abweicht, ist in der vierten Spalte der Abb. 3.7 dargestellt.



**Abbildung 3.9:** Vergleich der Frequenzbereiche hinsichtlich der Teildarstellungen aus  $\mathcal{P}(\mathbf{\Lambda})$  basierend auf  $\mathbf{KP}$  (erste Zeile) sowie der unabhängigen Permutation von  $\mathbf{\Lambda}$  (zweite Zeile). Die Transformation erfolgt über die DCT unter Berücksichtigung der Maske  $\mathbf{\Omega}_d$  bei  $\eta = 70\%$ . Die Spalten geben die Repräsentantendimension  $R_M = R_T = \{2, 4, 8, 12, 14\}$  an.

Basierend auf dieser Erkenntnis erfolgt abschließend die Einführung einer Methode zur qualitativen Prüfung des Designs einer Maske  $\mathbf{\Omega}$  hinsichtlich der Rekonstruierbarkeit durch repräsentantenbasierte Inpaintingansätze, wie dem SOP-Algorithmus. In Zuge dessen dient die Maskenkollektionsmatrix  $\mathbf{\Lambda}$  als Grundlage. Aufgrund der Maskierung weisen die jeweiligen unabhängige Permutation von  $\mathbf{K}$ , in der ersten Iteration, und  $\mathbf{\Lambda}$  übergeordnet eine ähnliche Anordnungen der Repräsentanten auf - Vergleich der dritten und fünften Spalte in den Abb. 3.7 und 3.8. Die Präsenz von Teildarstellungen innerhalb der permutierten Kollektionsmatrizen, in denen stückweise Abschnitte existieren, die ausschließlich aus Nullen bestehen, führen zu unbrauchbaren Rekonstruktionen. Eine Maske ist genau dann für die repräsentantenbasierte Inpaintingrekonstruktion geeignet, wenn durch Vergrößerung von  $R_M \times R_T$  - nach der Vermeidung von Nullrepräsentanten - die Teildarstellungen die langen Abschnitte aus Nullen verlieren. Selbstverständlich kann diese Bedingung an die Signale in  $\mathbf{K}$  bzw.  $\mathbf{\Lambda}$  nicht visuell für jede Maske überprüft werden.

Folgerichtig wird in dieser Arbeit eine Methode vorgestellt, welche einen Vorschlag zur Mindestrepräsentantengröße  $R_M \times R_T$  und der damit einhergehenden Vermeidung von Folgen aus Nullen in den Teildarstellungen liefert. Die Grundlage dafür bildet eine Frequenzanalyse der Zeilen der Kollektionsmatrix. In Zuge dessen werden die stückweisen Abschnitte aus Nullen als niederfrequente Signale interpretiert und somit an entsprechender Stelle im Spektrum durch große Koeffizienten gekennzeichnet. Im Fall von geeigneten Masken nimmt die Dominanz dieser Koeffizienten mit Erhöhung der Dimension  $R_M \times R_T$ , und der damit einhergehenden Vermeidung von Nullrepräsentanten, ab. Diese Abnahme kann mit Hilfe verschiedener Ansätze algorithmisch identifiziert



**Abbildung 3.10:** Vergleich der Frequenzbereiche hinsichtlich der Teildarstellungen aus  $\mathcal{P}(\mathbf{\Lambda})$  basierend auf  $\mathbf{K}\mathbf{P}$  (erste Zeile) sowie der unabhängigen Permutation von  $\mathbf{\Lambda}$  (zweite Zeile). Die Transformation erfolgt über die DCT unter Berücksichtigung der Maske  $\mathbf{\Omega}_p$  bei  $\eta = 70\%$ . Die Spalten geben die Repräsentantendimension  $R_M = R_T = \{2, 4, 8, 12, 14\}$  an.

werden. Zwei Varianten könnten beispielsweise eine Filterung mit anschließender Leistungsdetektion oder Thresholding im relevanten Bereich sein.

In den Abb. 3.9 und 3.10 sind die Spektren der permutierten Maskenkollektionsmatrizen  $\mathbf{\Lambda}$  (erste Zeile), basierend auf der DCT aus Abschnitt 2.2.1, dargestellt. Allerdings ist die Anordnung der Repräsentanten der permutierten Maskenkollektionsmatrix geprägt durch das Ergebnis von  $\mathcal{P}(\mathbf{K})$ . Wie bereits erwähnt, weist eine unabhängige Permutation von  $\mathbf{\Lambda}$ , aufgrund des Einflusses der Maskierung in der ersten Iteration, eine adäquate Annäherung an die Anordnung der Repräsentanten nach  $\mathcal{P}(\mathbf{K})$  auf – wie der Abb. 3.9 und 3.10 zu entnehmen ist. Dementsprechend kann diese Ähnlichkeit als Grundlage für einen Ansatz, unabhängig vom Datensatz, zur Bewertung der Maske fungieren. Im Gegensatz zu  $\mathbf{\Omega}_d$  weisen geeignete Masken, wie in Abb. 3.10, nach sukzessiver Vergrößerung von  $R_M \times R_T$  eine Abnahme des niederfrequenten Anteils auf. Ist die Mindestrepräsentantengröße erreicht, bleiben die Koeffizienten im niederfrequenten Teil der permutierten Teildarstellungen von  $\mathbf{K}$  bzw.  $\mathbf{\Lambda}$  durchgängig klein. Die Ausbildung von dominanten Koeffizienten im hochfrequenten Bereich ist das Resultat einer periodischen Anordnung der Repräsentanten in den Kollektionsmatrizen. Der allgemeine Unterschied der Koeffizienten zwischen  $\mathcal{P}(\mathbf{\Lambda})$  basierend auf  $\mathcal{P}(\mathbf{K})$  und der unabhängigen Permutation von  $\mathbf{\Lambda}$  liegt in der Abfolge der Nichtnulleinträge begründet. Bei der letzten Variante fließen lediglich  $\{0, 1\}$  in die Berechnung ein. Wohingegen für  $\mathcal{P}(\mathbf{K})$  reelle Werte berücksichtigt werden, wodurch es zu Abweichungen in der Anordnung der Repräsentanten kommen kann. Diese Tatsache und die Verwendung von zufälligen

Startpatches für die Permutation resultieren zudem in einer Diskrepanz hinsichtlich der Position von dominanten Koeffizienten im hochfrequenten Bereich.

In dieser Arbeit wird zur Beurteilung der Tauglichkeit von Masken  $\Omega$  von nun an der eingeführte Ansatz verwendet. Dementsprechend erfolgt in den jeweiligen Abschnitten lediglich die Vorstellung der eingesetzten Maske. Auf eine detaillierte Prüfung der Maske, basierend auf diesem Ansatz, wird nachfolgend aus Gründen der Übersicht verzichtet.

### 3.3.2.2 Algorithmische Freiheitsgrade des SOP

An dieser Stelle soll, motiviert durch die Darstellung einiger Teilergebnisse, der Übergang vom struktur- zum repräsentantenbasierten Inpainting erfolgen. Die Wiederherstellungsqualität aus Tab. 3.3 basiert auf den eingeführten nicht optimierten SOP-Parametern sowie der – für die Elektrodensteuerung geeignete – Maske  $\Omega_p$ . Bereits in diesem Zustand ist der SOP anderen asymmetrischen Ansätzen wie dem strukturbasierten Inpainting oder CS, hinsichtlich der Bewertungskriterien aus Abschnitt 2.1, überlegen. Deshalb und aus Gründen der Übersicht fließen die letztgenannten Verfahren nicht weiter in die Diskussion des NMS-Entwurfs zur Verarbeitung neurologischer Daten ein. Anhand der klassischen Verfahren wie JPEG und JPEG2000, welche auf Kompression ausgelegt sind, erfolgt die Zielsetzung der Rekonstruktionsgüte des IDM-Ansatzes. Dahingehend soll das repräsentantenbasierte Inpainting, umgesetzt durch den SOP, optimiert und verglichen werden.

**Tabelle 3.3:** Vergleich von asymmetrischen Ansätzen für die Datenkompression, patch-basiertes Inpainting und CS, zur Realisierung eines NMS [105]. Die Auswertung beinhaltet die Rekonstruktionsgüte NMSE und den Kompressionsgrad  $\eta$ . Der SOP besteht aus zwei Iterationen mit jeweils zwei Permutationen. Die Dimension der Extraktionspatches ist  $R_M \times R_T = 17 \times 17$ .

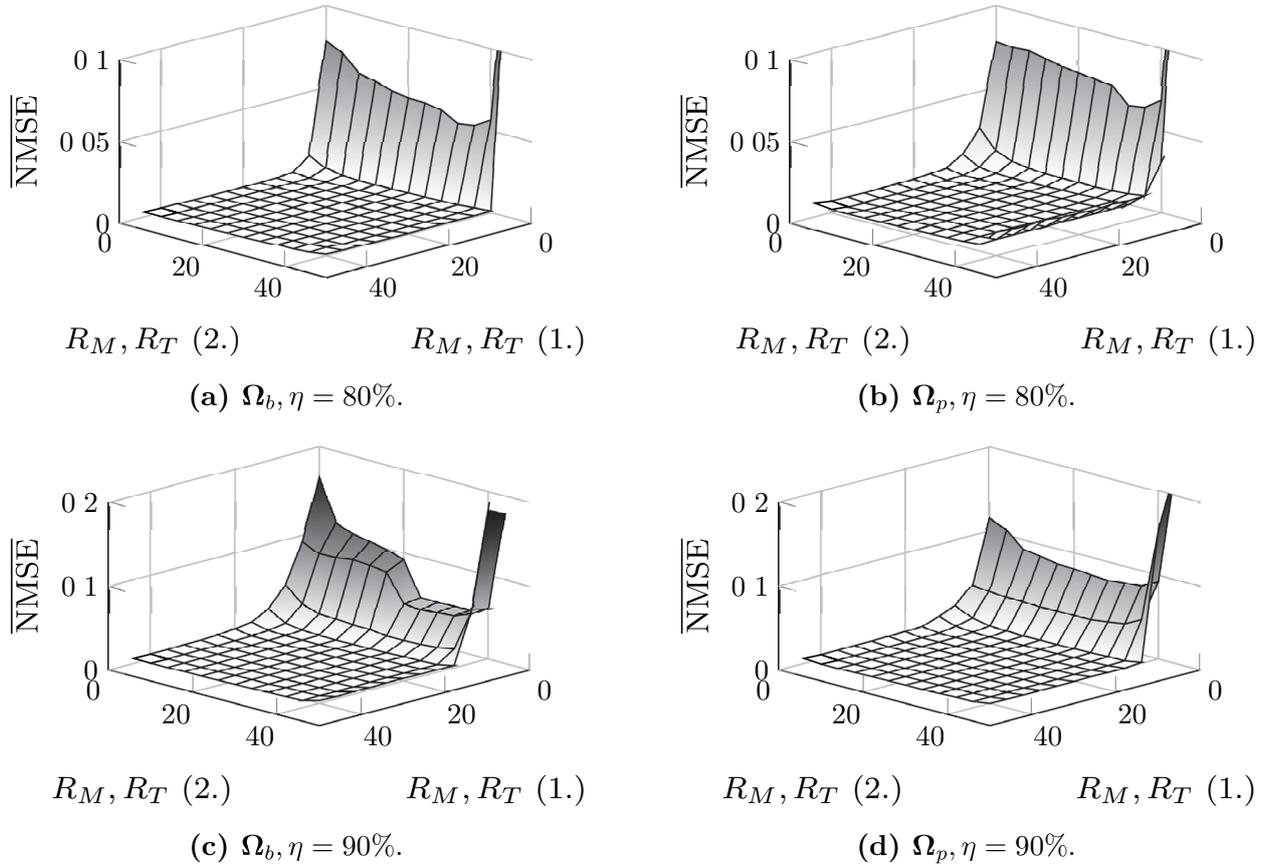
Verfahren	$\overline{\text{NMSE}}$	Kompression	Berechnungsverteilung
IDM, SBI ( $\Omega_u$ )	$0.079 \pm 0.014$	52%	asymmetrisch
IDM, SBI ( $\Omega_o$ )	$0.078 \pm 0.012$	62%	asymmetrisch
IDM, SOP ( $\Omega_p$ )	$0.035 \pm 0.008$	70%	asymmetrisch
CS ( $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{39 \times 128}$ )	$0.343 \pm 0.105$	70%	asymmetrisch
IDM, SOP ( $\Omega_p$ )	$0.036 \pm 0.007$	81%	asymmetrisch
CS ( $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{24 \times 128}$ )	$0.550 \pm 0.099$	81%	asymmetrisch
IDM, SOP ( $\Omega_p$ )	$0.038 \pm 0.009$	88%	asymmetrisch
CS ( $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{16 \times 128}$ )	$0.747 \pm 0.094$	88%	asymmetrisch
JPEG	$0.133 \pm 0.019$	88%	symmetrisch
JPEG2000	$0.034 \pm 0.005$	88%	symmetrisch

Zudem fließen, als Konsequenz der bisherigen Erkenntnisse, neben  $\Omega_n$  und  $\Omega_p$  zwei weitere Masken in die nachfolgenden Untersuchungen der algorithmischen Freiheitsgrade ein. Aufgrund der unvoreilhaften Kondition werden die Masken  $\Omega_u$ ,  $\Omega_i$  und  $\Omega_d$  für die Analyse des SOP-Algorithmus verworfen. Die komplex periodischen Strukturen der Masken  $\Omega_b$  und  $\Omega_a$  aus Abb. 3.5e und 3.5f wurden in Anlehnung der aufgestellten Kriterien aus Abschnitt 3.3.2.1 entworfen. Aus Gründen der Übersicht erfolgt die Darstellung und Diskussion der Simulationsergebnisse lediglich für die Maskierungen  $\Omega_p$  und  $\Omega_b$ . Alle restlichen Plots befinden sich im Anhang im Abschnitt A.3. Die Dimension der quadratischen überlappenden Patches  $R_M \times R_T$  im Extraktionsprozess  $\mathcal{E}(\cdot)$  bildet den Beginn der Untersuchung, wobei die Anzahl der Permutationen  $N_P$  festgesetzt wird. Die willkürliche Wahl von  $N_P$  ist unbedenklich für die Analyse der Patchdimension, da die parallelen und unabhängigen Permutationen als arithmetische Mittelung dienen. Dadurch fließen potentielle Ausreißer, beispielsweise durch eine unvoreilhafte Wahl des zufälligen Startpatches, mit einem geringeren Gewicht in die Rekonstruktion ein. Betrachtet wird für die jeweiligen Parameter lediglich die erste (1.) und zweite Iteration (2.) des SOP-Algorithmus.

**Dimension der Patches** In den Abb. 3.11 sind jeweils die Rekonstruktionsfehler  $\overline{\text{NMSE}}$  als Funktion der Patchdimension  $R_M \times R_T$  bei einer Kompression von  $\eta = \{80\%, 90\%\}$  dargestellt. Hierfür wurde die Anzahl der unabhängigen Permutationen  $N_P$  zunächst in beiden Iterationen auf zehn festgelegt. Innerhalb der ersten Iteration ist ein deutlicher Abfall des Fehlers bei einer zunehmenden quadratischen Patchdimension zu beobachten. Danach wird ein Plateau erreicht, dessen Beginn individuell mit dem Grad der Kompression und Art der Maske variiert. Dieser Fehlerverlauf ist primär das Resultat der unvoreilhafte Distanzberechnungen während des SOP-Sortiervorgangs, angelehnt an Gl. (2.102) (TSP). Aufgrund der Maske dominieren die Nulleinträge in der ersten Iteration, was bei gleichzeitiger Verwendung von kleinen Patchdimensionen zu einer schlecht konditionierten Permutation als Vorbereitung für die Interpolation führt. Die geringe Anzahl der Werte in einem Patch  $R = R_M R_T$  verkleinert deutlich die Vielfalt der von Null verschiedenen Distanzberechnungen bei der Suche nach einem passenden Referenzpatch. Dadurch fließen viele Patches unvoreilhaft in die Permutation ein und reduzieren damit die Qualität der Approximation.

Neben der Wahl einer Mindestpatchgröße in der ersten SOP-Iteration ist die Frage einer oberen Grenze interessant. Aus den Ergebnissen der Abb. 3.11 lassen sich dafür keine Merkmale ableiten. Dies gilt auch für die allgemeine Patchdimension in der zweiten Iteration unter Berücksichtigung der Mindestgröße.

Im Hinblick auf eine potentielle Optimierung des Rekonstruktionsprozesses ist es sinnvoll, neben der Güte auch die Rekonstruktionszeit als weiteres Kriterium zu betrachten. Die Rekonstruktionsqualität behält trotzdem in dieser Arbeit eine höhere Priorität als die Berechnungszeit. Der Berechnungsaufwand  $\mathcal{B}$ , welcher mit der Wiederherstellungszeit korreliert und in Abschnitt 2.1.3 eingeführt wurde, ist nachfolgend in Form



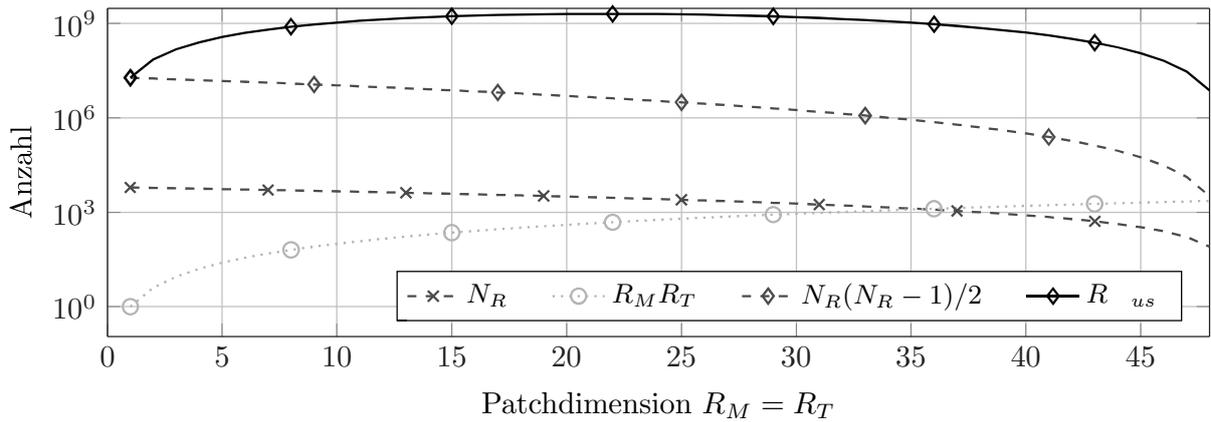
**Abbildung 3.11:** NMSE-Untersuchung hinsichtlich der Patchdimension  $R_M \times R_T$  für die erste (1.) und zweite Iteration (2.) im SOP. Dargestellt sind die Masken  $\Omega_p$  und  $\Omega_b$  für die Kompressionsgerade  $\{80\%, 90\%\}$ . Es wurden jeweils zehn Permutationen verwendet.

der auftretenden Distanzberechnungen zwischen den Repräsentanten zu analysieren. Diesbezüglich besitzt der SOP-Algorithmus die größte Berechnungskomplexität im Permutationsprozess [89]. Bei einem nicht eingeschränkten Aufbau der Permutation geht dies mit

$$\frac{N_R(N_R-1)}{2} = \frac{(MN-R_M+1)(T-R_T+1)((MN-R_M+1)(T-R_T+1)-1)}{2} \quad (3.4)$$

Distanzbestimmungen der insgesamt  $N_R$  Patches der Kollektionsmatrix  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{R \times N_R}$  einher. Hierbei handelt es sich um die Gaußformel [11]. Ein einmal ausgewählter Patch mit minimaler Distanz zur Referenz gehört nachfolgend nicht mehr zur Berechnungsauswahl. Für jeden betrachteten Patch muss allerdings die Distanz zu allen verbleibenden Patches aus  $\mathbf{K}$  mit jeweils  $R$  Multiplikationen bestimmt werden. Die Anzahl der Distanzberechnungen im gesamten unbeschränkten Permutationsprozess

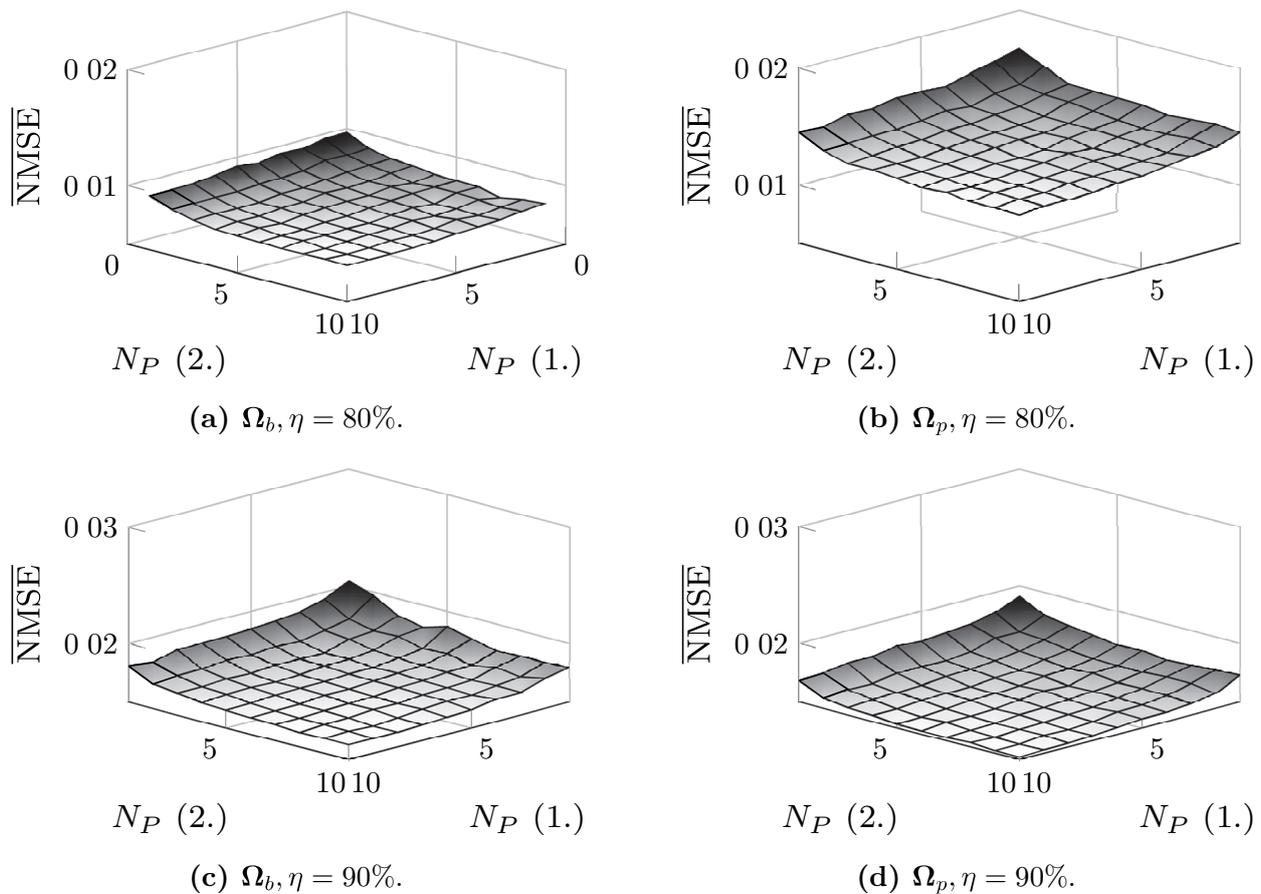
$$\mathcal{B}_{us} = \frac{N_R(N_R-1)}{2} \quad (3.5)$$



**Abbildung 3.12:** Analyse des Berechnungsaufwandes in der SOP-Permutation ohne Einschränkung des Suchbereiches. Unter Berücksichtigung des  $6 \times 8$ -MEA zur Aufnahme der neurologischen Aktivität wird in Abhängigkeit der quadratischen Patchgröße die Anzahl aller Distanzberechnungen  $N_R(N_R - 1)/2$  für eine Sortierung, die dabei anfallenden Multiplikationen  $R = R_M R_T$  sowie die Anzahl der extrahierten Patches untersucht. Daraus lässt sich die Anzahl der Multiplikationen  $R \mathcal{B}_{us}$  mit anschließender Quadrierung für eine SOP-Permutation ableiten.

ist in Abb. 3.12 als Funktion der Patchdimension aufgetragen. Der kombinatorische Berechnungsaufwand aus Gl. (3.5) geht mit einer Berechnungskomplexität von  $\mathcal{O}((MNT)^2)$  einher. Zur Reduktion des Berechnungsaufwandes eignen sich extreme Patchgrößen, d.h. entweder sehr große oder sehr kleine überlappende Extraktionsausschnitte. Im Gegensatz dazu ist der Bereich von Dimensionen  $R_T = R_M$ , welche am Maximum von  $\mathcal{B}_{us}(R_T)$  positioniert sind, zu vermeiden. Unter Berücksichtigung der Mindestpatchgröße in der ersten SOP-Iteration sind daher sehr große überlappende Repräsentanten effizient hinsichtlich des Berechnungsaufwandes und der Rekonstruktionsgüte.

In der zweiten Iteration muss die Betrachtung leicht angepasst werden, da die maskenbedingten Nulleinträge in  $\mathbf{A}_\Omega$  nicht mehr existieren. Damit entfällt die oben erwähnte Einschränkung hinsichtlich der Vielfalt durch die Anzahl der Einträge  $R$ . Dementsprechend gehen alle  $N_R$  Repräsentanten vollwertig, da die Distanzen zwischen den Patches ungleich Null sind, in die Permutationsbestimmung ein. Es ist daher für eine optimale Sortierung dienlich, eine große Vielfalt an unterschiedlichen Patches in die Berechnung einzubeziehen. Das bedeutet, dass  $N_R$  groß sein sollte. Der daraus entstehende Trade-Off zwischen Komplexität, Güte und Auswahlvielfalt resultiert in eine Entwurfsempfehlung von tendenziell kleineren Patchdimension in der zweiten SOP-Iteration. Diese Ergebnisse decken sich ebenfalls mit den Angaben aus der Literatur [89]. Zusammenfassend ist der Einsatz von großen Extraktionsausschnitten in der ersten Iteration für die initiale Approximation der Nulleinträge durch die Rekonstruktion von Makroinformationen zu empfehlen. In den nachfolgenden Iterationen sollte die Wiederherstellung von Detailin-



**Abbildung 3.13:** NMSE-Untersuchung hinsichtlich der Anzahl der Permutationen  $N_P$  für die erste (1.) und zweite Iteration (2.) im SOP. Dargestellt sind die Masken  $\Omega_p$  und  $\Omega_b$  für die Kompressionsgerade  $\{80\%, 90\%\}$ . Die Patchgröße  $R_M \times R_T$  beträgt  $48 \times 48$  bzw.  $8 \times 8$ .

formationen auf kleinen Patches basieren, was zu einer qualitativ hochwertigen Vielfalt im Permutationsprozess führt.

**Anzahl der parallelen Permutationen** Nach der Einführung von Richtlinien für die Dimension des überlappenden Extraktionsausschnittes, soll daran anknüpfend die Frage nach der Anzahl der parallelen Permutationen  $N_P$  erörtert werden. Basierend auf den vorgestellten Ergebnissen wurden die Patchgrößen  $R_M \times R_T$  für die Simulationen auf  $48 \times 48$  und  $8 \times 8$  für die erste und zweite Iteration festgelegt. In den Abb. 3.13 sind jeweils die Rekonstruktionsfehler  $\overline{\text{NMSE}}$  als Funktion der Permutationsanzahl für  $\Omega_p$  und  $\Omega_b$  mit einem Kompressionsgrad von  $\eta = \{80\%, 90\%\}$  dargestellt. Im Gegensatz zur Patchdimension ist in dieser Analyse ein Sättigungsverhalten nach dem anfänglichem Abfall des Fehlers für beide Iterationen zu verzeichnen. Allerdings ist der positive Beitrag hinsichtlich der Rekonstruktionsgüte deutlich ausgeprägter für eine höhere Anzahl von Permutationen in der zweiten Iteration. Ab  $N_P > 10$  stellt sich jeweils nur noch eine geringe Verbesserung der Qualität ein. Um einen effizienten

Trade-Off zwischen Berechnungsaufwand und Rekonstruktionsgüte zu erzielen, fließen in die arithmetische Mittelwertbildung der SOP-Datenwiederherstellung aus Gl. (2.104) jeweils zehn unabhängige Permutationen ein.

**Interpolation der Teildarstellungen** Die Art der 1D-Interpolation im SOP-Ansatz wird von der Literatur [89] für Bilddaten durch die Implementierung von kubischen Splines vorgegeben. An dieser Stelle der Arbeit ist zu analysieren, ob diese Empfehlung auch für maskierte neurologische Daten Gültigkeit hat oder der Einsatz einer anderen Interpolationsart vorteilhafter ist. Dementsprechend erfolgt ein Vergleich von drei verschiedenen Interpolationsvarianten: linear, nearest und Spline. Die lineare Interpolation verbindet die Werte benachbarter Punkte in jede betreffende Richtung als Geradenfunktion miteinander. Bei der sogenannten Nearest-Neighbor Interpolation wird der Wert des Nachbarn mit der minimalen Distanz angenommen, sodass ein stückweise konstante Interpolation entsteht. Eine ausführliche Beschreibung der Spline-Interpolation ist im Abschnitt 2.4.2.1 zu finden. Die nachfolgende SOP-Rekonstruktionen basieren auf den bisher festgelegten algorithmischen Parametern.

Die Tab. 3.4 stellt den Wiederherstellungsfehler  $\overline{\text{NMSE}}$  als Funktion der Interpolationsart sowie der Kompressionsstufe für die drei praktikablen Masken  $\{\Omega_a, \Omega_b, \Omega_p\}$  dar. Unabhängig von der Maske oder der Höhe der Kompression erzielt die Spline-Interpolation die geringsten Fehlerwerte. Aus dieser Untersuchung resultierend werden im Verlauf der Arbeit zur 1D-Interpolation der Teildarstellung in den verschiedenen SOP-Varianten kubische Splines zur Verarbeitung von neurologischen Signalen eingesetzt.

Unabhängig von der Qualität ist ein Kritikpunkt an der SOP-Rekonstruktion die benötigte Berechnungsdauer. Der Vorteil bei der einfachen Datenerfassung durch die Maske wird quasi zu Lasten der Rekonstruktion erkaufte. Dementsprechend weist die Datenwiederherstellung einen hohen Grad an Komplexität auf, was – ohne jegliche Einschränkung – zu einer unpraktikablen Berechnungsdauer führen kann. Diese Kritik wird ebenfalls in der Literatur [89] benannt und soll nachfolgend durch geeignete algorithmische Anpassungen im Permutationsprozess des Algorithmus optimiert werden. Eine Auflage

**Tabelle 3.4:** Gegenüberstellung verschiedener Interpolationsarten für die SOP-Rekonstruktion von neurologischen Daten. Die  $\overline{\text{NMSE}}$ -Ergebnisse für die hohe Kompression wurden durch drei verschiedene Masken realisiert.

Interpolation	$\Omega_a$		$\Omega_b$		$\Omega_p$	
	80%	90%	80%	90%	80%	90%
Linear	0.026	0.038	0.021	0.035	0.030	0.035
Nearest	0.026	0.037	0.020	0.033	0.030	0.034
Spline	0.022	0.036	0.017	0.030	0.026	0.032

an die algorithmische Beschleunigung hinsichtlich der Patchzuordnung innerhalb der Umsortierung ist, dass die Rekonstruktionsgüte näherungsweise unverändert bleibt.

### 3.3.3 Beschleunigung durch algorithmische Anpassung

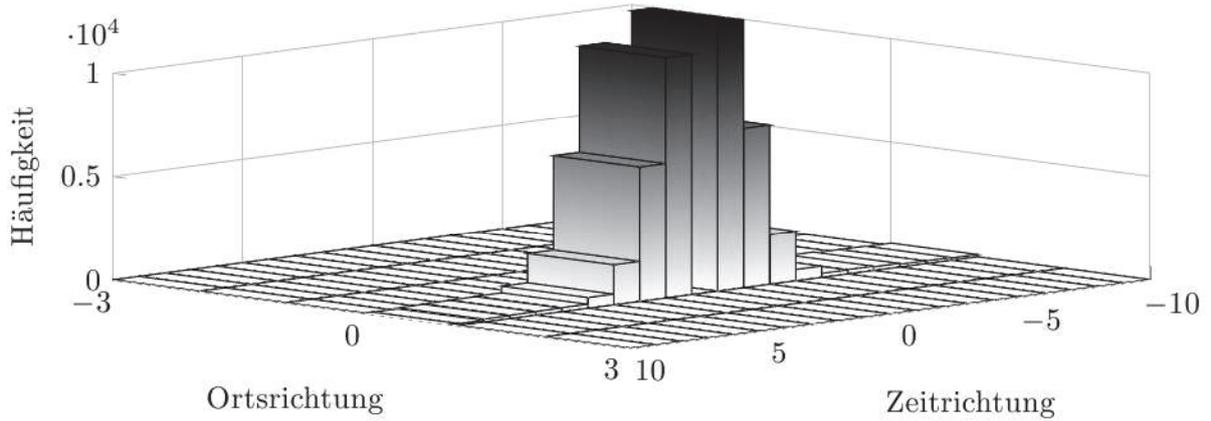
In diesem Abschnitt erfolgt die Einführung algorithmischer Anpassungen zur Beschleunigung der SOP-Permutationsbestimmung. Hier werden zwei Umsetzungen vorgestellt. Im ersten Teil werden die Signaleigenschaften der neurologischen Daten für eine Suchbereichseinschränkung während der Distanzberechnung zwischen den Repräsentanten ausgenutzt. Und im zweiten Teil wird ein randomisierter Clusteringansatz in den Permutationsprozess implementiert.

Die Rekonstruktionsergebnisse in dieser Arbeit wurden auf verschiedenen Computern mit unterschiedlicher Hardwarezusammensetzung erzeugt. Da der Einfluss der verwendeten Computerhardware u.a. auf die absolute Dauer der Berechnung in Zeiteinheiten zu groß ist, muss ein unabhängiges Bewertungskriterium für die algorithmische Beschleunigung eingesetzt werden. Aus diesem Grund erfolgt die Bewertung in den nachfolgenden Untersuchungen anhand des Zeitverhältnisses aus betrachtetem neuen Suchansatz und einer unbeschränkten Suche nach geeigneten Patches für die SOP-Permutation.

#### 3.3.3.1 Ausnutzung der Signaleigenschaften

Das Problem der hohen Berechnungsdauer für die SOP-Permutation wird in der Literatur im Bereich der Bildverarbeitung ebenfalls benannt [29, 89, 31]. Ein weitverbreiteter Ansatz, basierend auf dem Vorhandensein von ähnlichen Strukturen in der gleichen örtlichen Umgebung in klassischen Bildern, ist die Implementierung einer eingeschränkten Suche. Dabei fließen lediglich Repräsentanten in die Distanzbestimmung ein, welche sich in einem definierten Bereich mit Ausdehnung  $\{S_m, S_n\}$  um den Referenzpatch befinden. Die Eigenschaften des LFP-Datensatzes zeichnen sich durch relativ niederfrequente Aktivität und partieller (optischer) Struktur aufgrund von Signalkorrelation zwischen den Elektroden aus. Dementsprechend gilt es zu überprüfen, ob eine Suchbereichseinschränkung auch für extrahierte Patches aus der neurologischen Aktivität einsetzbar ist.

Zur Beantwortung dieser Fragestellung erfolgt eine Analyse der räumlichen Position von Repräsentanten mit minimaler Distanz unter Berücksichtigung eines unmaskierten neurologischen Datensatzes. In Abb. 3.14 ist die statistische Häufigkeit als Funktion der Koordinaten, Ort und Zeit, für Patches mit minimaler Distanz aufgetragen. Die Ortsrichtung spiegelt die verschiedenen Elektroden wider. Während die Zeitrichtung unterschiedliche Zeitpunkte bei gleicher Konstellation der Elektroden angibt. Das Histogramm zeigt deutlich, dass geeignete Repräsentanten priorisiert entlang des Zeitverlaufes gleicher Elektroden identifiziert werden. Hierbei nimmt die Häufigkeit signifikant mit Erhöhung der zeitlichen Entfernung ab. Die dominante Vorzugsrichtung ist begründet im niederfrequenten Signalverhalten der LFP. Eine schwache zeitliche Signaländerung



**Abbildung 3.14:** Histogramm über die Position der Repräsentanten mit minimaler Distanz zum Referenzpatch in unmaskierten neurologischen Daten [108]. Die  $R_M \times R_T$  Patchgröße beträgt  $8 \times 8$ .

weist demnach höhere Korrelationen zwischen zwei benachbarten Patches auf als die Verschiebung des Extraktionsausschnittes um eine Elektrode.

**Priorisierte Suche entlang gleicher Elektroden** Als Schlussfolgerung der abgeleiteten Erkenntnisse aus Abb. 3.14 erfolgt die Implementierung und Untersuchung einer Suchtechnik, welche priorisiert Repräsentanten entlang der Zeitrichtung der gleichen Elektrodenkonstellation für die Permutation berücksichtigt. Nachdem alle Repräsentanten einer gleichen Elektrodenkonstellation zugeordnet sind, erfolgt eine unbeschränkte Suche. Der Patch mit der minimalen Distanz aus den verbleibenden Repräsentanten definiert die neue, zu erschöpfende, Elektrodenkonstellation. Die daraus resultierende Anzahl der Distanzberechnungen reduziert den kombinatorischen Berechnungsaufwand aus Gl. (3.4) zu

$$\mathcal{B}_{ec} = \frac{N_R}{2} (MN + T - 2R_T), \quad (3.6)$$

mit  $R_M = R_T$  und  $T > MN$ , wobei dadurch für die algorithmische Komplexität dieses Ansatzes  $\mathcal{O}(MNT^2)$  gilt. Eine detaillierte Herleitung des Ausdrucks (3.6) befindet sich im Anhang A.1.1. Die beschriebene Suchbereichsbeschränkung ist dann ein wirksamer Ansatz, wenn im Datensatz eine Koordinatenrichtung existiert, die zum einen deutlich höhere Signalähnlichkeit aufweist und diese zum anderen lediglich lokal auftritt.

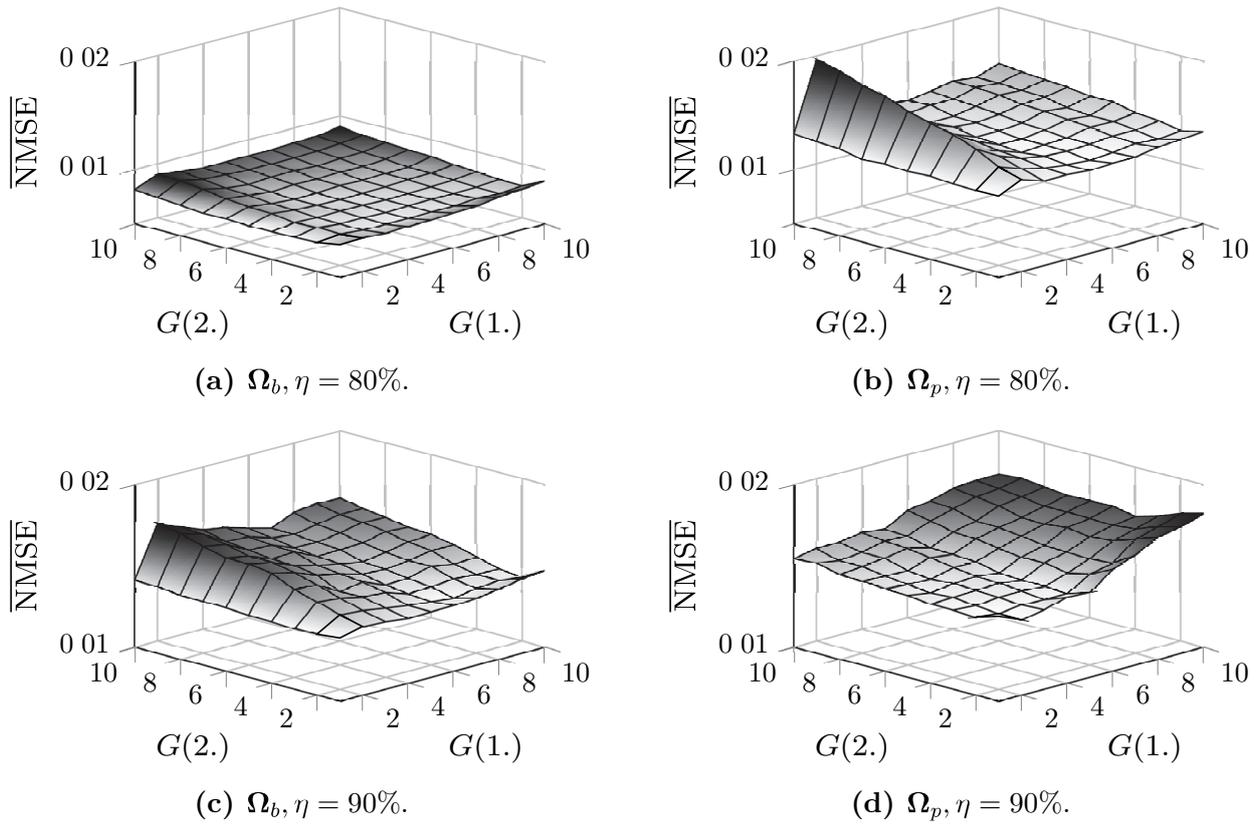
**Anordnung zu Repräsentantengruppen** Ein weiterer Ansatz in dieser Arbeit zur Beschleunigung der Bestimmung der SOP-Permutation basiert auf der Zuordnung der extrahierten Repräsentanten in  $\lceil (N_R - 1)/G \rceil$  Gruppen, wobei  $G$  die Gruppengröße kennzeichnet. In der ursprünglichen Implementierung fließt lediglich der Repräsentant mit der minimalen Distanz in die Permutation ein. Allerdings existieren viele Repräsentanten, die ebenfalls sehr ähnlich zur Referenz sind, aber numerisch eine geringfügig höhere

Abweichung besitzen. Dementsprechend ist die Implementierung von Patchgruppen zur Beschleunigung der SOP-Permutationsbestimmung ein vielversprechender Ansatz. Für die Suche nach dem geeigneten Patch innerhalb der Permutation liegen ohnehin die berechneten Distanzen zwischen Referenz und allen weiteren Repräsentanten vor. Für den neuen Ansatz werden, anstatt des Patches mit der minimalen Distanz, direkt die  $G$  Repräsentanten mit den kleinsten Distanzen ausgewählt. Natürlich inkludiert dies auch den optimalen Patch. Die Platzierung in der Gruppe erfolgt in einer aufsteigenden Reihenfolge hinsichtlich der Distanzen. Der letzte Gruppenteilnehmer agiert dann als Referenz für die nachfolgende unbeschränkte Suche. Dadurch lässt sich ein kombinatorischer Berechnungsaufwand von

$$\mathcal{B}_{gp} = \left\lceil \frac{N_R - 1}{G} \right\rceil \left( N_R - 1 + \frac{G}{2} \left( \left\lceil \frac{N_R - 1}{G} \right\rceil + 1 \right) \right) \quad (3.7)$$

abschätzen. Im Anhang A.1.2 ist eine Beschreibung des eingeführten Ausdrucks zu finden. Mit  $\mathcal{O}\left(\left\lceil \frac{MNT}{G} \right\rceil MNT\right)$  kann für (3.7) konservativ eine Berechnungskomplexität angegeben werden. Selbstverständlich hängt die Güte dieses Ansatzes – hinsichtlich der Rekonstruktionsqualität sowie Beschleunigung – von der Gruppengröße ab. Kleine Gruppen führen nur zu einer geringen Reduktion des Berechnungsaufwands. Wohingegen große Gruppen, aufgrund der stärker abweichenden Ähnlichkeit der letzten Gruppenmitglieder, zu schlecht konditionierten Permutationen führen können. Damit ist die benachbarte Anordnung von schwach korrelierten Repräsentanten sowie Repräsentanten, die überwiegend bzw. ausschließlich Nulleinträge besitzen, gemeint.

Dementsprechend ist in Abb. 3.15 die Rekonstruktionsgenauigkeit als Funktion der Gruppengröße  $\{G_1, G_2\}$  für die jeweilige SOP-Iterationen dargestellt. Die Untersuchung beinhaltet wieder die Masken  $\Omega_p$  und  $\Omega_b$  für einen Kompressionsgrad von 90%. In Anlehnung an die Ergebnisse des vorherigen Abschnittes beträgt die quadratische Dimension der überlappenden Patches  $48 \times 48$  in der ersten und  $8 \times 8$  in der zweiten Iteration. Zusätzlich wird für die erste Iteration die Patchgröße  $32 \times 32$  betrachtet. Dies dient der Erhöhung der Aussagekraft der Untersuchung, da  $48 \times 48$  die maximale Patchausdehnung ist und somit nur Gruppen entlang der Elektrodenrichtung gebildet werden. Alle weiteren Plots sind im Anhang A.3.2 zu finden. Unglücklicherweise können aus den Untersuchungsergebnissen keine einheitlichen Vorgaben an die Gruppengröße abgeleitet werden. Wird die Betrachtung allerdings primär auf zwei Faktoren konzentriert, ist eine tendenzielle Designempfehlung formulierbar. Dazu gehört zum einen die Beschränkung auf die Masken, welche für die NMS-Realisierung praktikabel sind, also ohne  $\Omega_n$ . Und zum anderen sollte der Berechnungsaufwand durch die Anzahl der extrahierten Repräsentanten  $N_R$  aus Abb. 3.12 berücksichtigt werden, da diese – unabhängig von einer Gruppenbildung – ein Indikator für die Berechnungsdauer angibt. Die große Dimension der Patches, in der ersten Iteration, resultieren in einer geringen Anzahl selbiger, was zu einer schnellen Permutationsbestimmung, aber auch geringen Vielfalt, führt. Die Vielfalt an Repräsentanten wird dann noch weiter durch die Bil-



**Abbildung 3.15:** Untersuchung der Gruppengröße  $G$  für die 1. und 2. Iteration im SOP für die Masken  $\Omega_b$  und  $\Omega_p$ . Die Patchgröße beträgt  $32 \times 32$  bzw.  $48 \times 48$  in der ersten und  $8 \times 8$  in der zweiten Iteration. Es wurden jeweils zehn Permutationen verwendet.

derung von Gruppen eingeschränkt. Dementsprechend ist  $G_1$  klein zu wählen. Genau der umgekehrte Fall tritt in der zweiten Iteration auf. Aufgrund der kleineren Patchdimension existiert eine viel größere Anzahl verschiedener Repräsentanten, sodass ein Zusammenschluss von Patches in Gruppen eine Reduktion der Berechnungszeit bewirken kann. Wie in Abb. 3.15 dargestellt, geht dies in der zweiten Iteration ohne einen signifikanten Verlust der Güte einher.

**Repräsentantengruppen entlang gleicher Elektroden** Des Weiteren wird die Kombination der beiden eingeführten Beschleunigungsansätze für die Permutationsbestimmung in die Untersuchung aufgenommen. Das bedeutet, dass priorisiert Patches entlang der Zeitrichtung mit gleicher Elektrodenkonstellation in Gruppen zusammengeschlossen werden.

$$\mathcal{B}_{gc} = N_R \frac{MN - R_M}{2} + \left( \left\lceil \frac{T - R_T}{G} \right\rceil - 1 \right) \left( (N_R - 1) - \frac{G}{2} \left\lceil \frac{T - R_T}{G} \right\rceil \right). \quad (3.8)$$

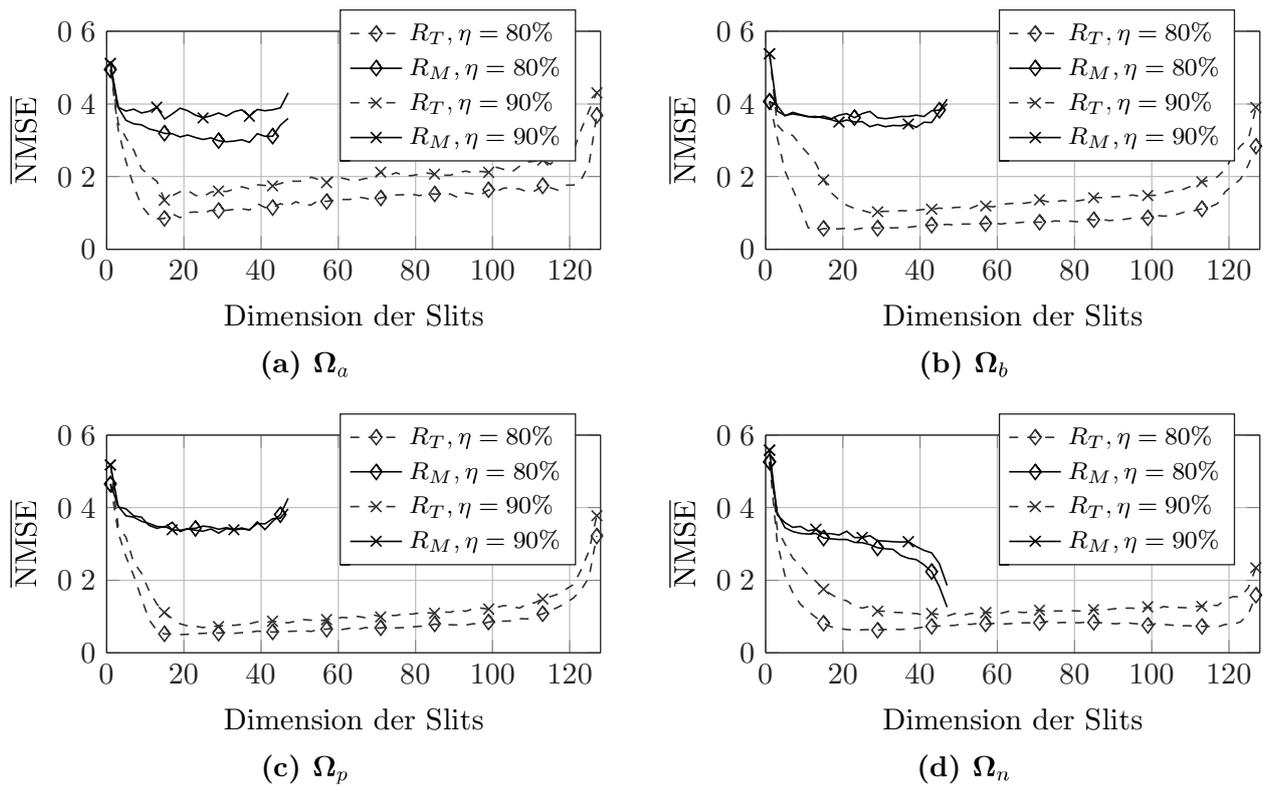
Eine detaillierte Herleitung des Berechnungsaufwandes der Gl. (3.8) ist im Anhang A.1.2 aufbereitet. Die damit einhergehende Berechnungskomplexität beläuft sich auf die konservative Abschätzung von  $\mathcal{O}\left(\left\lceil \frac{T-R_T}{G} \right\rceil MNT\right)$ .

In der Tab. 3.5 erfolgt ein Vergleich der vorgestellten Ansätze zur Beschleunigung der SOP-Permutationsberechnung. Als Bewertungskriterien dient die Rekonstruktionsgüte sowie die Berechnungsdauer der betrachteten Suchansätze normiert auf eine unbeschränkte Suche nach dem Patch mit minimaler Distanz zur Referenz. Bereits der Vorschlag aus der Literatur, bei dem der Suchbereich auf ein vorgegebenes Areal begrenzt wird, erzielt eine signifikante Zeitersparnis; allerdings zu Lasten der Rekonstruktionsqualität. Begründet liegt dies in der zwangsläufigen Auswahl von Patches anderer Elektrodenkonstellationen, was nach Abb. 3.14 nicht vorteilhaft ist. Dementsprechend erzielt die priorisierte Suche entlang der Zeitrichtung für gleiche Elektroden die höchste Güte und, bezogen auf die eingeführten neuen Suchtechniken, die schnellste Permutation. Wird dieser Ansatz mit einer Anordnung der Repräsentanten in Gruppen kombiniert, zeigen die Untersuchungen eine Beschleunigung der Berechnung um Faktor 50 gegenüber einer unbeschränkten Suche bei näherungsweise gleicher Wiederherstellungsqualität der neurologischen Daten.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass die beiden vorgestellten Verfahren sowie deren Kombination vielversprechende Ansätze für eine beschleunigte Berechnung der Permutation bilden. Aufgrund der näherungsweise gleichbleibenden Rekonstruktionsgüte, trotz der modifizierten Permutation, ergeben sich weitergehende Untersuchungspunkte im SOP. Einerseits stellt sich die Frage, ob ein eindimensionaler SOP-Rekonstruktionsansatz vorteilhaft ist. Dies liegt in der priorisierten Suche von Repräsentanten entlang der gleichen Konstellation der Elektroden begründet, da diese Variante lediglich die Zeitkorrelation innerhalb der neurologischen Daten ausnutzt. Andererseits ist die Klärung der Frage nach einer modifizierten Permutation basierend auf SotA-Verfahren, wie beispielsweise randomisiertes Clustern, interessant. Dabei dient der vorgestellte Ansatz zur beschleunigten Berechnung der Permutation durch die Anordnung von Repräsentanten in Gruppen als Vorlage.

**Tabelle 3.5:** Vergleich der Ansätze [108] zur Beschleunigung der SOP-Permutationsbestimmung hinsichtlich der Zeitersparnis und Wiederherstellungsqualität von neurologischen Daten.

Verfahren	Zeitverhältnis	NMSE
Unbeschränkter Suchbereich	1.0x	0.014
Beschränkter Suchbereich mit $\{21, 21\}$	11.8x	0.021
Priorisierte Suche entlang gleicher Elektroden	17.7x	0.013
Anordnung zu Repräsentantengruppen ( $G_1=1, G_2=10$ )	8.4x	0.014
Repräsentantengruppen entlang gleicher Elektroden	49.2x	0.014

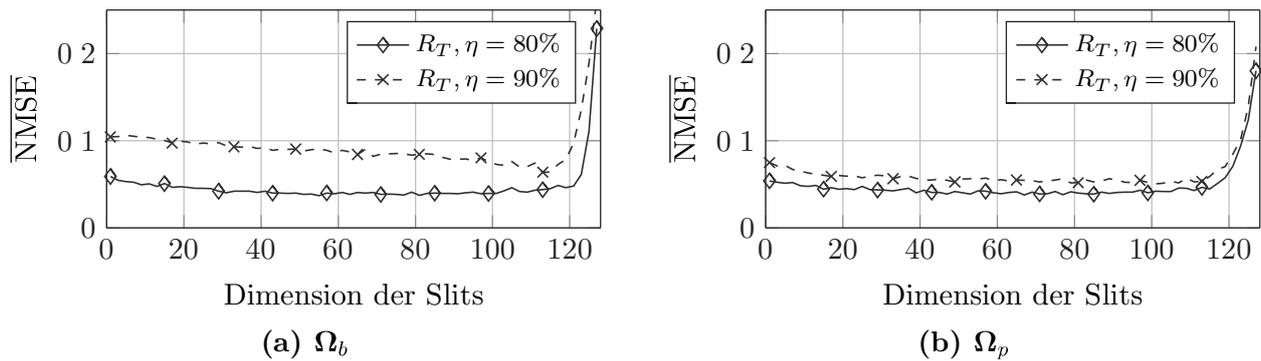


**Abbildung 3.16:** Untersuchung der Rekonstruktionsgüte in der ersten Iteration des SOS-Algorithmus basierend auf der überlappenden Extraktion von Repräsentanten als eindimensionale Slits entlang der Zeit-  $R_T$  und Elektrodenrichtung  $R_M$ .

### 3.3.3.2 Smooth Ordering of Slits

Trotz der Erkenntnis, dass stark korrelierte Repräsentanten priorisiert entlang der gleichen Elektrodenkonstellation, also in Zeitrichtung, zu finden sind, abgeleitet aus der Abb. 3.14, sollen in diesem Abschnitt beide Suchrichtungen betrachtet werden. Nachfolgend basiert die Untersuchung der SOP-Rekonstruktion auf der überlappenden Extraktion von eindimensionalen Repräsentanten - sogenannte Slits. Dafür werden beide Extraktionsausrichtungen, entlang der Zeit-  $R_T \in [1, T]$  sowie Elektroden  $R_M \in [1, MN]$ , analysiert. Im Verlauf dieser Arbeit wird der eindimensionale Extraktionsansatz als Smooth Ordering of Slits (SOS)-Algorithmus betitelt.

Die Abb. 3.16 zeigt die Abhängigkeit der Wiederherstellungsqualität der neurologischen Daten von der Dimension der Slits in Elektroden- und Zeitrichtung für die erste Iteration. Diesbezüglich erfolgt die Verwendung der eingeführten Masken im Bereich hoher Kompression. Analog zum Ergebnis aus der Abb. 3.14 korrelieren auch die extrahierten Slits entlang der Zeitachse stärker miteinander als die Repräsentanten aus benachbarten Elektroden. Dementsprechend führt dies zu einer höheren Regularität nach der Permutation und Interpolation. Folgerichtig ist lediglich die eindimensionale Rekonstruktionsvariante vom SOP für neurologische Daten vielversprechend, bei der



**Abbildung 3.17:** Fortführung der Untersuchung der Rekonstruktion basierend auf der überlappenden Extraktion von Repräsentanten als eindimensionale Slits entlang der Zeitrichtung  $R_T$  für die zweite Iteration des SOS-Algorithmus.

die Repräsentantenextraktion in Zeitrichtung erfolgt. Wie in den Abb. 3.16b und 3.16c dargestellt, führt dies unabhängig von der Maske zu deutlich kleineren Rekonstruktionsfehlern. Das Minimum der Verläufe für die jeweiligen Masken liegt im Intervall  $17 \leq R_T \leq 21$  der Slit-Dimension für 80% Kompression. Hinsichtlich der geometrischen Struktur der verwendeten Masken gewährleisten die Slits dieser Dimension eine Vermeidung von Nullrepräsentanten bei der Extraktion. Für die Untersuchung der zweiten Iteration wird dieser Bereich nachfolgend berücksichtigt.

Der leichte Qualitätsvorteil zu Gunsten der Masken  $\Omega_b$  und  $\Omega_p$  liegt in der Elektrodenanzahl begründet, welche über eine aufeinanderfolgende zeitliche Serie von unmaskierten Werten verfügen. In Abb. 3.5e und 3.5c sind die Beschaffenheiten der Masken dargestellt. Mit Hilfe der eindimensionalen Extraktionsvariante des SOP ist es möglich, jede Elektrode unabhängig zu betrachten und zu rekonstruieren. Entsprechend ist die SOS-Rekonstruktion jener Aufnahmen, die über eine Serie aus unmaskierten Werten verfügt, bevorteilt. Da allerdings die Informationen im Rekonstruktionsprozess des SOP elektrodenübergreifend ausgetauscht werden, profitieren auch die benachbarten Elektroden, obwohl diese lediglich über einzelne bekannte Datenpunkte verfügen.

In der Abb. 3.17 ist die Fortsetzung der Untersuchung in Form der zweiten Iteration der SOP-Rekonstruktion mit eindimensionaler Repräsentantenextraktion dargestellt.

**Tabelle 3.6:** Vergleich der Rekonstruktionsqualität  $\overline{\text{NMSE}}$  von neurologischen Daten mit Hilfe des SOS- und SOP-Algorithmus für verschiedene Kompressionen.

Kompression	Verfahren			
	SOS ( $\Omega_b$ )	SOP ( $\Omega_b$ )	SOS ( $\Omega_p$ )	SOP ( $\Omega_p$ )
80%	0.037	0.015	0.038	0.028
90%	0.064	0.029	0.051	0.033

Aus Gründen der Übersicht sind lediglich die Ergebnisse der Masken  $\Omega_b$  und  $\Omega_p$  ohne die elektrodengreifende Extraktion  $R_M$  illustriert. Die Slit-Dimension  $R_T$  in der dazugehörigen ersten Iteration korrespondiert zur optimalen Wahl aus Abb. 3.16. Analog zur zweidimensionalen Variante zeigt sich, dass großdimensionale Repräsentanten zu vermeiden sind. Zur Rekonstruktion der Detailinformation sind kleinere Slit-Dimensionen vorteilhaft, da somit mehr Repräsentanten extrahiert werden können.

Die Tab. 3.6 zeigt die Gegenüberstellung des NMSE hinsichtlich der Rekonstruktion von LFP-Signalen mit Hilfe vom SOS- und SOP-Algorithmus. Beide Implementierungen beinhalten  $N_P = 10$  parallele Permutationen innerhalb der beiden Iterationen. Unter Berücksichtigung gleicher Masken und Kompressionen erzielt die zweidimensionale Variante ausnahmslos Ergebnisse mit höherer Rekonstruktionsqualität, aufgrund der Ausnutzung der zeitlichen und elektrodengreifend räumlichen Korrelation. Motiviert durch diese Erkenntnis erfolgt im Abschnitt 3.4.1 die Untersuchung einer dreidimensionalen Extraktionsvariante für einen Inpaintingansatz. Dementsprechend fließt der SOS-Algorithmus nicht in die weiteren Betrachtungen der Arbeit zur Verarbeitung von biomedizinischen Daten ein.

### 3.3.3.3 Randomized Ordering of Patches

Die Idee, eine Clusterberechnung zur Bestimmung der Permutation im SOP-Algorithmus einzusetzen, basiert maßgeblich auf der Gruppierung der Repräsentanten. Ein hierzu bereits eingeführtes Verfahren zur Beschleunigung der Permutationsbestimmung im SOP wurde anhand der Ergebnisse aus Tab. 3.5 im Abschnitt 3.3.3.1 gezeigt. Diese algorithmische Anpassung erreichte sowohl eine Reduktion der Berechnungszeit als auch der Erhöhung der Rekonstruktionsqualität. In diesem Abschnitt wird ein SotA-Verfahren zum randomisierten Clustern eingeführt und untersucht, welches mit Hilfe der Randomized Singular Value Decomposition (RSVD) den Berechnungsaufwand des  $k$ -Means-Algorithmus deutlich reduziert und dadurch eine beschleunigte Bestimmung der Permutation erreicht. Durch den Einsatz der klassischen SVD, welche sich gut und genau berechnen lässt, wäre ein modifiziertes  $k$ -Mean-Verfahren mit deutlicher Komplexitätsreduktion möglich. Allerdings ist der Berechnungsaufwand der SVD sehr hoch. Im Vergleich zur SVD geht die RSVD mit sehr geringem Berechnungsaufwand einher und erreicht eine sehr gute Näherung an die SVD. Die Entwicklung des Ansatzes beruht auf den Überlegungen und Ergebnisse aus [8].

Das  $k$ -Means-Verfahren strebt eine Clustereinteilung der Zeilen einer Matrix an, bei der innerhalb einer Gruppe der Abstand der Zeilen zueinander sehr viel kleiner ist als der Abstand zwischen den Zeilen in verschiedenen Gruppen. In dieser Arbeit erfolgt das Clustering der Spalten der Kollektionsmatrix  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{R \times N_R}$ , sodass das Verfahren auf die transponierte Kollektionsmatrix  $\mathbf{K}^T \in \mathbb{R}^{N_R \times R}$  anzuwenden ist. Hierbei beschreibt  $N_R$  die große Anzahl von extrahierten Repräsentanten und  $R = \prod_d R_d$  mit  $R \ll N_R$  (zweite Iteration) die Größe eines einzelnen Repräsentanten. Sollen alternativ die Spalten der

Matrix einem Clustering unterzogen werden, so ist  $\mathbf{V}\Sigma^T$  im  $k$ -Means-Algorithmus zu verwenden [121].

Mit Hilfe der zugehörigen Indikatormatrix  $\Xi \in \{0, 1\}^{N_R \times k}$  lässt sich eine Einteilung der Zeilen von  $\mathbf{K}^T$  in  $k$  Gruppen realisieren. Jede der Spalten in der Indikatormatrix korrespondiert mit einer Gruppe in der Einteilung. Die Elemente in einer Spalte, die ungleich Null sind, kennzeichnen die Zeilen, die zu dieser Gruppe gehören. Das Bestreben des  $k$ -Mean-Algorithmus ist dann die Zeilen von  $\mathbf{K}^T$  in  $k$  Gruppen so einzuteilen, dass die Kostenfunktion aus Gl. (2.114) so klein wie möglich wird. Dazu generiert das Verfahren, ausgehend von einer im wesentlichen willkürlichen Anfangsgruppe, eine schrittweise neue Einteilung in  $k$  Gruppen, sodass in jedem Schritt der Wert der Kostenfunktion  $J$  verkleinert wird. Der Berechnungsaufwand für das  $k$ -Mean-Verfahren kann recht groß werden, da in jedem Schritt  $N_R$  Vektornormen der Länge  $R$  zu berechnen sind und dieser Vorgang recht häufig ausgeführt werden kann. Des Weiteren hat die Kostenfunktion  $J$  im Allgemeinen zahlreiche lokale Minima, in denen das Verfahren durchaus häufig endet. Aus diesem Grund wird das  $k$ -Mean-Verfahren meistens mehrfach mit verschiedenen Anfangsgruppen erneut ausgeführt.

Der Ausgangspunkt zur Reduktion der Berechnungszeit beim  $k$ -Mean-Verfahren bildet die Betrachtung der Kostenfunktion  $J$ . Mit Hilfe der Indikatormatrix  $\Xi$  wird diese so umgeformt, dass sich für eine durch  $\Xi$  gegebene Einteilung in  $k$  Gruppen die Kosten beschreiben lassen durch

$$J(\Xi) = \|\mathbf{K}^T - \Xi \Xi^T \mathbf{K}^T\|_{\mathbb{F}}^2 \quad (3.9)$$

$$= \|(\mathbf{1} - \Xi \Xi^T) \mathbf{K}^T\|_{\mathbb{F}}^2 \quad (3.10)$$

$$= \|(\mathbf{1} - \Xi \Xi^T) \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T\|_{\mathbb{F}}^2. \quad (3.11)$$

Ist  $\mathbf{K}^T = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T$  die SVD der transponierten Kollektionsmatrix  $\mathbf{K}^T$  und ist  $\mathbf{U}_k \in \mathbb{R}^{N_R \times k}$  die Matrix, die aus den ersten  $k$  Spalten von  $\mathbf{U}$  besteht, und ist  $\Sigma_k \in \mathbb{R}^{k \times k}$  die Diagonalmatrix, die aus den ersten  $k$  Zeilen und Spalten von  $\Sigma$  gebildet wird, so lässt sich hiermit das folgende Ergebnis beweisen:

$$\sum_{p=k+1}^R \sigma_p^2 \leq J(\Xi_o) \leq J(\tilde{\Xi}_o) \leq 2J(\Xi_o). \quad (3.12)$$

Die Gl. (3.12) gilt, wenn  $\Xi_o$  eine Indikatormatrix darstellt, für die die Kostenfunktion  $J(\Xi) = \|(\mathbf{1} - \Xi \Xi^T) \mathbf{K}^T\|_{\mathbb{F}}^2$  minimal ist, und  $\tilde{\Xi}_o$  eine Indikatormatrix darstellt, für die  $J_k(\Xi) = \|(\mathbf{1} - \Xi \Xi^T) \mathbf{U}_k \Sigma_k\|_{\mathbb{F}}^2$  minimal ist. Das bedeutet, dass eine optimale Einteilung in  $k$  Gruppen für die  $N_R$  Zeilen der Matrix  $\mathbf{U}_k \Sigma_k$  ebenfalls für die Zeilen von  $\mathbf{K}^T$  benutzt werden kann. Diese Möglichkeit besteht, da – wie in (3.12) gezeigt – das Ergebnis näherungsweise so gut ist wie eine optimale Einteilung, welche direkt für die Zeilen von  $\mathbf{K}^T$  ermittelt wurde. Um eine passende Indikatormatrix  $\tilde{\Xi}$  zu bestimmen, kann  $k$ -Means für die Zeilen von  $\mathbf{U}_k \Sigma_k$  verwendet werden. Im Vergleich zur Anwendung von  $k$ -Means auf

die Zeilen von  $\mathbf{K}^T$  weist das Clustering von  $\mathbf{U}_k \boldsymbol{\Sigma}_k$  eine viel geringere Komplexität auf, da die Zeilenvektoren von  $\mathbf{U}_k \boldsymbol{\Sigma}_k$  lediglich  $k$  Einträge haben. Allerdings ist eine exakte Berechnung von  $\mathbf{U}_k \boldsymbol{\Sigma}_k$  viel zu rechenaufwendig. Für das  $k$ -Mean-Clustering lässt sich aber  $\mathbf{U}_k \boldsymbol{\Sigma}_k$  durch eine Approximation ersetzen, welche mit Hilfe einer randomisierten SVD von  $\mathbf{K}^T$  zu erhalten ist.

**Randomisiertes Clustering als SOP-Permutation** Es existiert eine Vielzahl von RSVD-Varianten in der Literatur [39, 121, 40, 50]. Die Grundlage zur Modifikation der Permutation im SOP-Algorithmus basiert auf dem Ansatz aus den Arbeiten [121, 8]. Ähnlich zum CS-Ansatz erfolgt die Verwendung von Zufallsmatrizen  $\mathbf{Y} \in \mathcal{N}^{R \times (\tau+w)}$ , deren Einträge einer Normalverteilung folgen, um eine Art Verwürfelung der Matrixeinträge zu erreichen. Mit  $\tau$  wird der angenommene numerische Rang und mit  $w$  der Oversamplingfaktor, um den Stichprobenumfang zu erhöhen, bezeichnet. Initial wird diese Matrix mit  $\boldsymbol{\Psi}^{(1)} = \mathbf{K}^T \mathbf{Y}$  auf die zu zerlegende transponierte Kollektionsmatrix  $\mathbf{K}^T$  angewendet. Dieser Vorgang kann wiederholt

$$\boldsymbol{\Psi}^{(i+1)} = \mathbf{K}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Psi}^{(i)} \quad (3.13)$$

$$= (\mathbf{K}^T \mathbf{K})^i \mathbf{K}^T \mathbf{Y} \quad (3.14)$$

für  $I_Y \in \mathbb{N}$  Durchläufe berechnet werden, um eine stärkere Verwürfelung zu erzwingen. Die Berechnung der SVD wird dann für das Produkt aus Gl. (3.13) durchgeführt, wobei lediglich der dominante Anteil der Singulärwerte aus  $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{N_R \times (\tau+w)}$  (also mindestens die  $k$  größten Singulärwerte  $\sigma_p$ ) sowie die abgeschnittene Version der beiden orthonormalen Matrizen  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{N_R \times N_R}$  und  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{(\tau+w) \times (\tau+w)}$  in das Clustering einfließen:

$$\boldsymbol{\Psi} \approx \mathbf{U}_k \boldsymbol{\Sigma}_k \mathbf{V}_k. \quad (3.15)$$

Mit Hilfe der Zufallsmatrix  $\mathbf{Y}$  eröffnet diese randomisierte Vorgehensweise der RSVD den Vorteil, dass für die Minimierungsfunktion im  $k$ -Means-Algorithmus lediglich ein Clustering der Zeilen der Matrix  $\mathbf{U}_k \boldsymbol{\Sigma}_k$  vorgenommen werden muss.

Dadurch liefert die Clustereinteilung einerseits eine Vorsortierung der Repräsentanten, wodurch die Gruppen bereits aus ähnlichen Teilnehmern bestehen und nur Regularität der Teildarstellungen beitragen. Andererseits wird dadurch der Berechnungsaufwand reduziert, da die Minimaldistanzpermutation nach Gl. (2.102) lediglich in den Clustern durchgeführt werden muss. Damit geht eine deutliche Reduktion der Anzahl der Minimaldistanzberechnungen einher und beschleunigt so die Berechnungsgeschwindigkeit des entwickelten Ansatzes im Vergleich zum SOP-Algorithmus. Basierend auf dieser Prozedur erfolgt die Vorstellung einer neuartigen und randomisierten Berechnungsvariante für die SOP-Permutation.

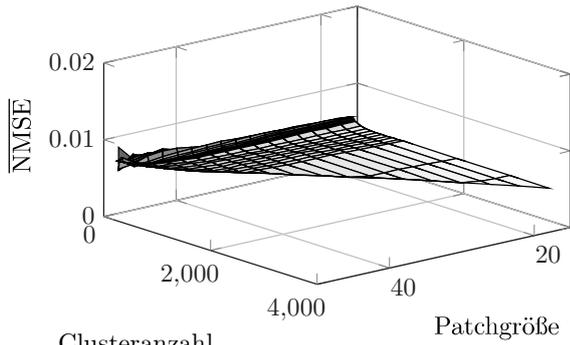
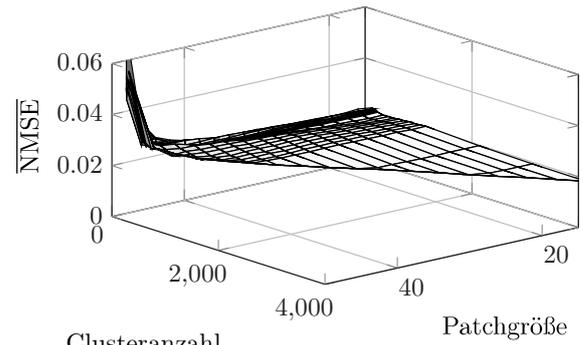
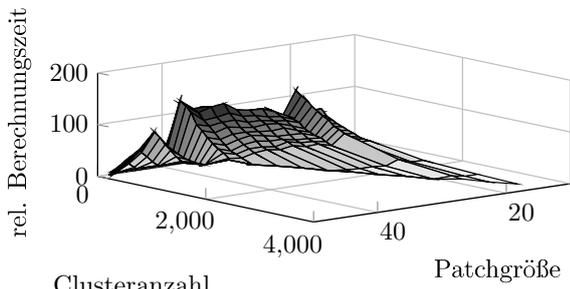
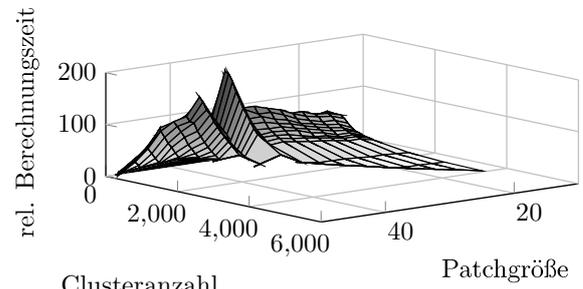
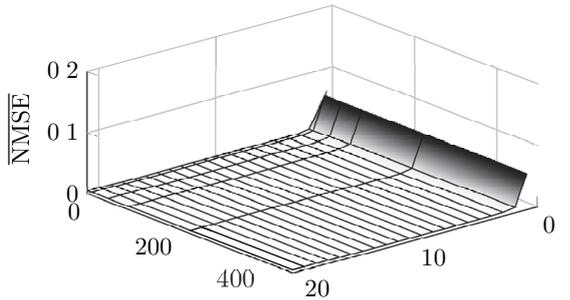
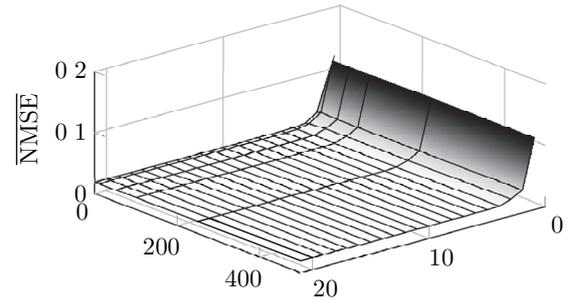
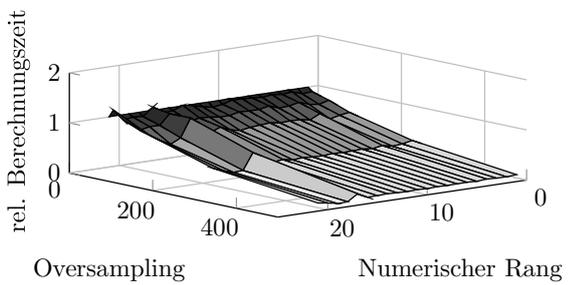
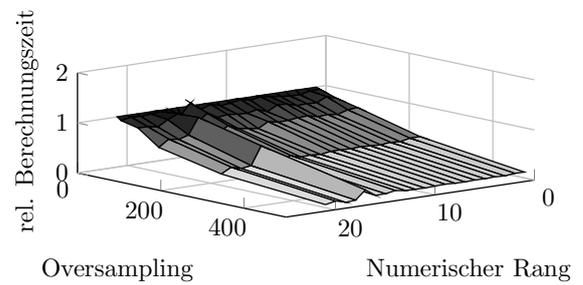
Wie bereits in den vorherigen Abschnitten untersucht und angewendet, basiert in der ersten Iteration des SOP-Algorithmus die Berechnung der Permutation auf der überlappenden Extraktion von Repräsentanten mit großer Dimension für  $R_M \times R_T$ . Dies

ermöglicht die Rekonstruktion der makroskopischen Informationen im Datensatz mit Hilfe einer geringeren Anzahl von Repräsentanten im Vergleich zur zweiten SOP-Iteration. Aufgrund der kleineren Repräsentantenanzahl ist die Berechnung der Distanzen zwischen Referenz und allen weiteren Repräsentanten innerhalb der Permutation weniger zeitkritisch im Vergleich zur zweiten SOP-Iteration. Des Weiteren liefert das Clustering für schwachbesetzte Matrizen Probleme hinsichtlich der Regularität der Teildarstellungen, da die Nulleinträge aus der Maskierung  $\Omega$  in der Kollektionsmatrix  $\mathbf{K}$  viel häufiger vorkommen. Um die Details aus  $\mathbf{X}$  wiederherzustellen, ist eine große Vielfalt der Repräsentanten vorteilhaft, was mit vielen Distanzberechnungen einhergeht und dadurch großen Berechnungsaufwand erfordert. Dementsprechend sieht der neuartige Ansatz die Verwendung eines RSVD-Clusterings zur Berechnung der Permutation ab der zweiten SOP-Iteration vor. In der zweiten Iterationen liegen bereits rekonstruierte Einträge an den Stellen  $\Omega_{m,t} = 0$  in  $\mathbf{X}_{\text{rec}}$  vor, sodass  $\mathbf{K}^T$  nicht länger schwachbesetzt ist. Initial wird die Berechnung des klassischen TSP zur Bestimmung der parallelen Permutationen weiterhin in der ersten SOP-Iteration durchgeführt. Der neuartige Ansatz, als Resultat der IDM-Optimierung des SOP, wird im Verlauf der Arbeit als Randomized Ordering of Patches (ROP) betitelt. Neben der Rekonstruktionsqualität bei gegebenem Kompressionsgrad fließt in diesem Abschnitt zusätzlich die Berechnungszeit als Maß zur algorithmischen Beschleunigung in die Untersuchungen ein. Der dazugehörige Beschleunigungsfaktor, also ein relatives Zeitmaß, setzt sich aus den gemessenen Zeiten des SOP- und ROP-Algorithmus

$$\text{relative Berechnungszeit} = \frac{t_{\text{SOP}}}{t_{\text{ROP}}} \quad (3.16)$$

zusammen. Dafür besaß der zugrunde liegende Simulationscomputer zwei Intel XEON Quad-Core mit 2.27 GHz und 48 GB RAM. Im Zuge der Auswertung wird der neuartige ROP-Ansatz, hinsichtlich der eingeführten Bewertungskriterien, mit dem klassischen SOP verglichen. Im Rahmen dieser Arbeit soll der ROP als Alternative mit höherer Berechnungsgeschwindigkeit zum SOP-Algorithmus hinsichtlich der Eignung zur Rekonstruktion der neurologischen Aktivität betrachtet werden.

**Algorithmische Freiheitsgarde** In der Abb. 3.18 sind die Untersuchungen der algorithmischen Freiheitsgrade des ROP dargestellt. Neben der quadratischen Repräsentantengröße  $R_M \times R_T$  wie beim SOP werden zusätzlich die Parameter für die Anzahl der Cluster  $K$ , die Schätzung des numerischen Rangs sowie das Oversampling für diesen neuartigen Ansatz betrachtet. Da sowohl im ROP als auch SOP in der ersten Iteration das TSP für die Permutation mit Hilfe der minimalen Distanz hinsichtlich der Repräsentanten bestimmt wird, reduziert sich die Betrachtungen im Folgenden auf die zweite Iteration der Algorithmen. Die quadratische Patchgröße in der ersten Iteration beträgt einheitlich  $44 \times 44$ . Als Maskierung erfolgt der Einsatz der Zufallsmaske  $\Omega_n$  mit den Kompressionsgraden  $\eta = \{70\%, 90\%\}$ .

(a) Rekonstruktionsfehler,  $\eta = 70\%$ (b) Rekonstruktionsfehler,  $\eta = 90\%$ (c) Berechnungszeit,  $\eta = 70\%$ (d) Berechnungszeit,  $\eta = 90\%$ (e) Rekonstruktionsfehler,  $\eta = 70\%$ (f) Rekonstruktionsfehler,  $\eta = 90\%$ (g) Berechnungszeit,  $\eta = 70\%$ (h) Berechnungszeit,  $\eta = 90\%$ 

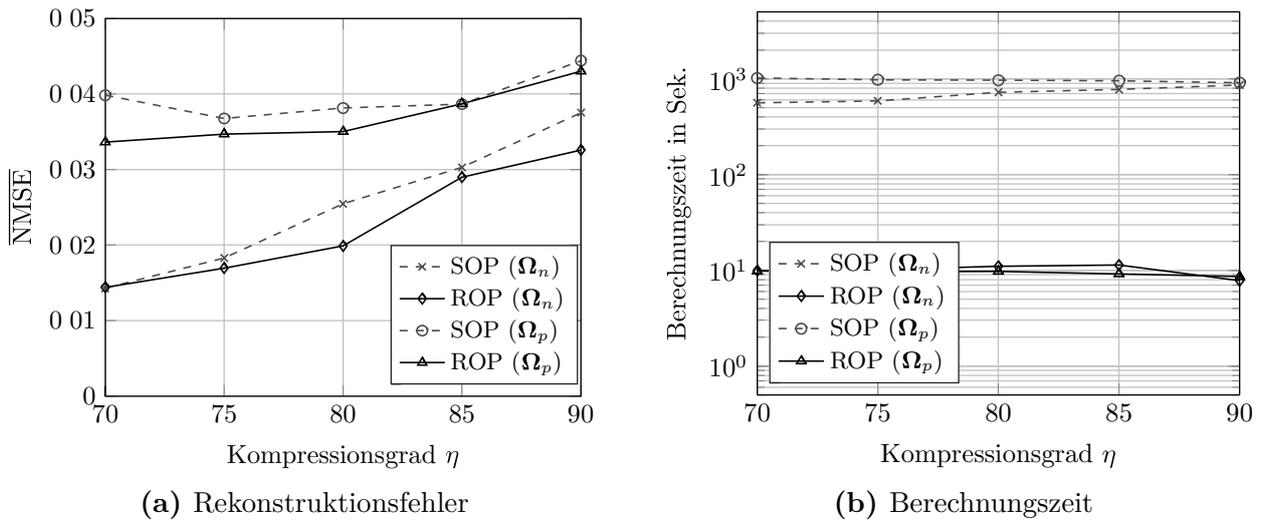
**Abbildung 3.18:** Einfluss der algorithmischen Parameter im ROP, bestehen aus der quadratischen Repräsentantengröße  $R$ , Clusteranzahl  $k$ , Schätzung des numerischen Rangs  $\tau$  sowie Oversampling  $w$ , auf die Rekonstruktionsqualität und Berechnungszeit für die Maske  $\Omega_n$ .

Die Abb. 3.18a und 3.18b zeigen den mittleren Rekonstruktionsfehler als Funktion der quadratischen Repräsentantengröße  $R_M \times R_T$  und der Anzahl der Cluster  $K$ . An dieser Stelle werden lediglich die Auswirkungen des Clusterings, für die Permutation der Repräsentanten, auf die Rekonstruktionseigenschaften wie Qualität und Zeit untersucht. Der vollständige Betrachtung des ROP-Algorithmus unter Berücksichtigung der Schätzung des numerischen Rangs sowie die Implementierung des Oversamplings folgt im Anschluss. Die dargestellte Dreiecksgestalt resultiert aus der Abhängigkeit der Repräsentantengröße  $R$  zur Anzahl der Repräsentanten  $N_R$ , welche maßgebend für die Clusteranzahl ist. Neben dem NMSE wird die Parameterwahl zusätzlich durch die benötigte Berechnungszeit bestimmt, welche der Abb. 3.18c und 3.18d zu entnehmen sind. Die relative Berechnungszeit setzt sich aus dem Verhältnis der Messungen vom SOP und ROP zusammen. Unter Berücksichtigung der Rekonstruktionseigenschaften wird im Folgenden für die zweite Iteration im ROP-Algorithmus eine Patchgröße von  $32 \times 32$  sowie eine Anzahl von 100 Clustern verwendet.

In den Abb. 3.18e bis 3.18h sind die Einflüsse des numerischen Ranks sowie des Oversamplings auf die ROP-Rekonstruktion dargestellt. Unabhängig von der verwendeten Maske und dem untersuchten Kompressionsgrad ist eine Erhöhung der Wiederherstellungsgüte bereits nach der Berücksichtigung weniger Singulärwerte, also einem geringen Rang, zu erkennen. Außerdem zeigt die Untersuchung, dass der Einfluss des Oversamplings lediglich eine vernachlässigbare Reduktion des Fehlers bewirkt. In diesem Zusammenhang wird die Berechnungszeit von der Größe der Zufallsmatrix  $\mathbf{Y}$  für die Verwürfelung der Matrixeinträge in  $\mathbf{K}^T$  beeinflusst. Im Sinne einer zuverlässigen ROP-Rekonstruktion wird für die Schätzung des numerischen Rangs, in den nachfolgenden Betrachtungen, ein Wert von 11 gewählt und dafür das Oversampling für die Rekonstruktion der neurologischen Aktivität nicht explizit implementiert.

Die abschließende Gegenüberstellung des eingeführten ROP- und dem zugrunde liegenden SOP-Algorithmus ist in Abb. 3.19 illustriert. Innerhalb des dargestellten Bereiches erzielt der ROP durchgängig eine höhere Rekonstruktionsqualität. Zusätzlich ist an dieser Stelle anzumerken, dass bis zum Übergang der moderaten in die hohe Kompression, bei ca.  $\eta = 85\%$ , ein nahezu konstanter Beschleunigungsfaktor hinsichtlich der Wiederherstellungszeit vorliegt. Für die Maske  $\Omega_n$  erzielt der ROP eine beschleunigte Rekonstruktion von mehr als Faktor 55 im Vergleich zum SOP. Aufgrund der regelmäßigen Struktur der Maskierung wird mit der Maske  $\Omega_p$  ein mittlerer Beschleunigungsfaktor von über 100 erreicht.

**Zusammenfassung** In diesem Abschnitt wurde ein neuartiger Algorithmus, bestehend aus einem randomisierten Verfahren zur Permutation von extrahierten Repräsentanten, entwickelt und dessen Leistungsstärke für die Rekonstruktion von biomedizinischen Daten gezeigt werden. Für den eingeführten ROP-Algorithmus wurde diesbezüglich die RSVD in der zweiten Iteration des SOP implementiert. Nach der Untersuchung und Festlegung der algorithmischen Freiheitsgrade erzielt der ROP im Vergleich zum SOP



**Abbildung 3.19:** Vergleich zwischen ROP- und SOP-Algorithmus hinsichtlich der Rekonstruktionsqualität und Berechnungszeit in Abhängigkeit des Kompressionsgrades.

neben einer geringfügigen Verbesserung der Wiederherstellungsgüte auch eine deutlich beschleunigte Rekonstruktion für neurologische Daten.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde lediglich das Konzept sowie Potential des neuartigen ROP-Algorithmus aufgezeigt werden. In der abschließenden Gegenüberstellung mit klassischen Datenkompressionsverfahren hinsichtlich der Rekonstruktionsqualität erfolgt der Einsatz der optimierten SOP als Lösung der IDM zur Realisierung des NMS.

### 3.3.4 Rekonstruktionsqualität

Zusammenfassend soll an diesem Punkt der Arbeit festgehalten werden, dass sowohl die algorithmischen Freiheitsgrade des SOP optimiert als auch effiziente Verfahren zur beschleunigten Permutationbestimmung entwickelt wurden. Dementsprechend erfolgt abschließend die Untersuchung der Rekonstruktionsqualität der optimierten Lösung der IDM zur Realisierung eines NMS. Dieser Entwurf berücksichtigt eine asymmetrische Verteilung des Berechnungsaufwandes, sodass für eine Kompression der biomedizinischen Signale lediglich die Maske  $\Omega$  als Elektrodensteuerung implementiert werden muss. Dahingehend erfolgt die Untersuchung der Masken  $\{\Omega_a, \Omega_b, \Omega_p, \Omega_n\}$  aus Abb. 3.5 hinsichtlich einer sehr hohen Datenkompression. Zur adäquaten Klassifikation der Rekonstruktionsgüte, dargestellt als NMSE in Tab. 3.7, soll der IDM-Ansatz mit klassischen Datenkompressionsverfahren wie JPEG und JPEG2000 verglichen werden. Allerdings sind letztere auf die Kompression von Daten, durch die Ausnutzung einer gleichmäßigen Verteilung des Berechnungsaufwandes, ausgelegt. Um eine Diskussion anhand von vertrauensvollen Daten zu ermöglichen, sind ausschließlich die arithmetischen Mittelwerte des NMSE unter Berücksichtigung der Verarbeitung einer großen Anzahl von neurologischen Daten angegeben.

Die Ergebnisse der Datenwiederherstellung aus Tab. 3.7 zeigt die Überlegenheit der Lösung der IDM unabhängig von der eingesetzten Maske gegenüber dem JPEG-Ansatz im Bereich der hohen Kompression. Außerdem wird deutlich, dass die Elektrodensteuerung, basierend auf einer vordefinierten und wiederkehrenden Struktur, vorteilhafter als die willkürlichen Anordnungen der Null- und Nichtnulleinträge  $\Omega_n$  ist. Solche Zufallsmasken sind einerseits – wie bereits angesprochen – unpraktikabel für die NMS-Realisierung und neigen andererseits zu einer ungünstigen Verteilung der Nichtnulleinträge im Bereich hoher Kompression. Dies lässt sich auf die reduzierte Wahrscheinlichkeit einer gleichmäßigen Ausbildung von Arealen bekannter Werte zurückführen, da lediglich sehr wenige Einsen vorhanden sind. Die höchste Wiederherstellungsgüte hinsichtlich der neurologischen Aktivität bringt der IDM-Ansatz unter Verwendung von  $\Omega_b$  bei der Gegenüberstellung der Masken hervor. Trotz starker Ressourcenbeschränkungen hinsichtlich der NMS-Realisierung bietet die optimierte Lösung der IDM einen Vorschlag zur effizienten Datenkompression. Gleichzeitig erzielt der vorgestellte Ansatz das qualitativ hochwertigste Resultat bei der Rekonstruktion von biomedizinischen Signalen, selbst im Vergleich zu JPEG2000, einem Verfahren, das auf die Datenkompression ausgelegt ist.

Neben dem numerischen Vergleich der Rekonstruktionsqualität der eingesetzten Verfahren aus 3.7, soll an dieser Stelle eine visuelle Betrachtung erfolgen. Dabei wird verstärkt auf die Bildung von Artefakten sowie die Entstehung von lokalen Abweichungen geachtet. Diese Erweiterung der Untersuchung sollte Wichtigkeit eingeräumt werden, da das medizinische Fachpersonal die Daten optisch anhand eines Elektrokortikogramm bewertet. Anzumerken sei, dass in dieser Arbeit keine Beurteilung auf Diagnosetauglichkeit vorgenommen wird, sondern lediglich ein Vergleich zwischen Rekonstruktion und originalen Daten erfolgt.

**Tabelle 3.7:** Rekonstruktionsqualität  $\overline{\text{NMSE}}$  in Abhängigkeit des Kompressionsgrades  $\eta$ . Gegenüberstellung klassischer Kompressionsverfahren und der Lösung der IDM zur NMS-Realisierung [108]. Der SOP nutzt  $\{48 \times 48, 8 \times 8\}$  Patches und die vorgestellte Beschleunigungstechnik mit  $G_1 = 1$  und  $G_2 = 10$  für die jeweils 10 Permutationen pro Iteration.

Verfahren	Kompressionsgrad				Berechnungsverteilung
	80%	85%	90%	95%	
IDM, SOP ( $\Omega_a$ )	0.019	0.024	0.031	0.060	asymmetrisch
IDM, SOP ( $\Omega_b$ )	0.015	0.018	0.029	0.050	asymmetrisch
IDM, SOP ( $\Omega_p$ )	0.028	0.038	0.033	0.060	asymmetrisch
IDM, SOP ( $\Omega_n$ )	0.030	0.049	0.062	0.088	asymmetrisch
JPEG	0.042	0.100	0.151	-	symmetrisch
JPEG2000	0.012	0.022	0.039	0.096	symmetrisch



(a) Originale neurologische Aktivität

(b) Maskierte neurologische Daten ( $\Omega_b$ )(c) Lösung der IDM ( $\Omega_b, \eta = 90.2\%$ , NMSE = 0.019)(d) Differenz zwischen  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{X}_{\text{rec}}$ , normiert auf die maximale Abweichung(e) JPEG Ergebnis ( $\eta = 89.3\%$ , NMSE = 0.060)(f) JPEG2000 Ergebnis ( $\eta = 89.4\%$ , NMSE = 0.020)

**Abbildung 3.20:** Exemplarische Verarbeitung einer  $T = 512$  langen neurologischen Datenaufnahme  $\mathbf{X}$  der  $NM = 48$  Elektroden ( $x$ -Achse: Zeit,  $y$ -Achse: Elektroden) [108]. Verwendet wurde die Maske  $\Omega_b$  mit einem Kompressionsgrad von  $\eta = 90\%$ . Zur Visualisierung der verbleibenden Abweichung zwischen originalen Daten und der Lösung der IDM dient ein normiertes Differenzbild.

Die inpaintingbasierte Verarbeitungskette von der originalen neurologischen Aktivität  $\mathbf{X}$ , über die Maskierung  $\mathbf{X}_\Omega$ , bis hin zur Rekonstruktion  $\mathbf{X}_{\text{rec}}$  ist beispielhaft für einen  $48 \times 128$  Datensatz in den Abb. 3.20a, 3.20b und 3.20c dargestellt. In dieser Illustration wurde eine Kompression von  $\eta = 90\%$  mittels  $\Omega_b$  betrachtet. Die dekomprimierten Daten von JPEG und JPEG2000 weisen bei dieser hohen Kompression deutliche Artefaktbildungen auf. Diese typischen Erscheinungen resultieren aus einer zu starken Quantisierung der DCT-Spektralkoeffizienten innerhalb der transformierten  $8 \times 8$  Blöcke. Die mathematische Beschreibung dazu ist in Abschnitt 2.2.1 zu finden.

Im Gegensatz dazu ist die Lösung der IDM frei von Artefakten und optisch kaum unterscheidbar zum originalen Datensatz. Aus diesem Grund sind in Abb. 3.20d die absoluten Differenzen zum Original, normiert auf die maximale Abweichung, dargestellt. Im zentralen Bereich der Darstellung ist die Diskrepanz zu den ursprünglichen LFP nur sehr gering. Dies liegt in der Tatsache begründet, dass dort die maximale Anzahl von extrahierten Repräsentanten zur Verfügung steht. An den Rändern liegt nur eine eingeschränkte Menge vor. Daher können die größten Abweichungen dort und speziell in den großen Zwischenräumen der Maskenstruktur verzeichnet werden. Eine Möglichkeit den Einfluss der unvermeidbaren Fehler an den Rändern des Datensatzes, aufgrund der unzureichenden Anzahl von Repräsentanten, zu reduzieren, wird in kommenden Abschnitt 3.4.3 eingeführt.

### 3.3.5 FPGA-Beschleunigung der Rekonstruktion

In diesem Abschnitt erfolgt eine weitere Optimierung der vorgestellten Inpaintingverfahren für die Rekonstruktion neurologischer Daten aus Abschnitt 3.3.1. Als Alternative zu einer algorithmischen Verbesserung der Ansätze soll die Berechnungszeit mit Hilfe einer Hardwareunterstützung minimiert werden. Die dazugehörige Plattform für die Architektur bildet in dieser Arbeit ein Field Programmable Gate Array (FPGA).

#### 3.3.5.1 Architektur basierend auf Funktionsapproximation

In diesem Teil der Arbeit wird eine Hardwarearchitektur für das strukturbasierte Inpainting aus Abschnitt 2.4.1 vorgestellt. Diese dient zur Rekonstruktion von Datenblöcken, bestehend aus der maskierten neurologischen Aktivität [104]. Die Maske als Komponente der Lösung der IDM ermöglicht den Entwurf eines vollständig implantierbaren NMS trotz Beschränkung hinsichtlich des Flächen- oder Energiebedarfs. Mit dem Ziel, die Daten verzögerungsfrei für die medizinische Diagnostik zur Verfügung zustellen, soll eine Hardwarearchitektur, basierend auf der Linear Function Approximation (LFA), auf einem FPGA für eine beschleunigte Rekonstruktion entwickelt werden [107]. Die Inhalte in diesem Abschnitt der Dissertation liegen den Arbeiten aus [102, 107] zugrunde.

Zur Berechnung von nichttrivialen Funktionen sowie der Multiplikation wird ein logarithmisches Zahlensystem (LNS) [80] zur Umsetzung des SBI-Algorithmus verwendet. Nichttriviale Funktionen umfassen die mathematischen Operationen wie eine Wurzel, Division usw. Der Hauptvorteil bei der Anwendung des LNS ist die vereinfachte Berechnung von Verkettungen aus zahlreichen arithmetischen Operationen und elemen-

taren Funktionen. Diese Vereinfachung wird durch Ausnutzung der logarithmischen Rechenregeln

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)} \quad (3.17)$$

$$\log_a(a^x) = x \log_a(a) = x \quad (3.18)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) + \log_a(y^{-1}) = \log_a(x) - \log_a(y) \quad (3.19)$$

erreicht. Die Addition sowie Subtraktion im LNS bilden dabei die Ausnahme. Zur Umwandlung der Funktionen zwischen dem LNS und Festkommazahlensystem (FPNS) ist die Implementierung von logarithmischen (LOG) und anti-logarithmischen (ALOG) Konvertern notwendig.

**Lineare Funktionsapproximation** Es werden Module für die LOG- und ALOG-Konvertierung benötigt, welche die Transformation in das jeweilige Zahlenformat durchführen. Der Verlauf der Originalfunktion wird dafür durch Polynome angenähert. Eine Methode zur Umwandlung ist die automatisierte stückweise lineare Funktionsapproximation. Sind die Polynome lediglich auf den ersten Grad beschränkt

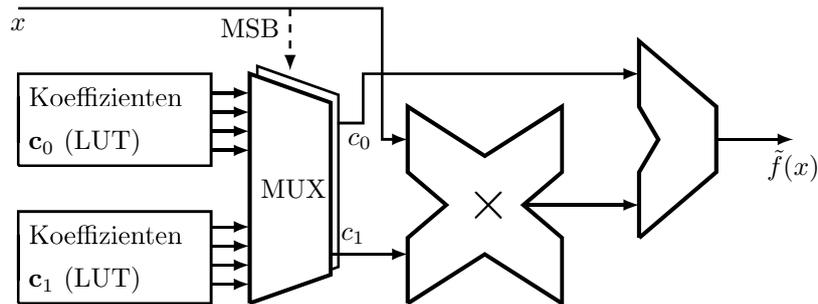
$$f(x) = c_1 x + c_0, \quad (3.20)$$

können diese sehr effizient durch digitale Architekturen berechnet werden [81]. Die Anzahl der verwendeten stückweisen Polynome ist sowohl maßgebend für eine Reduktion der Pfadverzögerung und Latenz als auch für einen geringen Approximationsfehler. Selbst im Hinblick auf anwendungsspezifische Festkommaberechnungen mit vergleichsweise geringen Genauigkeitsanforderungen liefert diese Methode vielversprechende Ergebnisse [97].

Für die stückweise Funktionsapproximation erfolgt zunächst eine Aufteilung der Funktion in mehrere sogenannte Segmente bestehend aus Unterfunktionen. Eine Erhöhung der Segmentanzahl resultiert in einem geringen Fehler der Annäherung. Allerdings vergrößert sich dadurch auch die Fläche der Architektur sowie der damit einhergehende Energiebedarf. Deshalb ist die Entwurfszielsetzung einen optimalen Ausgleich zwischen performanter Hardware und Approximationsfehler zu erreichen. Dafür wird ein Schema mit einer nicht-äquidistanten Segmentierung verwendet. Diese teilt den originalen Verlauf in  $N_S$  Unterfunktionen mit unterschiedlich großen Wertebereichen auf. Wobei jedes Segment bei  $s_i$  beginnt und folgende Bedingung

$$s_i = s_{i-1} + \frac{x_T - x_1}{2^{h_i}} \quad (3.21)$$

erfüllen muss. In Gl. (3.21) kennzeichnen  $x_1$  und  $x_T$  den Start und das Ende des Intervalls für die Funktionswerte. Der gesamte Wertebereich der Originalfunktion ist definiert



**Abbildung 3.21:** Hardwarestruktur zur Konvertierung vom FPNS in das LNS nach [97]. Diese besteht aus zwei LUT für die Koeffizienten sowie einem Multiplexer, welche über die MSB gesteuert werden und zwei Berechnungskomponenten: Multiplizierer und Addierer.

durch  $x_T - x_1 = 2^{h_{Ns}}$ . Die individuelle Auslegung der Größe der Unterfunktionen erfolgt durch den Intervall exponenten  $h_i$ . Da sich  $h_i$  pro Segment unterscheidet, müssen innerhalb dieser auch verschiedene Most Significant Bit (MSB) berücksichtigt werden. Die Auswahl der Wertebereiche für die Unterfunktionen lassen sich somit lediglich über das jeweilige MSB der Originalfunktion  $x$  vornehmen. Somit kann die Approximation in der Form

$$f(x) = (\mathbf{c}_1 x + \mathbf{c}_0)^T \mathbf{j}(x) \quad (3.22)$$

ausgedrückt werden, wobei die Koeffizienten  $\mathbf{c}_1$  und  $\mathbf{c}_0$  die Steigung und den Versatz beschreiben. Der Vektor  $\mathbf{j}(x)$  übernimmt die Funktion zur Ausblendung von Teilbereichen, um die Polynome den jeweiligen Segmenten zuordnen zu können [97].

Um eine möglichst hohe Genauigkeit zu erreichen, empfiehlt sich der Einsatz eines automatisierten Schemas zur Optimierung der Segmentierung. Über die Anwendung des Remez-Algorithmus lässt sich eine Minimierung des maximalen Approximationsfehlers  $r_{\max}$  erreichen [81]. Zunächst erfolgt die Annäherung der Originalfunktion über den kompletten Wertebereich. Die daraus resultierende Abweichung  $r$  wird dann mit der spezifischen Fehlervorgabe  $r_{\max}$  verglichen. Ist die Vorgabe nicht erfüllt ( $r > r_{\max}$ ), erfolgt eine Halbierung des Wertebereiches. Daraufhin startet die Heuristik, beginnend beim Segment ganz links, erneut. Bei Erfüllung der Vorgabe ( $r \leq r_{\max}$ ) werden die generierten Koeffizienten und die Einteilung der Segmente für diesen Abschnitt der Approximation mit Polynomen ersten Grades gespeichert. Danach erfolgt die Betrachtung des nächsten Segmentes, welches rechts vom Vorherigen positioniert ist. Sobald die gesamte Originalfunktion auf diese Weise verarbeitet wurde, können alle gespeicherten Parameter einer Hardwareimplementierung mit Hilfe eines entsprechenden Very High Speed Integrated Circuit Hardware Description Language (VHDL)-StringTemplates zugeordnet werden [85]. Für eine detailliertere Beschreibung dieser Methode sei an dieser Stelle auf die Literatur verwiesen [97].

Die Abb 3.21 zeigt die dazugehörige schematische Hardwarestruktur zur Berechnung von nichttrivialen Funktionen durch die segmentweise Approximation basierend auf Polynomen ersten Grades. Dieses Modul zur Konvertierung besitzt zwei LUT, in denen die Koeffizienten  $\{\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1\} \in \mathbb{R}^k$  hinterlegt sind. In Abhängigkeit der MSB vom Eingang  $x$  stellt der Multiplexer (MUX) die Koeffizienten zur Verfügung. Zur Berechnung der Approximation ist dann nachfolgend lediglich ein Multiplizierer und ein Addierer erforderlich.

**Logarithmisches Zahlensystem (LNS)** Das LNS wird eingesetzt um den Signalverarbeitungsaufwand zu reduzieren. Die Berechnung von numerischen Operationen und/oder elementaren Funktionen lässt sich durch exponentielle Äquivalenzen vereinfachen [80]. Allerdings können triviale arithmetische Operationen wie Addition und Subtraktion nicht im LNS durchgeführt werden. In Abhängigkeit der vorliegenden Funktion ist ein Wechsel zwischen dem LNS und (gewöhnlichen) FPNS erforderlich. Die Werte im LNS sind in Anlehnung an [33] darstellbar durch

$$v_{\text{LNS}} = (1 - z) \cdot (-1)^s \cdot 2^{-e} \cdot 2^l, \quad (3.23)$$

wobei  $s$  und  $z$  das Vorzeichen- und Nullbit darstellen. Des Weiteren kennzeichnen  $e$  und  $l$  den Exponenten und die logarithmische Mantisse des Wertes. Abgesehen von der logarithmischen Mantisse besitzt die LNS-Darstellung starke Ähnlichkeit zum floating-point Zahlensystem. Im Gegensatz zu den beiden gerade genannten Zahlensystemen ist ein Wert im FPNS im Allgemeinen definiert durch

$$v_{\text{FPNS}} = (-1)^s \cdot o \cdot 2^{-r}, \quad (3.24)$$

wobei in diesem Fall  $o$  einen Wertersatz und  $r$  den Radixpunkt kennzeichnet. Um die Zahlendarstellung zwischen dem LNS und FPNS zu wechseln, ist die Transformation der logarithmischen Mantisse

$$l_{\text{opt}} = \log_2(o_n + 1), \quad (3.25)$$

mit  $o_n = o \cdot 2^e$  als normierter Wert im Intervall  $0 \leq o_n < 1$ , und anti-logarithmischen Mantisse

$$o_{\text{opt}} = 1 + (2^{l_n} - 1), \quad (3.26)$$

mit  $l_n = l \cdot e$  als normierter Wert im Intervall  $0 \leq l_n < 1$ , notwendig. Wie in den beiden Gl. (3.25) und (3.26) erkennbar ist, geht die Überführung der Zahlensysteme mit der Berechnung von (nichtlinearen) elementaren Funktionen einher. Diese werden ebenfalls, wie oben beschrieben, in nichtäquidistante Segmente eingeteilt und durch Polynome ersten Grades approximiert.

**LNS-Architektur für das strukturbasierte Inpainting** Ein effizienter Hardwareentwurf für das strukturbasierte Inpainting zur Rekonstruktion neurologischer Daten wird nachfolgend diskutiert. Die Rekonstruktion der maskierten Daten im SBI-Algorithmus besteht aus der Berechnung von nicht trivialen, verketteten Funktionen sowie der Multiplikation. Wie eingangs erwähnt, können solche mathematischen Ausdrücke effizient mit der LNS bestimmt werden. Zudem kann sich die Berechnung im LNS positiv auf die Pfadverzögerung bzw. Latenz auswirken. Der LNS bietet sich daher als ein vielversprechender Ansatz für die Architektur an, um eine nahtlose Datenwiederherstellung für die medizinische Diagnostik zu ermöglichen.

Zunächst erfolgt die Untersuchung der LFA für die Annäherung der logarithmischen und anti-logarithmischen Funktion durch den stückweisen Einsatz von Polynomen ersten Grades. Zur Einschätzung der Genauigkeit erfolgt die Gegenüberstellung des maximalen Approximationsfehlers  $r_{\max}$  und der Anzahl der Segmente  $N_S$  für die Unterfunktionen. In Tab. 3.8 sind vier Ergebnisse einer Realisierung der LOG- und ALOG-Konverter dargestellt. An dieser Stelle sei erwähnt, dass die Wortbreite des Datenpfades immer doppelt so groß ist wie der jeweilige maximale Fehler. Das bedeutet, dass bei  $r_{\max} = 2^{-12}$  ein Datenpfad mit einer Größe von 14 Bit berücksichtigt werden muss.

Neben der Transformation der logarithmischen und anti-logarithmischen Mantisse müssen diverse nichttriviale Funktionen im SBI-Algorithmus durch die lineare Funktionsapproximation stückweise angenähert. Einerseits gehört dazu die Berechnungsvorschrift aus Gl. (2.91) bestehend aus der Verknüpfung der Detektion und Vervollständigung von Isophoten  $X_D$  und dem Slope-Limiter  $X_{SL}$ . Für eine Hardwareimplementierung von  $X_I = X_D X_{SL}$  wird die logarithmische Rechenregel aus Gl. (3.19) ausgenutzt:

$$u_1 \sqrt{\frac{u_2}{u_3}} \xrightarrow{\log_2} \log_2(u_1) + \frac{\log_2(u_2)}{2} - \frac{\log_2(u_3)}{2}. \quad (3.27)$$

**Tabelle 3.8:** Anzahl der Segmente  $N_S$  für die Unterfunktionen bei einer stückweisen LFA für die logarithmische und anti-logarithmische Funktion durch Polynome ersten Grades [107]. Zusätzlich sind die dazugehörigen maximalen Fehler zur Realisierung der LNS-Konvertermodule dargestellt.

Maximaler Fehler $r_{\max}$	Segmentanzahl $\{N_{S,LOG}, N_{S,ALOG}\}$
$2^{-12}$	{23, 25}
$2^{-14}$	{43, 51}
$2^{-16}$	{86, 102}
$2^{-18}$	{174, 205}
$2^{-20}$	{341, 415}

Schematisch umfasst  $u_1$  das Skalarproduktergebnis aus den Komponenten der Gradienten- und Laplace-Operation

$$\mathcal{G}_m(\mathcal{L}_{t+1} - \mathcal{L}_{t-1}) - \mathcal{G}_t(\mathcal{L}_{m+1} - \mathcal{L}_{m-1}). \quad (3.28)$$

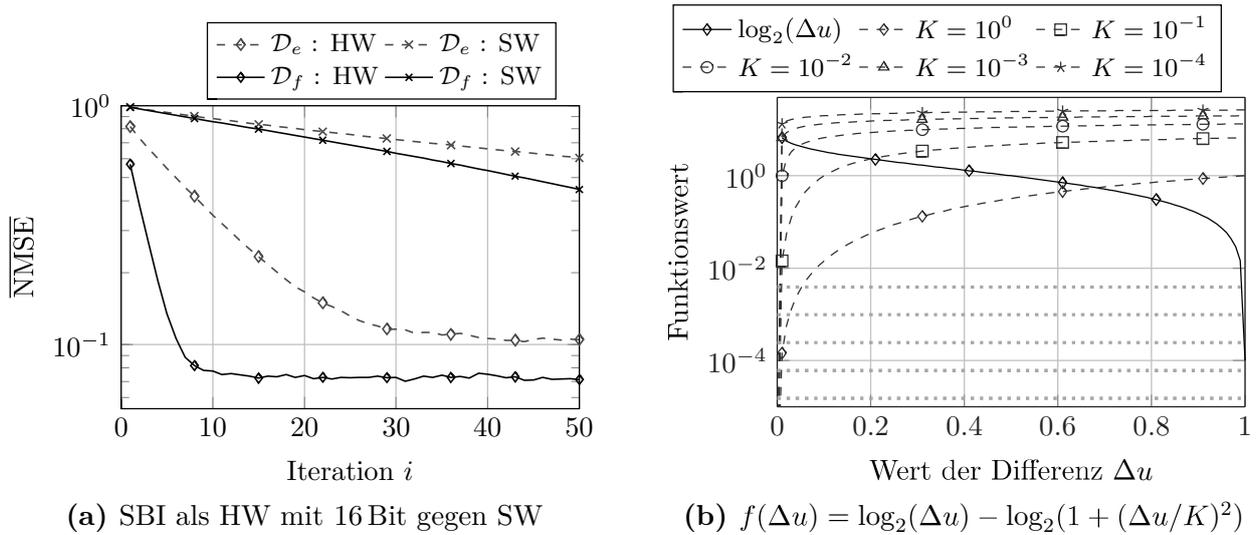
Die Ausdrücke  $u_2$  und  $u_3$  beinhalten Summen aus quadrierten Werten für den Slope-Limiter und die Normierung des Gradienten. Jede Quadrat- oder Wurzelberechnung in Gl. (3.27) führt, aufgrund des LNS-Ansatzes und nach Rechenregel (3.18), zu einer Multiplikation bzw. Division mit zwei. Eine solche Verrechnung mit zwei ist bei einem binären Wort äquivalent mit einer Verschiebung des Radixpunktes nach rechts bzw. links. Andererseits besteht die Berechnungsvorschrift der anisotropen Diffusion der Exponentialfunktion  $\mathcal{D}_e$  aus Gl. (2.98)

$$u_1 e^{-u_2^2} \xrightarrow{\log_2} \log_2(u_1) - u_2^2 \log_2(e), \quad (3.29)$$

und der Bruchfunktion  $\mathcal{D}_f$  aus Gl. (2.99)

$$\frac{u_1}{1 + u_2^2} \xrightarrow{\log_2} \log_2(u_1) - \log_2(1 + u_2^2), \quad (3.30)$$

ebenfalls aus nichttrivialen mathematischen Funktionen. Die stückweise Approximation dieser Ausdrücke durch Polynome ersten Grades erfolgt unter Berücksichtigung der logarithmischen Rechenregeln (3.18) und (3.19). Zur Berechnung des Arguments  $1 + u_2^2$  in der zweiten Logarithmusfunktion aus Gl. (3.30) sind zwei weitere Zahlensystemtransformationen notwendig. Als erstes die Transformation in das FPNS, um die Summe abzubilden. Im zweiten Schritt erfolgt die Rücktransformation in das LNS, um lediglich mit Hilfe einer Bitverschiebung nach rechts das Ergebnis der Quadrierung zu erhalten. Auf diese Art und Weise können alle nichttrivialen mathematischen Berechnungen für das strukturbasierte Inpainting in eine Hardwarearchitektur überführt werden. Im nächsten Schritt ist eine Beschreibung anzufertigen, die es ermöglicht, die daraus resultierenden Komponenten zu verbinden und zum korrekten Zeitpunkt anzusteuern. Zur Beschreibung der Hardwarearchitektur wurde VHDL verwendet. Die Ansteuerung, über den dafür erforderlichen Steuerpfad, übernimmt in dieser Arbeit eine FSM [107]. In dieser Realisierung werden die neurologischen Signale als normierter zweidimensionaler Datensatz  $\mathbf{X} \in [0, 1]^{MN \times T}$  betrachtet. Als Steuerung der Elektrodenzustände für die Datenreduktion erfolgt eine Maskierung  $\mathbf{\Omega} \in \{0, 1\}^{MN \times T}$  bestehend aus einheitlichen quadratischen Strukturen der Größe  $3 \times 3$  (vgl. Abb. 3.3a) [102]. Diese werden in jede Richtung von zwei bekannten Datenpunktzeilen getrennt, was zu einem Kompressionsgrad von  $\eta \approx 62\%$  führt. Der Hardwareentwurf für die SBI-Rekonstruktion bezieht sich lediglich auf die Betrachtung einer solchen  $3 \times 3$ -Struktur der Maske. In Abhängigkeit der Anforderungen an die Implementierung, hinsichtlich Flächen-/Energiebedarf oder Rekonstruktionsgeschwindigkeit, kann die grundlegende Architektur einmal oder mehrfach parallel aufgebaut werden. Zur Wiederherstellung der maskierten Daten sind für



**Abbildung 3.22:** Vergleich der beiden Varianten zur anisotropen Diffusion  $\mathbf{D}$  für den klassischen SBI-Ansatz sowie den LNS-Entwurf. Untersuchung des numerischen Betrags hinsichtlich der LNS-Konvertierung. Markierung der minimalen Zahlendarstellung für fünf verschiedene Auflösungen  $\{14, 16, 18, 20, 22\}$  Bit (gepunktete Linien). Für die SBI-Rekonstruktion wurden die Iterationen  $A_{\max} = 15$ ,  $B_{\max} = 5$  sowie Schrittweiten  $\Delta a = 0.1$ ,  $\Delta b = 0.1$  verwendet.

jeden Wert in der  $3 \times 3$ -Struktur jeweils 13 Eingangsgrößen, aufgrund von Gl. (3.2), erforderlich. Dies resultiert in einem Datenspeicher für 37 Werte, welche alle für die Rekonstruktion ausgelesen werden müssen. Allerdings erfolgt eine Veränderung der Daten lediglich an den maskierten Positionen im Datensatz  $\mathbf{X}_\Omega$ .

Nach dem Einlesen der Daten in den Speicher erfolgt eine einzelne initiale anisotrope Diffusion hinsichtlich der maskierten Punkte. Für die Anwendung von  $\mathcal{D}$  müssen jeweils fünf Eingangsgrößen pro Position in der  $3 \times 3$ -Struktur zur Verfügung stehen. Anschließend steuert die FSM den alternierenden Wechsel für  $I_{\max}$  Iterationen zwischen der Detektion/Vervollständigung der Isophoten und anisotropen Diffusion. Nach  $1 + I_{\max}(A_{\max} + B_{\max})$  Durchläufen der Komponenten innerhalb der Architektur kann das Rekonstruktionsergebnis aus dem Speicher ausgelesen und an die ursprünglichen, maskierten Positionen in  $\mathbf{X}_\Omega$  zurückgesetzt werden.

Die Abb. 3.22a illustriert die Gegenüberstellung vom LNS-basierten Hardwareentwurf und der Software-Lösung. In dieser Untersuchung ist die Rekonstruktionsgüte in Abhängigkeit der Iteration  $i$  für beide Varianten der anisotropen Diffusion dargestellt. Wie bereits im Abschnitt 3.3.1 verdeutlicht wurde, zeigt die Bruchfunktion  $\mathcal{D}_f$  als Realisierung der anisotropen Diffusion eine schnellere Konvergenz und höhere Güte für die Rekonstruktion der maskierten neurologischen Aktivität. Das gleiche Ergebnis stellt sich auch für den vorgestellten Hardwareentwurf mit fester Datenwortbreite, in diesem Fall 16 Bit, ein. Allerdings weist der SBI, basierend auf dem LNS-Ansatz, im

Gegensatz zur Software (SW)-Version des Algorithmus eine deutliche Reduktion der Iterationszahl auf. Dieser vorteilhafte Effekt kommt durch einen inhärenten Wechsel zwischen isotroper und anisotroper Diffusion zustande. Das dynamische Umschalten erfolgt in Abhängigkeit der Eingangswerte für die Diffusion. Anhand von Gl. (2.98) und (2.99) wird deutlich, dass es sich dabei ausschließlich um Differenzen  $\Delta u$  zwischen zwei Ausdrücken handelt. Der Wertebereich dieser Differenzen ist, aufgrund der Normierung des Datensatzes  $\mathbf{X}_\Omega$ , auf den Bereich  $[0, 1]$  beschränkt. Begründet in der Überlaufeigenschaft des LNS-Konverters [97] wird den Werten eine eins zugewiesen, welche die Grenze der Zahlenbereichsaufösung – noch oben oder unten – überschreiten. In der Regel ist die Rundung der Differenz  $\Delta u \approx 1$  auf eins ohne Nachteil. Folgenreicher ist der Fall  $\Delta u \approx 0$  durch die massive Verfälschung des Ergebnisses. Die inhärente Schwellwertentscheidung mit Zuweisung auf eins wird nachfolgend anhand der Bruchfunktion

$$f(\Delta u) = \log_2(\Delta u) - \log_2(1 + (\Delta u/K)^2) \quad (3.31)$$

aus Gl. (3.30) untersucht. Die Differenz  $\Delta u$  aus Gl. (3.31) ist für jede Richtung (Nord, Süd, West, Ost) in  $\mathbf{X}_\Omega$  durchzuführen. Zunächst erfolgt die Betrachtung der LNS-Konvertierung des ersten Terms  $\log_2(\Delta u)$  mit Hilfe der Abb. 3.22b. Unter Berücksichtigung der Grenzen für die jeweilige Auflösungen  $\{14, 16, 18, 20, 22\}$  kann nahezu der gesamte Bereich ohne Überlauf konvertiert werden. Ein anderes Verhalten weist dagegen der zweite Term  $\log_2(1 + (\Delta u/K)^2)$  auf. Fließen hier kleine Werte für  $\Delta u$  ein, sodass der Term die Genauigkeitsgrenze

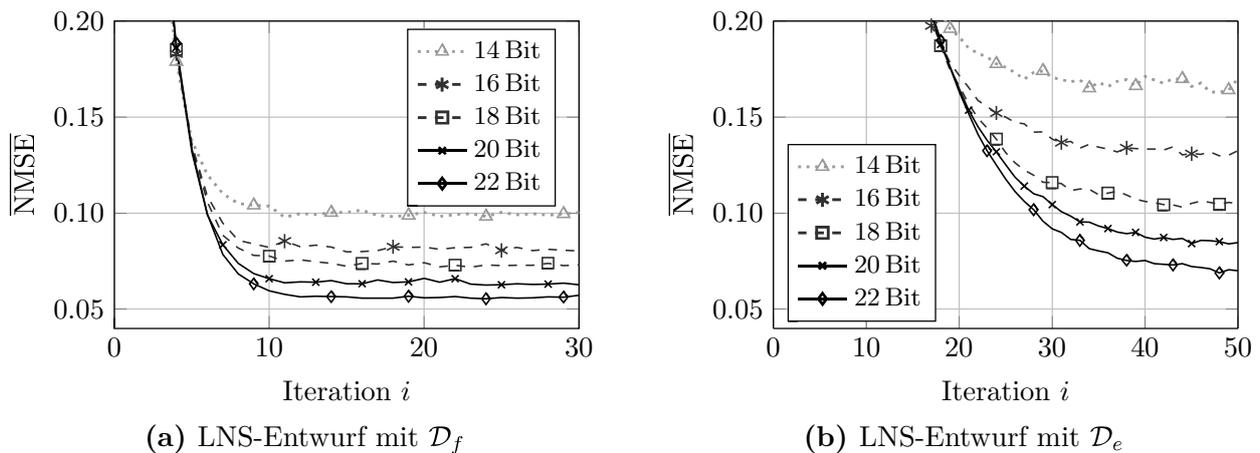
$$2^{-\text{Auflösung}+s+e} \quad (3.32)$$

unterschreitet, wird am Ausgang des LNS-Konverters eine eins anstelle einer kleinen Zahl zurückgegeben. Folgerichtig verschwindet damit der Dämpfungseinfluss der Bruchfunktion auf die Differenz

$$\frac{\Delta u}{1 + (\Delta u/K)^2} \rightarrow \Delta u, \quad (3.33)$$

da für den Nenner immer  $1 + (\Delta u/K)^2 > 1$  gilt. Im Gegensatz zur klassischen anisotropen Diffusion liefert die LNS-Version in diesem Bereich einen numerisch höherwertigen Beitrag. Für größere  $\Delta u$ -Werte entsteht kein Überlauf, sodass dynamisch zur gewichteten Diffusion zurückgeschaltet wird. Durch das schnelle Diffundieren der Werte in die maskenbasierten Fehlstellen ist lediglich ein Bruchteil der ursprünglichen Iterationszahl  $I_{\max}$  für die Rekonstruktion erforderlich.

In der abschließenden Betrachtung des Hardwareentwurfs ist das Rekonstruktionsverhalten unter Berücksichtigung verschiedener Wortbreiten in der LNS-Implementierung zu untersuchen. Dazu wurden im SBI-Algorithmus die Iterationen auf  $A_{\max} = 15$  und  $B_{\max} = 5$  festgelegt. In jeder Schleife fließt die Aktualisierung mit der jeweiligen Schrittweite von  $\Delta a = 0.1$  und  $\Delta b = 0.1$  ein. Für die anisotrope Diffusion erfolgt, basierend auf



**Abbildung 3.23:** Verhalten und Sättigungshöhe der SBI-Rekonstruktion basierend auf der LNS-Architektur [107]. Dafür wurde die Implementierung der Bruch- sowie Exponentialfunktion als anisotrope Diffusion verwendet. Die Ergebnisse sind in Abhängigkeit der Auflösungen  $\{14, 16, 18, 20, 22\}$  Bit dargestellt.

der LNS-Implementierung aus Abb. 3.22a, die Realisierung  $\mathcal{D}_f$  über die Bruchfunktion. Die Abb. 3.23 zeigt, dass die Erhöhung der Datenwortauflösung mit einer Verbesserung der Rekonstruktionsqualität einhergeht. Des Weiteren ist eine Abnahme des Abstandes zwischen den verbleibenden Restfehlern mit zunehmender Wortbreite zu beobachten. Die Auflösung für die vorgeschlagene Implementierung muss in Abhängigkeit der Anwendung und der Signale für die medizinische Diagnostik gewählt werden. Dementsprechend gilt zum Entwurf einer effizienten Architektur die Zielsetzung, einen Trade-Off zwischen der Rekonstruktionsgenauigkeit und den Hardwareeinschränkungen (Fläche, Energie, etc.) anzustreben. Für die nachfolgende Auswertung der Synthesergebnisse der vorgestellten Architektur auf einem FPGA wird eine Wortbreite von 16 Bit verwendet.

**Auswertung der Hardwarearchitektur (FPGA)** Die Ergebnisse der Synthese in dieser Arbeit wurden, basierend auf der FPGA-Plattform Xilinx Virtex-5 xc5vfx200t, für den oben genannten Entwurf erstellt. In der Tab. 3.9 sind die erwartete Auslastung

**Tabelle 3.9:** Geschätzte Synthesergebnisse für einen Virtex-5 xc5vfx200t FPGA, geändert nach [107].

Modul	Verwendet	Verfügbar	Auslastung
Anzahl der Slices Regs	10094	122880	8 %
Anzahl der Slice LUT	23440	122880	19 %
Anzahl der LUT-FF pairs	5652	27882	20 %
Anzahl der DSP	171	384	44 %

der vorhandenen Module des ausgewählten FPGA illustriert. Die Angaben beziehen sich auf die Architektur zur unabhängigen Rekonstruktion einer  $3 \times 3$ -Maskierung, welche für eine parallele Berechnung mehrerer Ausschnitte beliebig duplizierbar ist. Dabei erfordert die Realisierung der Detektion und Vervollständigung von Isophoten 416 Flip-Flops, 28 Addierer/Subtrahierer sowie acht Multiplizierer. Die anisotrope Diffusion setzt sich aus 459 Flip-Flops, 14 Addierer/Subtrahierer und vier Multiplizierer zusammen. Der übergeordnete Zustandsautomat zur Ansteuerung der Berechnungskomponenten im SBI ist, aufgrund der geringen Zustandsanzahl, mit Hilfe einer One-Hot-Codierung realisiert. Dies wird durch 5414 Flip-Flops und fünf Addierer umgesetzt.

Auf dieser Plattform erreicht die händisch erstellte und nichtoptimierte Hardwareimplementierung eine Taktfrequenz von  $f_{\text{clk}} = 81.391$  MHz. Der dazugehörige kritische Pfad befindet sich im Modul zur Rekonstruktion der Isophoten und ist geprägt durch die Verzögerung in den LNS-Konvertern. Für die Datenwiederherstellung einer  $3 \times 3$ -Maskierung ist mit Hilfe der Definition

$$T_{\text{clk}} = \frac{f_{\text{clk}}}{N_{\text{clk}}} \quad (3.34)$$

$$= \frac{f_{\text{clk}}}{N_{\text{clk},B} + (N_{\text{clk},A}A_{\text{max}} + N_{\text{clk},B}B_{\text{max}})I_{\text{max}}} \quad (3.35)$$

ein Durchsatz (throughput)  $T_{\text{clk}}$  der Daten formulierbar. Hierbei gibt  $N_{\text{clk}}$  die Gesamtanzahl der Taktzyklen sowie  $N_{\text{clk},A}$  und  $N_{\text{clk},B}$  die der Isophotenberechnung und anisotrope Diffusion an. Dies resultiert in einem Datendurchsatz von 64 087 vollständigen Rekonstruktionen eines  $3 \times 3$ -Ausschnittes der maskierten neurologischen Signale pro Sekunde auf einem einzelnen FPGA. Für diesen Wert wurden die verwendeten SBI-Parameter und die entworfene LNS-Architektur mit 16 Bit berücksichtigt.

**Zusammenfassung** Abschließend ist festzuhalten, dass in diesem Abschnitt eine Hardwarearchitektur für die Rekonstruktion von maskierten neurologischen Signalen mit Hilfe des SBI-Algorithmus entwickelt wurde. Der LNS-Ansatz ermöglicht die effiziente Berechnung von nicht-trivialen verketteten Funktionen und der Multiplikation. Basierend auf den Überlaufeigenschaften der LNS-Konverter existiert ein inhärentes und dynamisches Umschalten zwischen isotroper und anisotroper Diffusion in Abhängigkeit der Eingangswerte. Dieser Effekt liefert einen positiven Beitrag hinsichtlich der benötigten Iterationszahl im Rekonstruktionsvorgang. Die entwickelte Hardwarearchitektur für die Datenwiederherstellung einer einheitlichen Maskierung, bestehend aus quadratischen Ausschnitten, wurde erfolgreich auf einem Virtex-5 xc5vfx200t FPGA für neurologische Signale verifiziert. Neben der effizienten Parallelität der Hardwarestruktur wird die beschleunigte Rekonstruktion durch die hohe Verarbeitungsgeschwindigkeit von 81.391 MHz bei 16 Bit Auflösung umgesetzt. Das Ergebnis ist ein Datendurchsatz von 64 087 vollständigen Rekonstruktionen pro Sekunde und Zweig in der parallelen LNS-Architektur.

## 3.4 Dreidimensionale Datenrekonstruktion

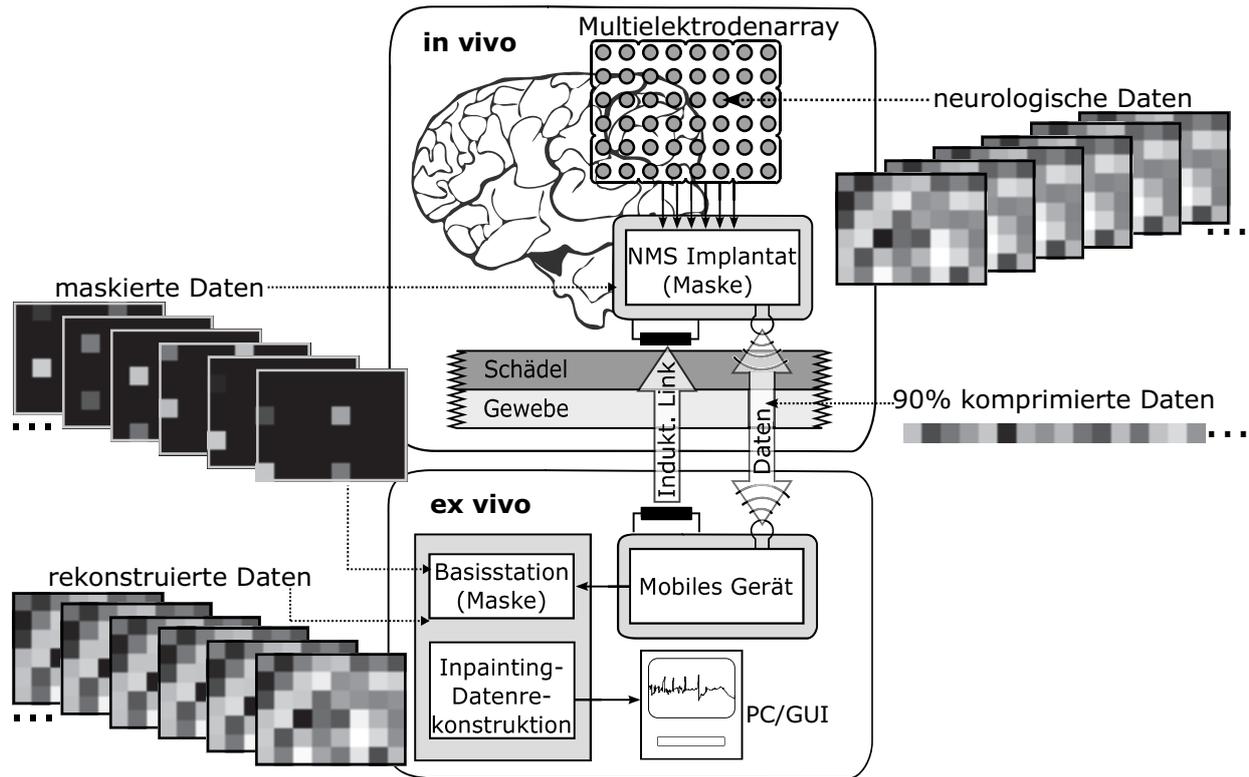
Die Untersuchungen im Abschnitt 3.3.2 haben gezeigt, dass sich ein repräsentanten-basiertes Inpainting effizient zur Rekonstruktion der maskierten neurologischen Daten eignet. Dahingehend wurde der SOP aus Abschnitt 2.4.2.1 hinsichtlich der Wiederherstellungsgüte sowie Berechnungszeit optimiert. Das dazugehörige Fundament dieser Betrachtung ist die Definition, dass im biomedizinischen Datensatz  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{MN \times T}$  bildähnliche Strukturen auftreten. Sowohl das niederfrequente Zeitverhalten der Daten als auch die Korrelation zwischen benachbarten Elektroden begünstigen diese Signalbeschaffenheiten. Allerdings wird bei der 2D-Interpretation letzteres nicht optimal ausgenutzt. Da die Elektroden in  $\mathbf{X}$  als Spalte angeordnet sind, existiert lediglich eine eindimensionale räumliche Korrelation. Außerdem besitzt jede Elektrode nur maximal zwei direkte Nachbarn im Datensatz. Um von der Zwischenelektrodenkorrelation effizienter profitieren zu können, erfolgt in diesem Abschnitt die Untersuchung eines Video-Inpaintingansatzes zur dreidimensionalen Rekonstruktion der neurologischen Aktivität [110]. Dementsprechend wird  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{M \times N \times T}$  als Tensor betrachtet. Die Frames in  $\mathbf{X}$  beinhalten dabei die vertikale und horizontale räumliche Anordnung der Elektroden. Wohingegen die Sequenz der aufeinanderfolgenden Frames die zeitliche Aufnahme der Signale für jede Elektrode angibt.

Die verschiedenen Zustände der neurologischen Daten in Abhängigkeit der inpaintingbasierten Verarbeitung sind in der Abb. 3.24 exemplarisch dargestellt. Im Gegensatz zur zweidimensionalen Verarbeitung aus Abschnitt 3.3.2 wird die neurologische Aktivität für die Rekonstruktion als Video bestehend aus Frames interpretiert. An der Maskierung der Signale während der invasiven Ableitung muss keine Änderung aufgrund der dreidimensionalen Datenwiederherstellung vorgenommen werden. Nach der ressourcenarmen Kompression erfolgt die Datenübertragung der verbleibenden Werte mit anschließender Repositionierung an die ursprünglichen Koordinaten im Tensor  $\mathbf{X}$  als Vorbereitung für die Rekonstruktion.

In Zuge dessen erfolgt in diesem Abschnitt die 3D-Erweiterung von zwei verschiedenen zweidimensionalen Inpaintingansätzen. Zum einen dient der bereits vorgestellte SOP dabei als Fundament. Und zum anderen wird ein Algorithmus betrachtet, welcher mittels  $K$ -SVD spezifische Dictionaries aus den maskierten Daten für die Rekonstruktion anlernt. Des Weiteren besteht der Datensatz in dieser abschließenden Untersuchung neben dem Ruhepotential der neurologischen Aktivität auch aus der Aufzeichnung epileptischer Anfälle.

### 3.4.1 Smooth Ordering of Cuboids

Im ersten Schritt soll die 3D-Erweiterung des IDM-basierten SOP-Ansatzes aus Abschnitt 3.3.2 untersucht werden. Die primäre Modifikation findet im Extraktionsprozess der Repräsentanten statt. Hier erfolgt die Überführung der  $R_M \times R_T$ -Patches des SOP



**Abbildung 3.24:** Realisierung des NMS basierend auf der IDM. Die am Rand befindlichen Daten stellen Matrizen mit Signalamplituden als Grauwerte dar. Die vertikale und horizontale Richtung entspricht der Anordnung der 48 Elektroden  $M \times N$  und die einzelnen Frames bilden die dazugehörige zeitliche Entwicklung  $T$  der Aufnahme  $\mathbf{X} \in [0, 1]^{M \times N \times T}$  ab.

in  $R_M \times R_N \times R_T$ -Cuboids. Dementsprechend wird nachfolgend die 3D-SOP Version als Smooth Ordering of Cuboids (SOC) betitelt. Die Verarbeitung der insgesamt

$$N_R = \prod_{d=\{M,N,T\}} (d - R_d - 1) \quad (3.36)$$

$$= (M - R_M + 1)(N - R_N + 1)(T - R_T + 1) \quad (3.37)$$

extrahierten Repräsentanten, als vektorisierte Darstellung in  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{R \times N_R}$  mit  $R = \prod_d R_d$ , ist identisch zum SOP-Algorithmus. Nach der Sortierung der Repräsentanten nähert die 1D-Interpolation, basierend auf der regulären Anordnung der Cuboids, die maskierten Einträge an. Die Interpolation bezieht sich auf die permutierten Zeilen in  $\mathbf{K}$ , welche die jeweiligen Subvolumina von  $\mathbf{X}$  darstellen.

In Tab. 3.10 ist ein Vergleich zwischen SOP und SOC hinsichtlich der Rekonstruktionsqualität dargestellt. Die beiden Masken  $\Omega_a$  und  $\Omega_b$  fließen mit vier Kompressionsgraden in die Untersuchung ein. Für den SOC werden die aufeinanderfolgenden Elektroden der 2D-Masken in die ursprüngliche  $M \times N$ -Anordnung innerhalb der Frames zurückge-

führt. Durch diese Vorgehensweise lassen sich die vorgestellten Masken als Tensoren  $\Omega \in \{0, 1\}^{M \times N \times T}$  umformen. Im SOP sowie SOC werden die überlappenden Repräsentanten zur Informationsgewinnung aus den Datenblöcken mit der Länge  $T = 128$  extrahiert. In den Ansätzen werden in den beiden Iterationen dafür jeweils  $\{48 \times 48, 8 \times 8\}$  Patches bzw.  $\{6 \times 8 \times 48, 2 \times 4 \times 8\}$  Cuboids verwendet. An dieser Stelle ist anzumerken, dass die Implementierung der gleichen Datenblocklänge  $T$  in beiden Algorithmen, SOP und SOC, keine akkurate Betrachtungs- bzw. Vergleichsgrundlage ist, da sich die Anzahl der Repräsentanten  $N_R$  für gleiche Repräsentantengrößen  $R = R_M R_N R_T$  unterscheidet. Im Gegensatz zur ersten Iteration, in welcher Gleichheit hinsichtlich der Repräsentantenanzahl  $N_{R,1}^{\text{SOP}} = N_{R,1}^{\text{SOC}}$  herrscht, führt die gewählte Parameterkonstellation zu einem Ungleichgewicht von

$$N_{R,2}^{\text{SOP}} - N_{R,2}^{\text{SOC}} = 1936 \quad (3.38)$$

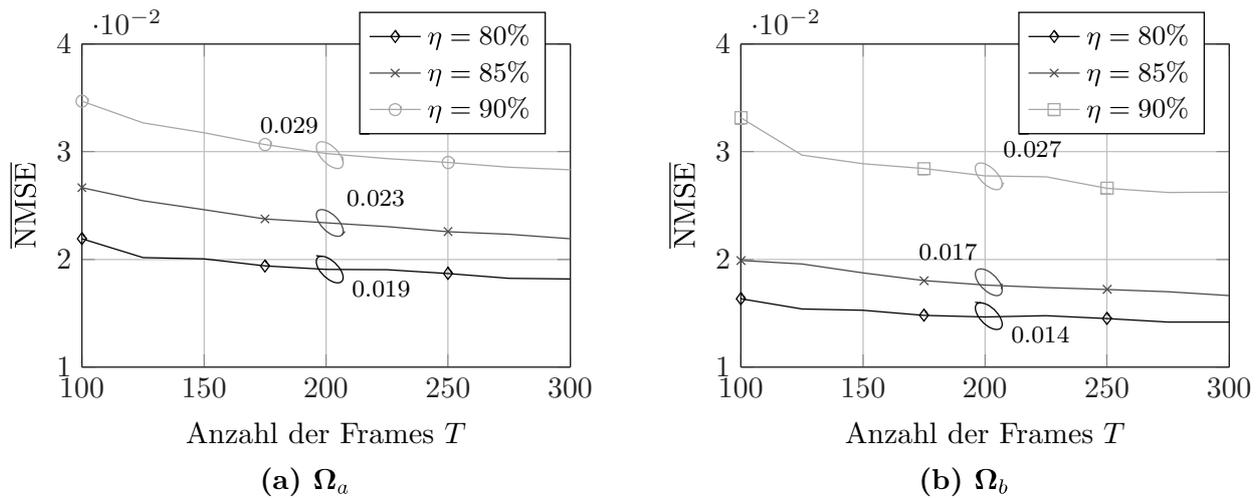
$$\approx 39\% N_{R,2}^{\text{SOP}} \quad (3.39)$$

Repräsentanten zu Lasten des SOC in der zweiten Iteration. Bei einer Einschränkung der Repräsentantenmenge nimmt die Vielfalt hinsichtlich der Vektoren in der Repräsentantenmatrix  $\mathbf{K}$  ab. Stehen weniger Repräsentanten innerhalb des Permutationsprozesses zur Verfügung, ist die Anordnung selbiger eingeschränkt, was nachteilig für die Regularität der Teildarstellungen sein kann. Das partielle Auftreten von irregulären Abweichungen zwischen den Repräsentanten resultiert nach der 1D-Interpolation der Teildarstellungen  $\mathbf{C}_i$  in ein suboptimales Rekonstruktionsergebnis.

In Gl. (3.37) ist die Abhängigkeit der Repräsentantenanzahl  $N_R$  von der Framemenge bzw. Datenblocklänge  $T$  definiert. Ergänzend zeigt die Abb. 3.25 die Wiederherstellungsgüte als Funktion von  $T$  für unterschiedliche Masken und Kompressionsgrade. Es wird deutlich, dass mit zunehmender Datenblocklänge eine Erhöhung der Repräsentan-

**Tabelle 3.10:** Gegenüberstellung der Rekonstruktionsqualität vom SOP und SOC in Abhängigkeit des Kompressionsgrades  $\eta$ . Beide Ansätze nutzen  $\{48 \times 48, 8 \times 8\}$  Patches bzw.  $\{6 \times 8 \times 48, 2 \times 4 \times 8\}$  Cuboids sowie die vorgestellte Beschleunigungstechnik mit  $G_1 = 1$  und  $G_2 = 10$  für die jeweils 10 Permutationen pro Iteration. Die Datenblocklänge beträgt  $T = 128$ .

Verfahren	Kompressionsgrad				Berechnungsverteilung
	80%	85%	90%	95%	
IDM, SOP ( $\Omega_a$ )	0.019	0.024	0.031	0.060	asymmetrisch
IDM, SOC ( $\Omega_a$ )	0.022	0.031	0.037	0.065	asymmetrisch
IDM, SOP ( $\Omega_b$ )	0.015	0.018	0.029	0.050	asymmetrisch
IDM, SOC ( $\Omega_b$ )	0.017	0.023	0.030	0.057	asymmetrisch



**Abbildung 3.25:** Positive Entwicklung der Rekonstruktionsgüte durch eine Erhöhung der Repräsentantenanzahl  $N_R$  für die Permutation in Abhängigkeit der Datenblocklänge  $T$ .

tenanzahl und die damit verbundene Vielfalt einhergeht, was – wie zu sehen ist – zu einer Erhöhung der Rekonstruktionsqualität führt.

Die Tab. 3.10 zeigt, dass aufgrund der starken Dysbalance in der Repräsentantenanzahl (39%) der SOC-Algorithmus für gleiche Kompressionsgrade im Vergleich zum 3D-Ansatz geringere Wiederherstellungsfehler aufweist. Offensichtlich wird die Rekonstruktionsqualität in dieser Auslegung stärker durch die Repräsentantenanzahl als durch die Ausnutzung einer dritten Dimension als weitere Korrelationsrichtung für die Elektroden dominiert. Dementsprechend ist im nächsten Schritt zu untersuchen, ob die Berücksichtigung der räumlichen Elektrodenkorrelationen zu einer Erhöhung der SOC-Rekonstruktionsgüte im Vergleich zum klassischen SOP-Ansatz führen kann. Maßgebend für die Datenwiedergewinnung ist die Permutation. Daher lässt sich nur ein objektiver Vergleich aufstellen, wenn beide Ansätze über die gleiche Repräsentantenanzahl für die Permutation verfügen. Gemäß Gl. (2.100) soll mit Hilfe der iterationsübergreifenden Anzahl der Repräsentanten

$$\sum_{i=1}^{I_{\max}} N_{R,i}^{\text{SOC}} = \sum_{i=1}^{I_{\max}} \prod_{d=\{M,N,T\}} (d - R_{i,d} + 1) \quad (3.40)$$

eine Anpassung der Datenblocklänge  $T$  im SOC erfolgen. Daraus resultiert die Forderung  $N_{R,1}^{\text{SOC}} + N_{R,2}^{\text{SOC}} \stackrel{!}{=} N_{R,1}^{\text{SOP}} + N_{R,2}^{\text{SOP}}$ . Die Verteilung der Repräsentantenanzahl hinsichtlich

der jeweiligen Iteration soll in dieser Untersuchung eine untergeordnete Rolle einnehmen. Um die Gleichheit zu erfüllen, muss der folgende Zusammenhang gelten:

$$T^{SOC} = \frac{\sum_{i=1}^{I_{\max}} \prod_{d=\{MN, T^{SOP}\}} (d - R_{d,i}^{SOP} + 1) + \sum_{i=1}^{I_{\max}} (R_{T,i}^{SOC} - 1) \prod_{d=\{M,N\}} (d - R_{d,i}^{SOC} + 1)}{\sum_{i=1}^{I_{\max}} \prod_{d=\{M,N\}} (d - R_{d,i}^{SOC} + 1)}. \quad (3.41)$$

Eine detailliertere Herleitung für die Anpassung der Datenblocklänge  $T^{SOC}$  um die Gleichheit zwischen extrahierten Repräsentanten der Rekonstruktionsvarianten zu erzwingen ist im Anhang A.2 zu finden. Wird die eingeführte Parameterkonstellation –  $\{48 \times 48, 8 \times 8\}$  Patches bzw.  $\{6 \times 8 \times 48, 2 \times 4 \times 8\}$  Cuboids – berücksichtigt, so kann die Dimensionierungsvorschrift der Datenblocklänge  $T$  hinsichtlich des SOC nach Gl. (3.41) relativ kompakt formuliert werden:

$$T^{SOC} = \frac{21}{13} T^{SOP} - \frac{56}{13}. \quad (3.42)$$

Bleibt die Datenblocklänge im SOP-Algorithmus auf  $T^{SOP} = 128$  festgesetzt, muss die Frameanzahl beim SOC bei ca.  $T^{SOC} = 202$  für die gleiche Repräsentantenanzahl betrachtet werden. In beiden Ansätzen stehen somit iterationsübergreifend ca. 5042 Repräsentanten für die Permutation zur Verfügung. Unter Berücksichtigung der Datenblockanpassung lässt sich aus Abb. 3.25 die mittlere SOC-Rekonstruktionsqualität ableiten. Dafür sind die Kurven an den maskierten Stellen bei  $T = 202$  mit den dazugehörigen Einträgen der Tab. 3.10 für die jeweiligen Kompressionsstufen zu vergleichen. Unabhängig von der Maske und Kompression zeigt sich nach der Anpassung der Datenblocklänge lediglich ein minimaler Vorsprung hinsichtlich der Wiederherstellungsqualität für den SOC-Ansatz.

Über die statistischen Kennwerte der extrahierten Repräsentanten aus verschiedenen Kollektionsmatrizen  $\mathbf{K}$ , basierend auf unmaskierten neurologischen Daten  $\mathbf{X}$ , kann ebenfalls kein signifikanter Unterschied zwischen den Ansätzen festgestellt werden. Die Tab. 3.11 stellt, neben dem arithmetischen Mittelwert und der Standardabweichung,

**Tabelle 3.11:** Statistische Kennwerte des empirischen Korrelationskoeffizientens  $\rho_{ij}$  hinsichtlich der extrahierten Repräsentanten: Mittelwert  $|\overline{\rho_{ij}}|$ , Standardabweichung  $\sigma_{|\rho_{ij}|}$  sowie maximaler und minimaler Korrelationswert.

Ansatz	$ \overline{\rho_{ij}} $	$\sigma_{ \rho_{ij} }$	$\max( \rho_{ij} )$	$\min( \rho_{ij} )$
SOC	0.252	$\pm 0.227$	0.996	$1.035 \cdot 10^{-7}$
SOP	0.240	$\pm 0.195$	0.996	$5.483 \cdot 10^{-8}$

den minimalen und maximalen Wert des empirischen Korrelationskoeffizienten nach Pearson

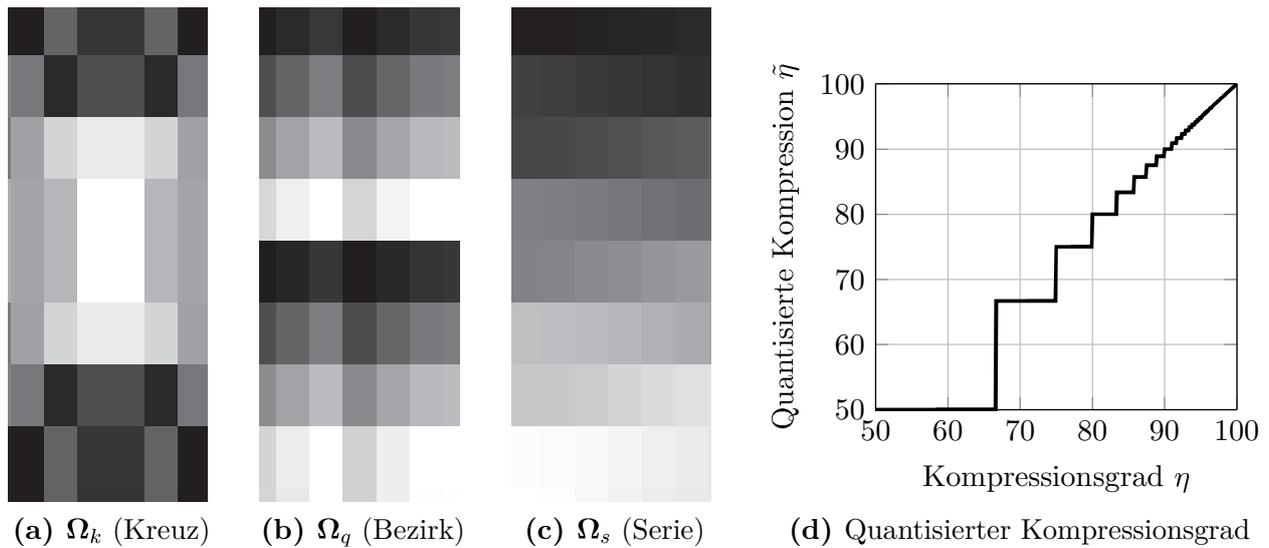
$$\rho_{i,j} = \frac{\langle \mathbf{k}_i - \bar{\mathbf{k}}_i, \mathbf{k}_j - \bar{\mathbf{k}}_j \rangle}{\|\mathbf{k}_i - \bar{\mathbf{k}}_i\|_2 \|\mathbf{k}_j - \bar{\mathbf{k}}_j\|_2} \quad (3.43)$$

zwischen allen Repräsentanten in  $\mathbf{K}$  dar. Das Resultat der Berechnung aller Korrelationskoeffizienten gemäß Gl. (3.43) bildet eine symmetrische Matrix  $\rho_{ij} = \rho_{ji}$ . Dabei besteht die Hauptdiagonale aus Einseinträgen, da dort die Autokorrelationswerte  $\rho_{ii}$  der Repräsentanten zu finden sind. Sowohl die Autokorrelationen als auch die Einträge, entweder oberhalb oder unterhalb der Hauptdiagonalen, fließen in die Bestimmung der statistischen Kennwerte nicht ein. Die daraus resultierende Untermenge an Koeffizienten bildet eine nilpotente Dreiecksmatrix mit  $\rho_{ij}$  für  $i < j$  (oder alternativ  $i > j$  wegen der Symmetrie). Diese Menge wurde zur Bestimmung der Kennwerte in Tab 3.11 berücksichtigt. Auch anhand dieser Kennwerte ist kein signifikanter Unterschied zwischen den Ansätze zu erkennen. Die durchschnittlichen Korrelationswerte, hinsichtlich der extrahierten Repräsentanten, sind beim 3D-Ansatz SOC lediglich minimal höher. Ein eindeutiger Vorteil für die Verwendung von überlappenden Cuboids zur Ausnutzung der Korrelation von benachbarten Elektroden in zwei Raumrichtungen kann – für den SOC-Ansatz gegenüber dem SOP – nicht abgeleitet werden.

Um weitergehend die Frage zu beantworten, ob generell eine dreidimensionale Verarbeitung der neurologischen Aktivität vorteilhaft ist, wird nachfolgend eine weitere Lösung der IDM eingeführt. Diese basiert auf dem  $K$ -SVD-Inpainting aus Abschnitt 2.4.2.3. Abschließend soll das  $K$ -SVD-Inpainting sowohl mit der 3D-Erweiterung des SOP-Algorithmus als auch mit einem klassischen Videokompressionsverfahren wie MPEG (H.264) verglichen werden. Im Zuge dessen erfolgt zudem die Vorstellung weiterer Umsetzungsvarianten zur Maskierung der biomedizinischen Signale.

### 3.4.2 $K$ -SVD Inpainting mit angelernten Repräsentanten

Die Effizienz einer möglichen Ausnutzung von zwei räumlichen und einer zeitlichen Korrelationsabhängigkeit innerhalb der neurologischen Aktivität wird in diesem Abschnitt weiter untersucht. Im vorherigen Abschnitt erzielte der SOC-Algorithmus lediglich durch Angleichung der extrahierten Repräsentantenanzahl eine geringfügige Verbesserung der Rekonstruktionsqualität gegenüber dem ursprünglichen SOP. Mit dem Wissen um die Wichtigkeit einer großen Anzahl und Vielfalt von Repräsentanten für die Rekonstruktion erfolgt die Einführung eines dreidimensionalen  $K$ -SVD-Inpaintingansatzes. Dieser basiert auf den Grundlagen, welche in Abschnitt 2.4.2.3 vorgestellt wurden. Durch das Anlernen von spezifischen Dictionaries steht dem repräsentantenbasierten Inpainting, neben den extrahierten Cuboids, eine weitere Informationsquelle zur Rekonstruktion von neurologischen Daten zur Verfügung.



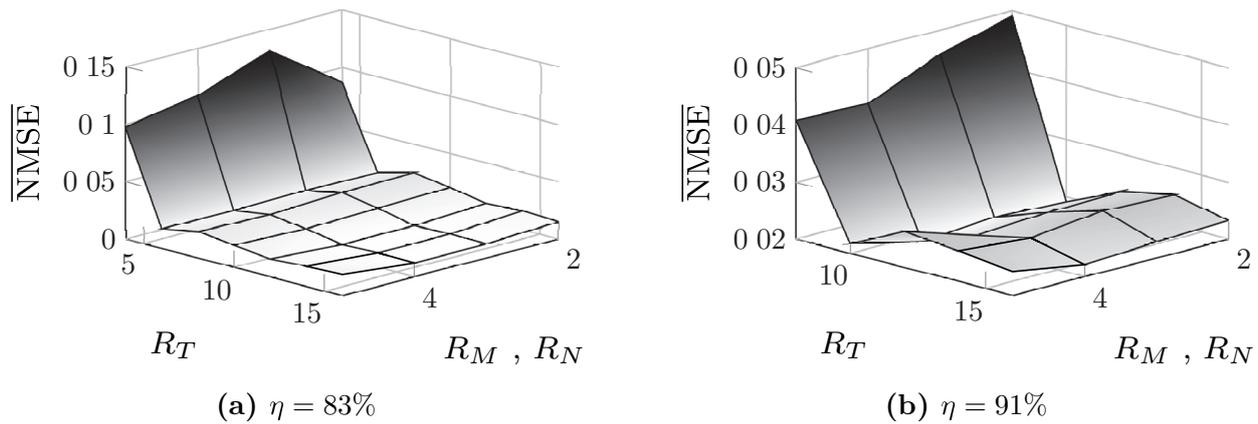
**Abbildung 3.26:** Quantisierter Kompressionsgrad aufgrund einer definierten Menge an aktiven Elektroden pro Frame. Die Reduktion der Daten wird erreicht durch wiederkehrende Muster in der Elektrodenaktivität.

**Entwurf der Maske** In den Abb. 3.26a bis 3.26c sind weitere Masken  $\Omega \in \{0, 1\}^{M \times N \times T}$  für die nachfolgende 3D-Verarbeitung der biomedizinischen Signale dargestellt. Die Intensitäten im  $N \times M = 8 \times 6$  Panel spiegeln das zeitliche Aktivitätsmuster der Elektroden wider. In dieser Vorschrift wird zur Einstellung des Datenkompressionsgrades eine künstliche Abtastfrequenz  $1 - \eta$  definiert. Die daraus resultierende Abtastperiode  $\lfloor 1/(1 - \eta) \rfloor$  steuert die Replikationsrate des vorgegebenen Maskenmusters für die Aktivität der Elektrodenzustände. Aufgrund der definierten Elektrodenanzahl sind lediglich diskrete Perioden möglich. Dies führt zu einem quantisierten Datenkompressionsgrad

$$\tilde{\eta} = 1 - \frac{1}{\lfloor 1/(1 - \eta) \rfloor} \quad (3.44)$$

als Funktion der vorgegebenen Kompression  $\eta$ . Die Stufen in Abb. 3.26d verdeutlichen, dass die Auflösung von  $\tilde{\eta}$  mit Erhöhung des Kompressionsgrades immer feiner wird. Dementsprechend ist eine starke Abstufung im Bereich hoher Datenkompression einstellbar, was den Gebrauch dieser Masken für das NMS praktikabel macht. Das Muster der Aktivität (Abb. 3.26a bis 3.26c) kann als verschobener Startpunkt der jeweiligen Elektrode interpretiert werden. Sowohl der Start als auch die Replikation des Musters für die Zeitabschnitte der Elektrodenaufnahme wird mit der künstlichen Abtastfrequenz für den jeweiligen Kompressionsgrad skaliert. Zusätzlich fließt als Vergleichselement eine Zufallsmaske  $\Omega_n$  ein, deren  $\{0, 1\}$ -Einträge einer Normalverteilung folgen.

**Framework** Das übergeordnete Framework, welches die Maske  $\Omega$  als Aktivitätssteuerung der Elektroden sowie die Wiederherstellung der biomedizinischen Daten, mit Hilfe von Inpainting-Verfahren, bleibt in diesem Abschnitt weiterhin gültig. Es werden

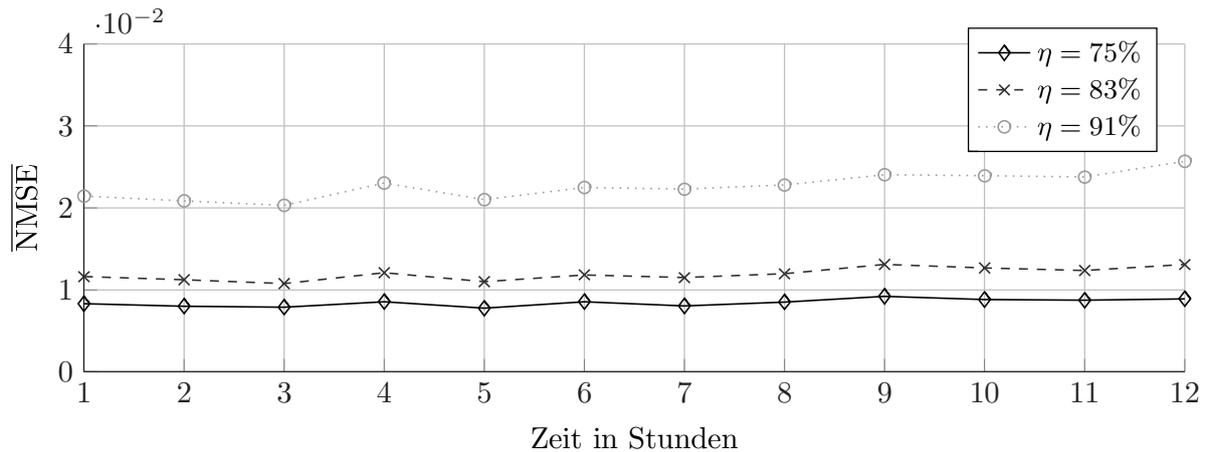


**Abbildung 3.27:** Untersuchung der Cuboiddimension  $\{R_M, R_N, R_T\}$  und dessen Auswirkung auf die Rekonstruktionsqualität für zwei Kompressionsgrade  $\eta = \{83\%, 91\%\}$ .

nachfolgend lediglich die besonderen Unterschiede zum vorher diskutierten Framework erwähnt. Als Fundament für den 3D-Inpaintingansatz zur Datenwiederherstellung soll der Algorithmus, aus Abschnitt 2.4.2.3, basierend auf einem angelernten Dictionary mittels  $K$ -SVD-Verfahren, dienen. In diesem Framework erfolgt, je nach Aufnahmelänge der neurologischen Aktivität, eine initiale oder in regelmäßigen Abständen durchgeführte Kalibrierung. Dafür werden kurze Sequenzen aus unmaskierten Datenframes benötigt. Basierend auf diesem Datenblock erfolgt das Anlernen des Dictionarys  $\mathbf{D}$ . Für alle weiteren Datenblöcke beginnt die Verarbeitung mit der Extraktion von Repräsentanten aus den maskierten Framesequenzen. Dafür werden anstatt von Patches, wie beim SOP, überlappende Cuboids  $R_M \times R_N \times R_T$  für die 3D-Verarbeitung eingesetzt.

**Dimension der Cuboids** In der Abb. 3.27 ist der Einfluss der Dimension der überlappenden Extraktionscuboids hinsichtlich der Güte dargestellt. Aus Gründen der Übersicht wird innerhalb der Frames eine quadratische räumliche Ausdehnung des Cuboids  $R_M = R_N$  festgelegt. Die Plots zeigen, dass diese räumliche Cuboiddimension innerhalb der Frames praktisch frei wählbar ist. Im Gegensatz dazu fällt der Rekonstruktionsfehler mit Vergrößerung der zeitlichen Cuboiddimension  $R_T$  anfangs stark ab, um dann näherungsweise zu saturieren. Mit Erhöhung der Kompression verschiebt sich der Übergang zwischen diesen Fehlerbereichen zu größeren Cuboids in Zeitrichtung. Demzufolge sind Cuboids einzusetzen, die in Abhängigkeit der maskenbasierten Kompression die Informationen entlang vieler Frames extrahieren. Gleichzeitig sollte das Cuboid eine geringe quadratische Ausdehnung innerhalb der Frames aufweisen, um die Vielfalt der extrahierten Repräsentanten für die Datenwiederherstellung zu erhöhen.

Im weiteren Verlauf dieses Abschnittes werden für die Simulationen Cuboids der Größe  $\{4, 4, 12\}$  zur Informationsextraktion verwendet. Die Kompression in den jeweiligen Untersuchungen erfolgt durch den Einsatz der Maske  $\Omega_k$ . Des Weiteren soll dem OMP zustehen, alle möglichen Cuboids des Dictionarys  $\mathbf{D}$  zu nutzen, um die Güte der Re-



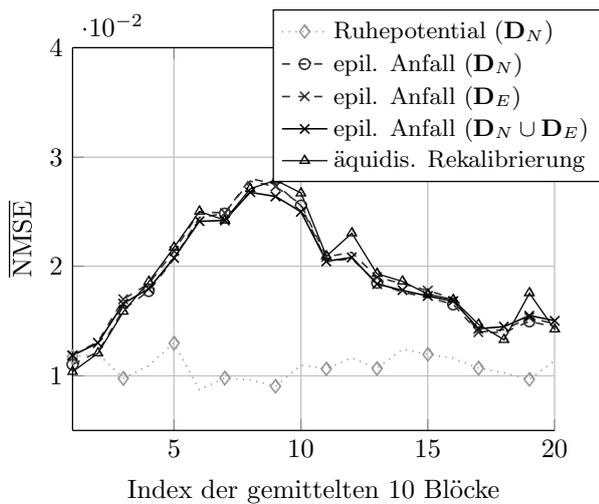
**Abbildung 3.28:** Entwicklung des Rekonstruktionsfehlers über einen Zeitraum von zwölf Stunden für verschiedene Kompressionen. Zu Beginn wurde das Dictionary einmalig für alle Rekonstruktionen im Sinne einer initialen Kalibrierung angelernt.

konstruktion zu optimieren. Allerdings bedeutet dies nicht zwangsläufig, dass auch alle Cuboids in die Berechnung einbezogen werden. Das Anlernen der verwendeten Dictionaries erfolgt innerhalb von fünf Iterationen mit Hilfe des  $K$ -SVD-Algorithmus.

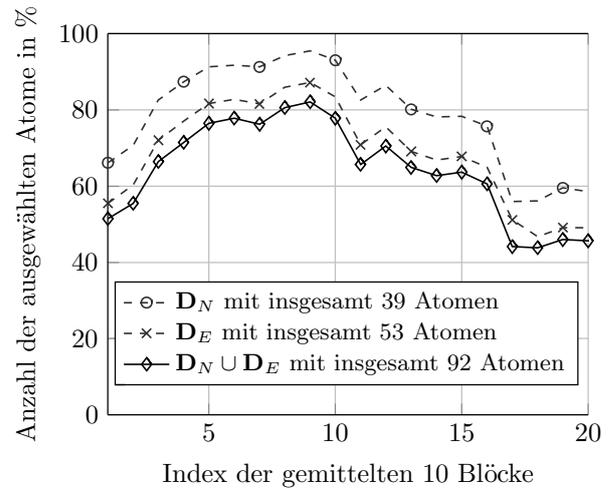
**Rekalibrierung und epileptischen Anfälle** Basierend auf diesen Parametern sollen im nächsten Schritt die zeitliche Positionierung und Abstände hinsichtlich der Kalibrierung sowie Rekonstruktion untersucht werden. Das Ziel ist es, ein geeignetes Intervall zwischen den Prozessen der Rekalibrierung während der Laufzeit abzuleiten, um dadurch die Qualität der Datenwiederherstellung beizubehalten.

Die Abb. 3.28 stellt den Fehler zwischen der ursprünglichen neurologischen Aktivität des Patienten vom EZE und der  $K$ -SVD-Inpaintingrekonstruktion nach der Maskierung  $\Omega_k$  dar. Dabei wurden drei verschiedene Kompressionsstufen für eine Signaldauer von zwölf Stunden untersucht. Allerdings wurde für die Rekonstruktion nicht die komplette neurologische Aufnahme von zwölf Stunden ( $12 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 1024$  Sample) berücksichtigt. Stattdessen erfolgte wieder eine Aufteilung und Verarbeitung des Datensatzes in gleich große Blöcke der Länge  $T = 128$ . Zur Identifikation und Festlegung des geeigneten Zeitpunktes für eine mögliche Rekalibrierung, ist lediglich die übergeordnete Entwicklung des Fehlers für große Zeitsintervalle zu analysieren. Daher ist die Rekonstruktion aller 345 600 Datenblöcke nicht erforderlich. Für die Verläufe der Abb. 3.28 wurden äquidistant im Fünf-Minutentakt Datenpunkte erzeugt. Daraus resultieren zwölf Rekonstruktionen pro Stunde.

Anhand dieser Untersuchung ist zu erkennen, dass die Repräsentanten aus dem einmalig angelernten Dictionary während der initialen Kalibrierung und durch die Extraktion der maskierten Cuboids für eine näherungsweise gleichbleibende Wiederherstellungsqualität sorgt. Im Zuge dessen weist dieses Ergebnis, auf den ersten Blick, keine Notwendigkeit für eine zeitlich äquidistante Rekalibrierung des Dictionarys für die Rekonstruktion



(a) Einfluss verschiedener Dictionaries



(b) Anzahl der Atome während des Anfalls

**Abbildung 3.29:** Vergleich der Rekonstruktionsqualität von aufeinanderfolgenden Datenblöcken, welche aus einem Ruhepotential sowie einem epileptischen Anfall bestehen. Die neurologischen Signale, der Dauer von 25 Sekunden, wurden zuvor einheitlich mit der Maske  $\Omega_k$  um 83.3% komprimiert.

auf. Im Sinne der Vollständigkeit und um kein Potential für eine Erhöhung der Rekonstruktionsqualität unberücksichtigt zu lassen, erfolgt nachfolgend trotzdem die Implementierung und kurze Betrachtung einer periodischen Dictionary-Rekalibrierung für die Rekonstruktion von epileptischen Anfällen.

Abschließend soll die Lösung der IDM in diesem Abschnitt für epileptischen Anfälle betrachtet werden. Im Zuge dessen erfolgt die Gegenüberstellung der Wiederherstellungsqualität der neurologischen Aktivität des EZE-Patientens aus Ruhepotential und epileptischen Anfällen. Der komplette Datensatz besteht aus einer 24 h-Aufnahme und beinhaltet ca. 14 aufgezeichnete epileptische Anfälle [51]. Letztere wurden teilweise unter klinischen Bedingungen kontrolliert durch die Mediziner hervorgerufen. Für die nachfolgenden Untersuchungen wird exemplarisch die Aufnahme des Ruhepotentials sowie eines epileptischen Anfalles der 48 Elektroden für eine Dauer von 25 Sekunden betrachtet. Dabei handelt es sich um die Verarbeitung von insgesamt 200 Datenblöcken der Länge 128 Sample. Anschließend werden, für eine übergeordnete Betrachtung, immer 10 Blöcke zu einem mittleren Datenpunkt in den Darstellungen zusammengefasst. Des Weiteren bezeichnet  $\mathbf{D}_N$  ein angelerntes Dictionary mit 39 Atomen aus neurologischen Signalen des Ruhepotentials sowie  $\mathbf{D}_E$  ein angelerntes Dictionary mit 53 Atomen aus epileptischen Anfällen.

Die Abb. 3.29 zeigt die Gegenüberstellung der Wiederherstellungsergebnisse aus dem Ruhepotential sowie der Kombination aus der sogenannten Phase der Aura und dem eigentlichen epileptischen Anfall. In der Neurologie kennzeichnet der Begriff der Aura unterschiedliche Arten und Affekte von Sinneswahrnehmungen. Bei einigen Patienten

wird ein epileptischer Anfall kurz vorher durch die Aura angekündigt. Natürlich unterscheidet sich das Signalverhalten stark in den verschiedenen Phasen der neurologischen Aktivität. Während des Anfalls zeichnen die einzelnen Elektroden im ECG/EEG Signale mit deutlich höherer Frequenz und Amplitude auf. Als Folge dessen dient das angelegte Dictionary  $\mathbf{D}_N$  für das LFP-Ruhepotential nicht mehr als zutreffende Grundlage zur Berechnung der Rekonstruktion. Dies wird in Abb. 3.29a durch die signifikante Erhöhung des Wiederherstellungsfehlers im Falle des epileptischen Anfalls deutlich. Neben der Untersuchung eines Dictionarys  $\mathbf{D}_E$ , welches ausschließlich aus Anfällen angeleitet wurde, zeigt ein kombiniertes Dictionary  $\mathbf{D}_N \cup \mathbf{D}_E$  lediglich eine geringfügige Verbesserung der Rekonstruktionsqualität. Dies liegt in der Herkunft der ausgewählten Repräsentanten begründet. Für die Wiederherstellung der neurologischen Aktivität werden sowohl die Atome aus dem gemeinsamen Dictionary  $\mathbf{D}_N \cup \mathbf{D}_E$  als auch die extrahierten Repräsentanten aus dem dazugehörigen Datenblock verwendet. Gemäß der Erwartung wird, wie in Abb. 3.29b zu sehen, eine größere Anzahl an ausgewählten Atomen aus dem jeweiligen Dictionary für den zeitlichen Abschnitt des epileptischen Anfalls eingesetzt. Selbst mit dem gemeinsamen Dictionary  $\mathbf{D}_N \cup \mathbf{D}_E$  ist, aufgrund der hohen Komplexität der Signalverläufe, keine signifikante Verbesserung der Güte möglich. Im Vergleich zum Ruhepotential vor und nach dem Anfall fließen lediglich zusätzliche 2.5% der Atome aus  $\mathbf{D}_E$  in die Rekonstruktion ein. Der restliche Großanteil der erhöhten Auswahl der Atome, während des Anfalls, besteht aus den angelegten Signalen des Ruhepotentials aus  $\mathbf{D}_N$ . Des Weiteren zeigt die Abb. 3.29a das Ergebnis einer zeitlich äquidistanten Rekalibrierung des Dictionarys  $\mathbf{D}_E$ . Diesbezüglich wurde das folgende Schema verwendet: Mit Hilfe eines Datenblockes wird das Dictionary angeleitet. Danach basiert die Rekonstruktion der darauffolgenden neun Blöcke auf dem angelegten Dictionary. Nach der Verarbeitung des letzten Blockes erfolgt das nächste Anlernen, wodurch eine Periode aus zehn Datenblöcken entsteht. Leider resultiert auch die Implementierung der zeitlich äquidistanten Rekalibrierung nicht in eine signifikante Verbesserung der Rekonstruktionsqualität.

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass die dargestellte Verarbeitung der neurologischen Aktivität, unter Berücksichtigung von epileptischen Anfällen, nicht von einer hochfrequentierten Rekalibrierung profitiert. Die Implementierung eines gemeinsamen Dictionary, bestehend aus angelegten neurologischen Signalen des Ruhepotentials und im Anfall, verzeichnet lediglich eine geringfügige Verbesserung der Rekonstruktionsqualität. Nichtsdestotrotz werden die Ergebnisse dieser Untersuchung für das bestehende Framework zur Verarbeitung der LFP-Signale berücksichtigt. Nach der Betrachtung und Korrektur von Fehlern an den Rändern der Datenblöcke erfolgt die abschließende Untersuchung der Wiederherstellungsgüte sowie ein Vergleich mit anderen Ansätzen.

### 3.4.3 Korrektur von Randfehlern

Wie bereits in Abschnitt 3.3.3.1 im Zusammenhang mit dem SOP erläutert, führt eine unzureichende Anzahl von extrahierten Repräsentanten an den Rändern zu einer großen Diskrepanz zwischen den rekonstruierten und originalen Daten. Dabei macht es keinen Unterschied, ob es sich bei den Repräsentanten um Patches oder Cuboids handelt. Die Abb. 3.30a zeigt anhand der Strichlinie, dass ein deutlicher Ausschlag des Fehlerverlaufes an den Grenzübergängen der 3D-Datenblöcke auftritt. In dieser Untersuchung ist der mittlere NMSE pro Frame dargestellt und berücksichtigt, aus statistischen Gründen, eine große Anzahl von  $\mathbf{X}_{\text{rec}}$  und  $\mathbf{X}$  Paaren. Die Datenblöcke besitzen jeweils  $T = 128$  Frames, wobei ein Frame die Größe  $M \times N = 6 \times 8$  des MEA abbildet. Neben der unnötigen Erhöhung des Gesamtfehlers entsteht an den Rändern des Datenblockes, durch dieses Phänomen, zusätzlich eine deutliche numerische, selbst optisch erfassbare, Abweichung zum Original.

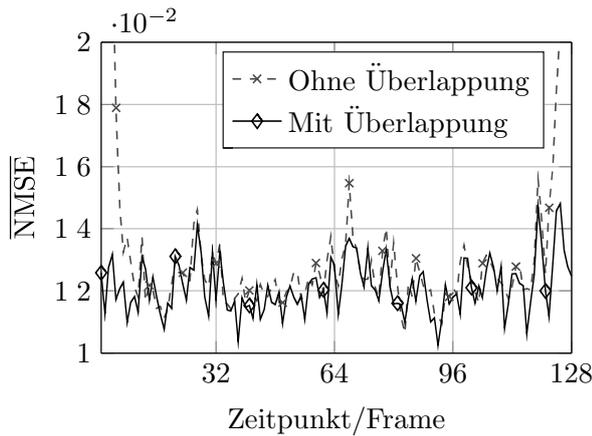
Ein Ansatz, um die Auswirkung der fehlenden Repräsentanten zu reduzieren, ist die Implementierung überlappender Frames zwischen den aufeinanderfolgenden Datenblöcken. Dabei dient der Überlappungsbereich lediglich der Erhöhung der Repräsentanzanzahl und -vielfalt. Das Approximationsergebnis dieser überschneidenden Frames wird allerdings für die Rekonstruktion der neurologischen Daten verworfen.

In den Abb. 3.30b bis 3.30d sind die Untersuchungen des Überlappungsgrades  $\Gamma_o$  der Frames in Abhängigkeit der Datenblocklänge  $T$  und Kompression dargestellt. Der Fehler weist anfänglich einen starken Abfall auf, welcher dann in einen näherungsweise konstanten Verlauf übergeht. Mit zunehmender Datenblocklänge verschiebt sich dieser Übergang zu einem geringen Überschneidungsgrad der Frames. Dieses Verhalten korreliert mit der Verfügbarkeit der größeren Anzahl an extrahierten Repräsentanten, wodurch ein effizienteres Dictionary generiert werden kann.

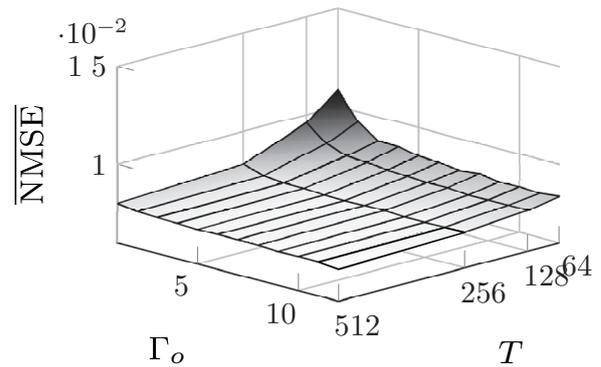
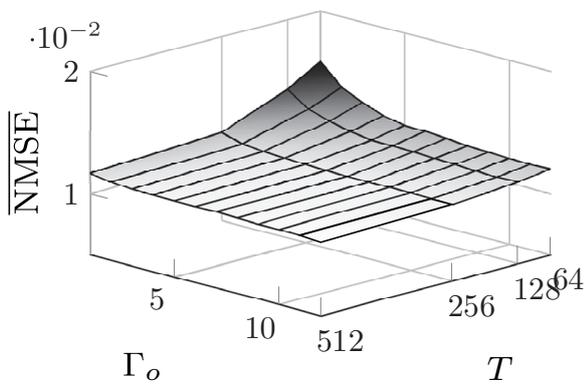
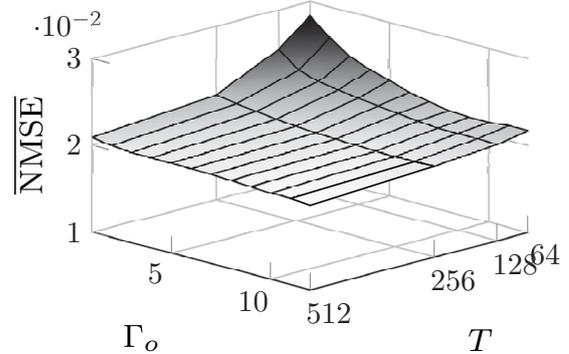
Die Verbesserung des Rekonstruktionsfehlers, durch die Umsetzung von überlappenden Frames an den Rändern mit anschließendem Verwurf selbiger, ist in Abb. 3.30a als durchgezogene Linie dargestellt. Hier wurde ein Überlappungsgrad von zwölf Frames gewählt. Der Anstieg des NMSE an den Grenzübergängen der Datenblöcke ist drastisch reduziert, was sich positiv auf den Gesamtfehler auswirkt. Diesbezüglich ist eine durchschnittliche Verringerung des NMSE von 0.014 auf 0.012 zu verzeichnen, was mit einer optischen Verbesserung des neurologischen Signalverlaufes an den Rändern einhergeht.

### 3.4.4 Rekonstruktionsqualität

Als Abschluss der Untersuchung der 3D-Inpaintingrekonstruktion von maskierten neurologischen Signale erfolgt eine Gegenüberstellung der betrachteten Lösungen der IDM hinsichtlich ihrer Wiederherstellungsgüte. Alle Datenpunkte bestehen aus der arithmetischen Mittelwertbildung von tausend Rekonstruktionsergebnissen. In jeder Simulation wurde zufällig ein Datenblock  $\mathbf{X} \in [0, 1]^{M \times N \times T}$ , bestehend aus  $T = 128$  Frames, der EZE-Aufnahme ausgewählt. In den Vergleich fließen die IDM-Ansätze SOC und  $K$ -SVD



(a) Präsenz von Randfehlern

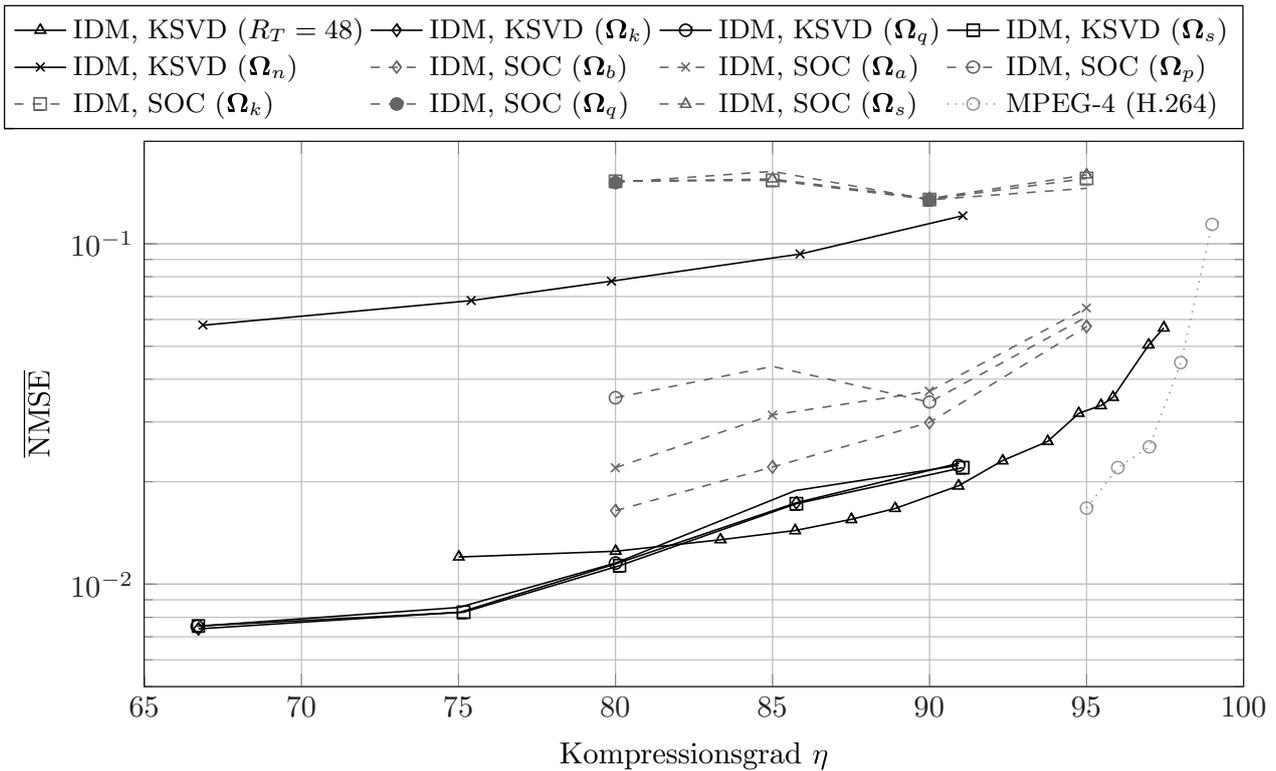
(b) Überlappung der Datenblöcke,  $\eta = 75\%$ (c) Überlappung der Datenblöcke,  $\eta = 83\%$ (d) Überlappung der Datenblöcke,  $\eta = 91\%$ 

**Abbildung 3.30:** Darstellung, Analyse sowie Korrektur der Fehlererhöhung an den Rändern aufeinanderfolgender Datenblöcke aus neurologischen Signalen. Abhängigkeit der Rekonstruktionsgüte von der Datenblocklänge  $T$  und Überlappungsgrad  $\Gamma_o$  für verschiedene Kompressionen.

unter Berücksichtigung verschiedener Masken sowie MPEG-4 (H.264) als klassisches Videokompressionsverfahren mit symmetrischer Verteilung des Berechnungsaufwandes ein. Aufgrund der Elektrodenarraydimension von  $6 \times 8$  liefert eine Frame-by-Frame Variante als JPEG-Videoansatz (bzw. JPEG2000) keine verwertbaren Ergebnisse und wird daher für den Vergleich nicht berücksichtigt.

In der Abb. 3.31 ist der Rekonstruktionsfehler als Funktion des Kompressionsgrades  $\eta$  dargestellt. Mit MPEG-4 (H.264) Verfahren, welche auf Datenkompression aufgelegt wurde, lassen sich die neurologischen Daten effizient komprimieren und wiederherstellen. Allerdings sind für diese Art von Signaltyp lediglich Datenkompressionen über 95% möglich.

Die Kombination aus dem neu eingeführten Entwurf der Maskierung, Abb. 3.26, und der dreidimensionalen SOC-Rekonstruktion resultiert in einer unbrauchbaren Wiederherstellung der biomedizinischen Signale. Wohingegen die Verwendung der zweidimensionalen Masken  $\Omega \in \{0, 1\}^{MN \times T}$ , nach der Umformung in die dreidimensionale Darstellung



**Abbildung 3.31:** NMSE-Auswertung der neurologischen Aktivität in Abhängigkeit des Kompressionsgrades  $\eta$ . Gegenüberstellung der vorgestellten Ansätze, SOC und  $K$ -SVD, zur 3D-Rekonstruktion für verschiedene Masken. Des Weiteren dient ein klassisches Videokompressionsverfahren, hier MPEG-4 (H.264), als Ziel für eine effiziente Datenwiederherstellung.

$\Omega \in \{0, 1\}^{M \times N \times T}$ , wie in Abschnitt 3.4.1 eingeführt, beim SOC mit einer signifikanten Verbesserung der Rekonstruktionsqualität einhergeht. Die deutliche NMSE-Diskrepanz für unterschiedliche Arten der Maskierung unter Berücksichtigung einer einheitlichen Rekonstruktionsprozedur macht deutlich, dass die beiden Hauptkomponenten im Lösungsentwurf der IDM, aus Abschnitt 2.5, stets aufeinander abzustimmen sind. Analog zu den bisherigen Resultaten verzeichnet die Maske  $\Omega_b$  in den Inpaintingansätzen mit einer Permutation der extrahierten Repräsentanten für eine feste Kompression den numerisch kleinsten, verbleibenden Fehler. Darüber hinaus erzielt der neu eingeführte dreidimensionale  $K$ -SVD-Ansatz bei der Gegenüberstellung der Inpaintingverfahren die qualitativ hochwertigste Datenwiedergewinnung. Wie beim SOC steht dafür die Information aus der maskierten neurologischen Aktivität zur Verfügung, welche für die Rekonstruktion der Daten im  $K$ -SVD-Inpainting verwendet wird. Außerdem werden diese Information, neben dem unmaskierten Frames aus der Kalibrierung, für die Aktualisierung des Dictionarys im  $K$ -SVD-Rekonstruktionsprozess eingesetzt. Diese kontinuierliche Anpassung der Repräsentanten im Dictionary resultiert in einer adäquaten Datenwiederherstellung der LFP-Signale und ermöglicht die Unterschreitung der Fehlerschwelle von 1% im moderaten Kompressionsbereich.

Des Weiteren zeigen die Untersuchungen, dass eine Vergrößerung der Cuboiddimension für die Repräsentantenextraktion im Bereich der hohen Kompression zu einer Verbesserung der Rekonstruktionsqualität führt. Beim Übergang der Dimension  $R_T$  von 12 auf 48 wird innerhalb des Extraktionsprozesses gewährleistet, dass jeder Repräsentant mindestens einen Abtastwert innerhalb der Elektrodenanordnung besitzt. Dadurch können Repräsentanten, die ausschließlich Nullen beinhalten, vermieden werden. In Abb. 3.31 wurde dafür die Maske  $\Omega_k$  verwendet. Im Bereich der moderaten Kompression ist die Verwendung von Extraktionscuboids mit  $R_T = 12$  vorteilhafter als 48. Im Gegensatz dazu nähert sich der  $K$ -SVD-Ansatz der eingeführten IDM, basierend auf der Anpassung der Cuboiddimension  $R_T = 48$ , der NMSE-Referenzkurve des MPEG-4 (H.264) Verfahrens im hohen Kompressionsbereich. Daher ist abschließend festzuhalten, dass eine Änderung von  $R_T$  in Abhängigkeit des Kompressionsgrades die Güte der Rekonstruktion erhöhen kann.

## 3.5 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt wurde ein neuartiger Ansatz als Realisierungsvorschlag eines vollständig implantierbaren NMS zur berechnungsarmen Verarbeitung von biomedizinischen Daten vorgestellt. Die zugrunde liegende Lösung der IDM basiert auf der Idee, die Maske zur Elektrodensteuerung unter Ausnutzung von inhärenten Signalkorrelationen zu verwenden. Das damit verbundene definierte Ein- und Ausschalten der Elektroden im MEA resultiert in einer Reduktion der Datenmenge auf dem NMS ohne zusätzlichen Berechnungsaufwand. Unter Kenntnis der Maske erfolgt nach Übertragung und Empfang der komprimierten medizinischen Signale die Datenwiedergewinnung mit Hilfe von Inpaintingverfahren. Für alle Untersuchungen in diesem Teil der Arbeit wurden echte klinische, invasiv abgeleitete Messdaten aus einer 24 h Signalerfassung bei einem männlichen Epilepsiepatienten verwendet.

In Zuge dessen zeigten bereits Inpaintingverfahren, welche lediglich auf die Rekonstruktion von übergeordneten Strukturen ausgelegt sind, präzisere Approximationen der Signale im Vergleich zu CS-Ansätzen. Zusätzlich ist im Rahmen der Arbeit für den SBI-Algorithmus eine parallelisierte FPGA-Implementierung zur beschleunigten Rekonstruktion im Sinne eines hohen Durchsatzes entwickelt worden. Weitergehende Untersuchungen haben gezeigt, dass der Einsatz von repräsentantenbasierten Inpaintingansätzen zur Wiedergewinnung der maskierten Signale sehr vielversprechend ist. Neben der Einführung von Entwurfskriterien für die Maske sowie der Optimierung der algorithmischen Freiheitsgrade wurden verschiedene Ansätze für eine beschleunigte Berechnung der SOP-Permutation der extrahierten Repräsentanten vorgestellt und ausgewertet. Im Vergleich mit Verfahren wie JPEG, welche auf die Datenkompression ausgelegt sind, erzielt die eingeführte Lösung der IDM eine qualitativ hochwertigere Wiederherstellung der neurologischen Aktivität für große Kompressionsgrade. Des Weiteren wurden äquivalente SOP-Verfahren mit der Extraktion von ein- und dreidi-

mensionalen Repräsentanten sowie ein innovativer Ansatz aus randomisierten Clustern zur Permutation von extrahierten Repräsentanten entwickelt und untersucht. Für den eingeführten ROP-Algorithmus wurde diesbezüglich die RSVD in der zweiten Iteration des SOP implementiert. Nach der Untersuchung und Festlegung der algorithmischen Freiheitsgrade erzielt der ROP im Vergleich zum SOP neben einer geringfügigen Verbesserung der Wiederherstellungsgüte auch eine deutlich beschleunigte Rekonstruktion für neurologische Daten. Sowohl der entwickelte ROP als auch die modifizierte Variante des SOP sind in der Lage die biomedizinischen Daten als zweidimensionales Wiederherstellungsproblem im vorgestellten NMS-Szenario, selbst für hohe Kompressionen, effizient zu rekonstruieren.

Im Zuge der Interpretation der biomedizinischen Daten als Videodatensatz wurde in dieser Arbeit zwei dreidimensionale Inpaintingalgorithmen entwickelt. Für den vorgestellten SOC erfolgte dafür beim SOP initial der Übergang von Patches zu Cuboids im Extraktionsprozess. Dadurch existiert im SOC eine kleinere Anzahl von Repräsentanten für die Rekonstruktion als beim klassischen SOP bei gleicher Datenblocklänge. Mit dieser Einschränkung geht eine verminderte Rekonstruktionsgüte einher. Mit dieser Erkenntnis erfolgte die Entwicklung eines  $K$ -SVD-basierten Verfahrens zum Anlernen von Dictionarys aus extrahierten Repräsentanten für die Rekonstruktion. Im Zuge dessen wurden außerdem weitere Masken eingeführt. Es konnte festgestellt werden, dass eine hochfrequentierte Rekalibrierung zur Aktualisierung des Dictionarys keinen signifikanten Benefit zur Wiederherstellung der Ruhepotentiale sowie epileptische Anfälle liefert. Allerdings kann die Rekonstruktionsqualität durch die Implementierung eines gemeinsamen Dictionarys sowie überlappende Datenblöcke, zur Korrektur von Fehlern an den Rändern der Datenblöcke, verbessert werden. Neben einer Betrachtung von wiederhergestellten epileptischen Anfällen erfolgte die abschließende Analyse hinsichtlich der Rekonstruktionsgüte der neurologischen Aktivität in Abhängigkeit des Kompressionsgrades. Als weitere Referenz wurde das Videokompressionsverfahren MPEG-4 (H.264) in die Untersuchung und Einordnung der Güte aufgenommen. Die Leistungsstärke des neuartigen  $K$ -SVD-basierten Algorithmus konnte hinsichtlich der Rekonstruktionsqualität in einer abschließenden Untersuchung der Güte in Abhängigkeit der Kompression und beim Gegenüberstellung mit anderen Verfahren evaluiert werden.

In diesem Kapitel erfolgt die Anwendung der vorgestellten IDM aus Abschnitt 2.5 zur Beschleunigung der  $k$ -Space-Datenerfassung in der MRT. Die anschließende Inpaintingrekonstruktion der Schnittbildaufnahmen ermöglicht die Darstellung von Struktur und Funktion des Gewebes und der Organe im Körper für die medizinische Diagnostik. Die Lösung dieser Problemstellung basiert auf den Inpaintingansätzen aus Abschnitt 2.4 und wird abschließend mit den eingeführten Standardverfahren aus Abschnitt 2.2 sowie den SotA Methoden, wie CS aus Abschnitt 2.3, verglichen.

## 4.1 Problemstellung

Im Bereich der Medizin erlauben heutzutage moderne Techniken eine umfangreiche Untersuchung des Körperinneren ohne einen chirurgischen operativen Eingriff. Verschiedene bildgebende Verfahren, wie die Röntgencomputertomographie (CT) oder die MRT, eröffnen eine detaillierte Gewebeauflösung [62]. Dadurch ist es dem medizinischen Fachpersonal möglich, innerhalb einer kurzen Zeit eine Diagnose zu erstellen [67]. Mit dem MRT können exakte Aufnahmen des Gehirns, Rückenmarks und der Gefäßanatomie bereitgestellt werden. Zusätzlich ist es möglich, die Anatomie in allen drei Ebenen – axial, sagittal und koronal – zu visualisieren. Im Gegensatz zur CT ist die MRT in der Lage, sowohl Blutungen als auch vaskuläre Missbildungen zu detektieren. In diesem Teil der Arbeit erfolgt die Diskussion und Anwendung der IDM zur Verbesserung der MRT-Technologie.

Die MRT basiert auf den Magnetisierungseigenschaften von Atomkernen. Normalerweise ist die Orientierung der Protonen innerhalb der Kerne im Gewebe völlig willkürlich. Beim Anlegen eines externen Magnetfeldes, welches stark und einheitlich sein muss, erfolgt eine Polarisierung der Protonen. Daraus ergibt sich eine schwache longitudinale Ausrichtung oder Magnetisierung der Kerne entlang des statischen Feldes [122]. Das Hinzuschalten eines zusätzlichen kurzzeitigen Radio Frequency (RF)-Wechselfeldes bewirkt eine Auslenkung der Atomkerne einhergehend mit einem magnetischen Dipolmoment. Dadurch wandelt sich die longitudinale in eine transversale Magnetisierung um. Das Resultat ist eine Rotation der Kerne um die Feldrichtung des externen einheitlichen Feldes. Um die transversale Komponente der Magnetisierung zu messen, werden Spulen

eingesetzt. In Abhängigkeit der chemischen Umgebung richten sich die Dipolmomente bei Entfernen des RF-Feldes innerhalb der sogenannten Relaxationszeit aus. Basierend auf der dazu benötigten Zeit kann das analysierte Gewebe zugeordnet werden. Unterschiedliche RF-Impulse resultieren in verschiedenen Aufnahmetypen. Dabei gibt die Time to Repetition (TR) die Zeitdauer zwischen aufeinanderfolgenden Impulsen an, die auf dieselbe Schnittebene angewandt wird. Mit der Time to Echo (TE) ist hingegen die Zeit gekennzeichnet, welche nach Abgabe des RF-Impulses und dem Empfang des Echosignals vergeht. Das Gewebe kann in zwei verschiedene Relaxationszeiten  $T_1$  und  $T_2$  eingeteilt werden. Die Spin-Gitter-Relaxation (Längsrelaxation  $T_1$ ) kennzeichnet die Zeitkonstante, welche die Dauer angibt, bei der die angeregten Protonen ins Gleichgewicht zurückkehren. Die Spin-Spin-Relaxation (Querrelaxationszeit  $T_2$ ) entspricht der Dauer, die für die Dephasierung, begründet durch die benachbarten Atome, verantwortlich ist.

Der Einsatz von ortsabhängigen Magnetfeldern, welche auch als Gradientenfelder bezeichnet werden, dient der Bestimmung der örtlichen Position der gemessenen Signale. Diesbezüglich wird zur Konvertierung der Frequenzinformationen der transversalen Magnetisierung die Fouriertransformation eingesetzt [122, 73]. Nach der Quantifizierung der resultierenden Dipolmomente werden die ortskodierten Magnetisierungen im sogenannten  $k$ -Space aufgetragen. Entsprechend ist eine Visualisierung der Schnittbilder mit Hilfe der inversen Fouriertransformation möglich. Um eine sehr hohe Auflösung der Gewebestrukturen zu erreichen, ist eine nahezu vollständige Aufnahme der  $k$ -Space-Koeffizienten in jedem Schnittbild notwendig. Allerdings geht dies mit einer unpraktikablen Erfassungsdauer bei den typischerweise großen Datensätzen einher. Des Weiteren führen Bewegungen des Patienten während der Aufnahme zu Störungen. Daher muss die Belastung für den Patienten, begründet im bewegungslosen Liegen im engen MRT-Gerät, durch eine verkürzte Messdauer minimiert werden. Das Reduzieren der Aufnahmedauer ist im MRT-Bereich eine Hauptproblemstellung. Die Lokalisierung der Signalenergie im Zentrum des  $k$ -Spaces eröffnet die Option, lediglich eine Teilmenge der Koeffizienten der jeweiligen Schnittbilder zu erfassen. Aufgrund der Nullsetzung der nicht erfassten, kodierten örtlichen Magnetisierungswerte kommt es zu einer Verletzung des Nyquist-Shannon-Abtasttheorems. Dies resultiert in Interferenzen und Artefakten bei der Rücktransformation der Schnittbilder [73]. Folgerichtig ist eine Rekonstruktion der fehlenden Koeffizienten im  $k$ -Space erforderlich um die Interferenzen und Artefakte zu vermeiden.

Ohne eine solche Rekonstruktion steht die Vorgabe einer hohen Qualität der MRT-Schnittbilder im Konflikt mit der reduzierten Aufnahmedauer. Dadurch ist das Einhalten beider Spezifikationen, aufgrund der gegenseitigen destruktiven Abhängigkeit, nicht ohne weiteres möglich. Dementsprechend wurden in den letzten Jahren verschiedene Ansätze, beispielsweise basierend auf CS [73] oder dem Block-Matching-Inpainting [75], zur Wiederherstellung der fehlenden Koeffizienten im  $k$ -Space eingeführt. Unter Einhaltung der vorgegebenen Spezifikationen wird nachfolgend eine Lösung der IDM vorgestellt, diskutiert und mit anderen Verfahren zur Wiederherstellung von MRT-

Schnittbildern verglichen. Dabei werden klassische Verfahren unabhängig von der praktischen Umsetzbarkeit eingesetzt, um eine Einschätzung der Rekonstruktionsgüte vornehmen zu können.

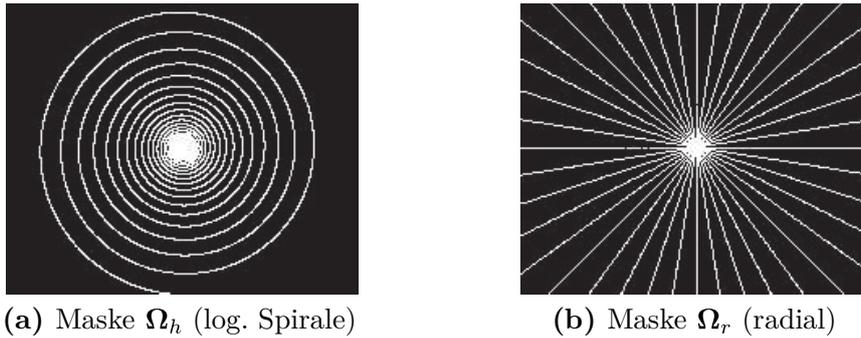
## 4.2 Datenaufnahme

Selbstverständlich muss die praktische Realisierung einer solchen Unterabtastung des  $k$ -Spaces – zur Reduktion der MRT-Aufnahmedauer – gewisse gerätespezifische und physiologische Bedingungen einhalten. Aus diesem Grund ist im Allgemeinen die Auswahl von Koeffizienten an zufälligen Positionen im  $k$ -Space nicht praktikabel [73]. Vorteilhafter ist eine sogenannte Trajektorie, in anderen Worten eine Bewegungsbahn für die Unterabtastung, die einer relativ glatten Linie oder Kurve folgt. In diesem Sinne wird in der Literatur zwischen kartesischen und nichtkartesischen Schemata für die Abtastung unterschieden. Erstere bestehen aus geraden Linien in Form eines kartesischen Gitters. Die Umsetzung ist relativ robust gegenüber diversen systembedingten Störeinflüssen. Im Gegensatz dazu ist die Realisierung, basierend auf nichtkartesischen Trajektorien, zwar komplexer, allerdings kann aufgrund, der höheren Unterabtastungen, die MRT-Aufnahmezeit stärker reduziert werden.

Inspiziert durch die verschiedenen Trajektorien für die klassische Unterabtastung können verschiedene Masken  $\Omega$  für die Lösung der IDM abgeleitet werden. Diesbezüglich sieht die Literatur [75] einige Entwurfskriterien vor. Die Maskierung kann als dreidimensionale Abtastung sowohl Frame-by-Frame, mit einheitlicher oder variabler zweidimensionaler Struktur, als auch über einen definierten 3D-Verlauf erfolgen. Letzteres verwendet eine 3D-Fourier-Transformation, um die  $k$ -Space-Koeffizienten direkt ableiten zu können.

Wie in der Einleitung des Kapitels beschrieben, ist das Ziel einen schnellen MRT-Ansatz zu realisieren, um die Belastung für den Patienten durch das bewegungslose Liegen im MRT-Gerät durch eine verkürzte Messdauer zu minimieren. Eine Beschleunigung der Messung geht mit einem effizienten Entwurf der Maske  $\Omega$  in der Lösung der IDM einher. In dieser Arbeit werden für die Maskierung nichtkartesische Trajektorien verwendet. Neben einer höheren Unterabtastung ermöglichen solche Bewegungsbahnen innerhalb des  $k$ -Spaces, im Gegensatz zu kartesischen Trajektorien, zudem schnellere Erfassungsraten der Koeffizienten [73].

In Abb. 4.1 sind die zwei Masken visualisiert, welche in den nachfolgenden Untersuchungen eingesetzt werden. Sowohl die logarithmische Spirale  $\Omega_s$  als auch das radiale Design simulieren die Datenerfassung in Form von nichtkartesischen Bewegungslaufbahnen in gewöhnlichen medizinischen bildgebenden Anwendungen [73]. Eine alternative Art die Koeffizienten im  $k$ -Space abzuleiten, bietet CS. Im Sinne der Vollständigkeit wird der CS-Ansatz nachfolgend kurz beschrieben, sodass in den abschließenden Untersuchungen, hinsichtlich der Rekonstruktionsqualität, CS als SotA-Referenz einfließen kann.



**Abbildung 4.1:** Visualisierung von nichtkartesischen Trajektorien, welche in der Lösung der IDM als Masken  $\Omega$  zur Ableitung einer reduzierten Untermenge an  $k$ -Space-Koeffizienten fungieren sollen.

**Compressed Sensing** Die Idee des CS-Ansatzes ist es, eine Untermenge der  $k$ -Space-Koeffizienten abgetastet und linear gemäß Gl. (2.28) auf Projektionen  $\mathbf{y}$  abzubilden. Innerhalb des Abtastprozesses werden einige Koeffizienten ausgelassen, was zu einer Beschleunigung der MRT-Aufnahmedauer führt [73]. Die CS-Rekonstruktion der MRT-Daten  $\mathbf{x}$  kann durch das beschränkte Optimierungsproblem

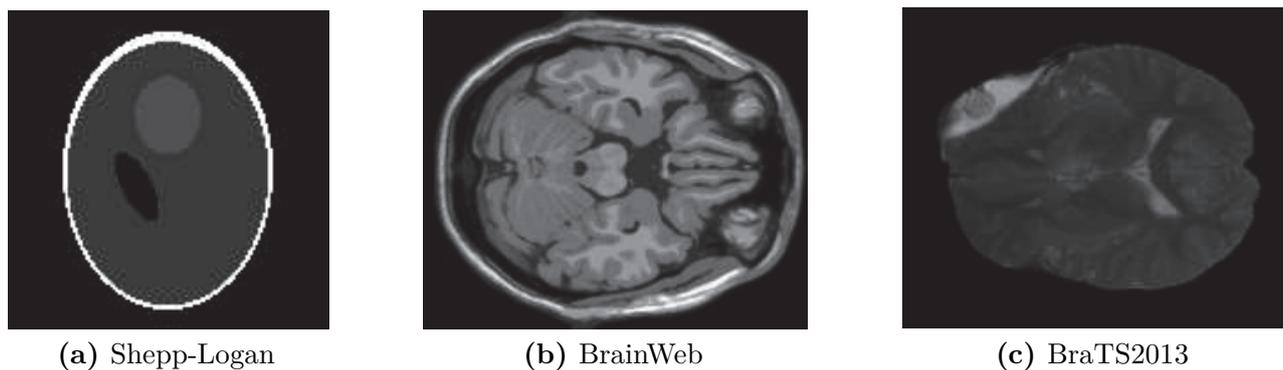
$$\min \|\mathbf{D}\mathbf{x}\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \|\mathbf{D}_F\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \leq \varepsilon, \quad (4.1)$$

beschrieben werden, wobei die Wavelet-Transformation  $\mathbf{D}$  die sparse Repräsentation erzeugt. Dabei stellt  $\mathbf{D}_F$  die unterabgetastete Fourier-Transformation dar. Die  $\ell_1$ -Minimierung wird individuell für jedes MRT-Schnittbild durchgeführt, sodass mittels Transformation selbige aus den jeweiligen sparsen Repräsentationen erzeugbar sind. Der CS-Ansatz fließt als SotA-Methode zur Bewertung der Rekonstruktionsqualität der nachfolgenden Lösung der IDM in die abschließenden Untersuchungen ein.

### 4.2.1 Test-Phantome

In den abschließenden Untersuchungen erfolgt die Beurteilung sowie der Vergleich der betrachteten Ansätze. Neben dem Grad der Kompression ist die Qualität der Wiederherstellung der MRT-Schnittbilder für die Bewertung essentiell. In Zuge dessen werden MRT-Daten benötigt, welche in diesem Abschnitt vorgestellt werden. Dabei handelt es sich um drei Datensätze mit aufsteigendem Detailanteil innerhalb der MRT-Schnittbilder. Bei den ersten beiden handelt es sich um synthetische Test-Phantome. Der dritte Datensatz beinhaltet eine echte MRT-Messung eines Patienten.

**Shepp-Logan** Das Shepp-Logan ist eine sehr grobe schematische Nachbildung des Kopfes, wie in Abb. 4.2a beispielhaft dargestellt [100]. Die MRT-Aufnahme umfasst insgesamt 128 Schnittbilder mit einer Größe von  $128 \times 128$ . Innerhalb der Frames sind geometrische Flächen, wie beispielsweise Ellipsen unterschiedlicher Formen und Intensitäten, abgebildet. Das Ziel des Shepp-Logan-Phantoms ist die Bewertung der

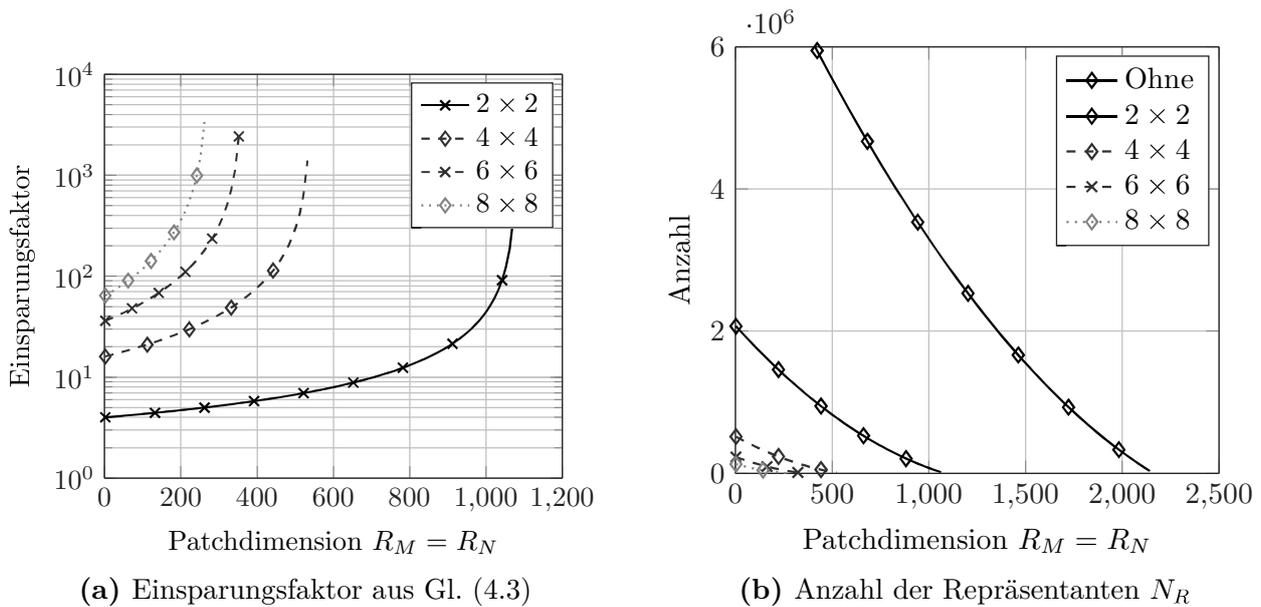


**Abbildung 4.2:** Exemplarische Visualisierung der Test-Phantome. Das Ensemble der MRT-Datensätze besteht aus zwei synthetischen Anfertigungen, Shepp-Logan und BrainWeb, sowie einer gemessenen Aufnahme BraTS2013. Letzterer wird ursprünglich zur Identifikation von Tumoren eingesetzt.

Wiederherstellung der im Datensatz vorhandenen Isophoten. Die sprunghaften Übergänge der Areale sind, aufgrund des breiten Frequenzspektrums, die größte Herausforderung.

**BrainWeb** Bei dem BrainWeb-Phantom handelt es sich um eine synthetische MRT-Aufnahme des menschlichen Kopfes mit 181 Schnittbildern (Frames) der Dimension  $181 \times 217$  [27]. Der Abstand zwischen den synthetischen Schnittbildern beträgt 1 cm. Die Sequenz der Gewebeaufnahme ist in diesem Fall  $T_1$ -gewichtet. In der Abb. 4.2b wird exemplarisch ein Frame des Datensatzes dargestellt. In dieser simulierten Aufnahme wurden keine zusätzlichen Störungen hinzugefügt. Charakteristisch für diesen Datensatz ist die Ausprägung zahlreicher Strukturen, welche markant das Gehirngewebe nachbilden. Die Areale des menschlichen Gehirn werden als homogene Regionen mit gleichen Intensitätswerten dargestellt.

**BraTS2013** Neben den beiden vorgestellten Phantomen BrainWeb und Shepp-Logan wird außerdem eine beim Menschen gemessene  $T_2$ -gewichtete MRT-Aufnahme untersucht. Die Aufnahme beinhaltet 160 Schnittbilder der Dimension  $190 \times 135$ . Diese Frames zeigen das Gewebe eines menschlichen Gehirns aus der sogenannten Virtual Skeleton Datenbank BraTS2013 [64]. Das ursprüngliche Ziel für diese MRT-Aufnahme aus dieser Datenbank besteht in der algorithmischen Identifikation und Detektion von Tumoren. Ein exemplarisches Schnittbild ist in der Abb. 4.2c visualisiert, wobei sich der Tumor im hellen Areal oben links befindet.



**Abbildung 4.3:** Vorteil einer Partitionierung von  $\mathbf{X}$  in ein quadratisches Raster  $P_m \times P_n$  zur Reduktion des Berechnungsumfanges. Betrachtung des dazugehörigen Einsparungsfaktor als Verhältnis aus ursprünglicher und reduzierter Anzahl der Repräsentanten  $N_R$ .

## 4.3 Datenrekonstruktion

An dieser Stelle der Arbeit erfolgt die Einführung des sogenannten Permuted Cuboids Wavelet Thresholding (PCWT)-Algorithmus als Lösung der IDM zur Rekonstruktion von MRT-Aufnahmen [109]. Als Ausgangspunkt dient die, aus dem  $k$ -Space zurücktransformierte, Aufnahme der MRT-Schnittbilder  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{M \times N \times T}$ . Die  $D = MNT$  Werte der Aufnahme verteilen sich auf  $T$  Frames der Größe  $M \times N$ . Aufgrund der Maskierung im  $k$ -Space  $\mathbf{S}'_\Omega = \mathbf{M}\mathbf{D}_F\mathbf{X}'$  liegt im Originalbereich eine Art verrauschte Version der MRT-Schnittbilder vor, wobei  $\mathbf{M} \in \{0, 1\}^{D \times D}$  die logische Maske und  $\mathbf{D}_F \in \mathbb{C}^{D \times D}$  die Fourier-Basis darstellt. Zuvor wird ein Ansatz zur Partitionierung der Datenmatrix vorgestellt, um die Berechnungszeit für große Datenvolumen zu reduzieren.

### 4.3.1 Partitionierung der Datenmatrix

Eine Erweiterung der Implementierung von Überlappungsbereichen aus Abschnitt 3.4.3, bezogen auf die Anwendung von repräsentantenbasiertem Inpainting, ist die Partitionierung sehr großer Datensätze. Dabei spielt die Interpretation der Dimension, also ob es sich um ein Bild, Video o.ä. handelt, keine Rolle. Zur Illustration der Problemstellung soll nachfolgend ein Frame eines 16:9-Videoformats  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{3840 \times 2160 \times T}$  mit 4K/Ultra High Definition (UHD)-Auflösung angenommen werden. Unter Berücksichtigung der überlappenden Extraktion von  $(M - R_M + 1)(N - R_N + 1)$  Repräsentanten der Größe

$R_M \times R_N$  wirkt sich diese Datenmenge sehr negativ auf die Rekonstruktion aus. Letzteres wird entweder unberechenbar aufgrund des Speicherbedarfs oder führt zu einer nicht praktikablen Laufzeit. Um große maskierte Datensätze trotzdem wiederherstellen zu können, erfolgt eine geometrische Aufteilung in Regionen. Eine solche Partitionierung kann beispielsweise ein  $P_m \times P_n$  Raster sein, wobei jedes Segment in diesem Frame unabhängig – sequentiell oder parallel – gelöst wird. Hierbei reduziert sich die Anzahl der extrahierten Patches auf  $(M/P_m - R_M + 1)(N/P_n - R_N + 1)$  und ergibt damit einen Einsparungsfaktor von

$$(M - R_M + 1)(N - R_N + 1) \geq \left(\frac{M}{P_m} - R_M + 1\right)\left(\frac{N}{P_n} - R_N + 1\right) \quad (4.2)$$

$$\frac{(M - R_M + 1)(N - R_N + 1)}{\left(\frac{M}{P_m} - R_M + 1\right)\left(\frac{N}{P_n} - R_N + 1\right)} \geq 1 \quad (4.3)$$

in Abhängigkeit der Partitionierung und Patchdimension. Der daraus resultierende Benefit ist in Abb. 4.3a dargestellt. Hierbei wurde aus Übersichtsgründen eine quadratische Dimension für die Extraktion der Repräsentanten  $R_M = R_N$ , mit  $1 \leq R_M \leq \min(M/P_m, N/P_n)$  sowie das Partitionierungsraster  $P_m = P_n \geq 1$  angenommen. Die jeweiligen Abbrüche der Verläufe sind durch die Grenzen des Wertebereiches für die Repräsentantengröße  $R_M$  und damit verbundenen Singularitäten an den Stellen  $R_M = \min(M/P_m, N/P_n) + 1$  definiert. Die Höhe des Einsparungsfaktors, also dem Verhältnis aus ursprünglicher und reduzierter Anzahl der Repräsentanten  $N_R$ , wird anhand des Abstandes zu 1 quantifiziert. Wie in Abb. 4.3b dargestellt, reduziert sich mit steigendem Grad der quadratischen Partitionierung signifikant die Anzahl der Repräsentanten  $N_R$ . Somit eröffnet dieser Ansatz die Durchführbarkeit der Berechnung einer repräsentantenbasierten Wiederherstellung von großen Datensätzen trotz des Vorhandenseins einer limitierten Speicherkapazität. Ein damit verbundener Nachteil ist die Erhöhung des Rekonstruktionsfehlers an den Rändern der Partitionen. Analog zum Anfang des Abschnittes können diese Randfehler mit Hilfe einer Implementierung von Überlappungsbereichen zwischen den Segmenten signifikant reduziert werden.

### 4.3.2 Permuted Cuboids Wavelet Thresholding

Dementsprechend wird ein dualer Ansatz als Lösung der IDM angestrebt. Das bedeutet, dass im Originalbereich das Inpainting als eine Art Denoising erfolgt, um, basierend auf dessen Ergebnis, die fehlenden Koeffizienten im  $k$ -Space zu rekonstruieren. Im PCWT wird diese alternierende Vorgehensweise als iterativer Rekonstruktionsprozess in Anlehnung an das Minimierungsproblem aus Gl. (2.124) implementiert. Durch

Anwendung der Tikhonov-Regularisierung der ADMM zur Entkoppelung des Problems sind

$$\tilde{\mathbf{X}}' = \left( (\mathbf{M}\mathbf{D}_F)^T \mathbf{M}\mathbf{D}_F + \lambda_X \mathbf{1} \right)^{-1} \left( (\mathbf{M}\mathbf{D}_F)^T \mathbf{S}'_{\Omega} + \lambda_X \mathbf{D}_S \mathbf{Z}' \right) \quad (4.4)$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}' = \mathcal{T}(\mathbf{D}_A \mathbf{X}') \quad (4.5)$$

zur Bestimmung der Rekonstruktion zu berücksichtigen. Als Transformationsbasis,  $\mathbf{D}_A$  und  $\mathbf{D}_S$  zur Analyse  $\mathbf{Z}' = \mathbf{D}_A \mathbf{X}'$  und Synthese  $\mathbf{X}' = \mathbf{D}_S \mathbf{Z}'$  vor und nach dem Thresholding  $\mathcal{T}(\cdot)$ , wird die SWT aus Abschnitt 2.4.2.4 eingesetzt. Des Weiteren wird der dort vorgestellte Ansatz, welcher auf dem Wavelet-Thresholding [88] basiert, zur Verarbeitung von Volumendaten  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{M \times N \times T}$ , in Anlehnung an den eingeführten SOC Algorithmus aus 3.4.1, erweitert. Andere Ansätze, beispielsweise SotA-Verfahren wie BM3D oder CS, rekonstruieren die MRT-Aufnahme als Frame-by-Frame-Verarbeitung, ohne die Ausnutzung der zeitlichen Korrelation.

**Extraktion von Cuboids** Analog zur Vorgehensweise anderer repräsentantenbasierter Verfahren (Abschnitt 2.4.2) erfolgt im ersten Schritt der Wiederherstellung die Extraktion der redundanten Information aus dem Datensatz. Statt überlappende Patches  $R_M \times R_T$  aus den einzelnen Schnittbildern zu extrahieren, soll beim PCWT zusätzlich die Information aus der dritten Dimension bereitgestellt werden. Dementsprechend erfolgt der Einsatz von Repräsentanten in Form von zusammenhängenden 3D-Fragmenten  $R_M \times R_N \times R_T$ , sogenannte Coboids, zur überlappenden Extraktion der Daten aus aufeinanderfolgenden MRT-Schnittbildern.

Die extrahierten Cuboids werden vektorisiert und nacheinander in der Kollektionsmatrix  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{R \times N_R}$  angeordnet. Dabei gibt  $R = R_M R_N R_T$  die Anzahl der Elemente für einen Repräsentanten und  $N_R = (M - R_M + 1)(N - R_N + 1)(T - R_T + 1)$  die Anzahl der extrahierten Cuboids an. Die Zeilen dieser Kollektionsmatrix  $(\mathbf{K}^T)_i$  werden als Subvolumen bezeichnet.

**Permutation und Thresholding der Wavelet-Koeffizienten** In Anlehnung an den SOC ist es das Ziel, durch das Thresholding nach der Wavelet-Synthese, möglichst reguläre Zeilen innerhalb der Kollektionsmatrix zu erhalten. Dementsprechend erfolgt nach der Extraktion und einer initialen Permutation  $\mathbf{P}^1$  der Repräsentanten die zeilenweise Anwendung der SWT, welche bereits in Abschnitt 2.4.2.4 beschrieben wurde. Anschließend wird der detaillierte Wavelet-Anteil gespeichert. Die Approximationskoeffizienten hingegen erfahren ein Downsampling hinsichtlich der geraden ( $\downarrow 2_e$ ) und ungeraden Indizes ( $\downarrow 2_o$ ). Die beiden resultierenden Anteile der Kollektionsmatrix  $\mathbf{K}_e^l \in \mathbb{R}^{R \times 2^{-l} N_R}$  und  $\mathbf{K}_o^l \in \mathbb{R}^{R \times 2^{-l} N_R}$  halbieren ihre Dimension hinsichtlich der Spaltenanzahl in jeder Wavelet-Zerlegungsstufe. Diese bilden dann jeweils den Ausgangspunkt für die nächste Wavelet-Analyse, wobei die Detailkoeffizienten wieder gespeichert und der approximier-te Anteil bis zur  $L$ -ten Zerlegung der permutierten Matrizen weiterverwendet wird.

Diese Zerlegungsprozedur ist unter Berücksichtigung der Permutationen der Wavelet-Approximationskoeffizienten in Abb. 2.11 schematisch dargestellt. Als Mother-Wavelet wird in dieser Arbeit in Anlehnung an [88] das orthogonale Symlet 8 mit einer Länge von  $N_F = 16$  Sample für das Dekompositions- und Rekonstruktionsfilter eingesetzt.

Gemäß [75] kann zur Reduktion des Berechnungsaufwandes optional eine kubische Beschränkung des Suchbereiches hinsichtlich der Position der Repräsentanten für die Permutationsbestimmung implementiert werden. Des Weiteren kann es für große Datenvolumen vorteilhaft sein, gemäß der eingeführten Partitionierung aus Abschnitt 4.3.1, eine Zerlegung des MRT-Datensatzes in Teilprobleme vorzunehmen. Zur Beschleunigung der Rekonstruktion erfolgt eine Segmentierung der Daten in überlappende Gruppen von aufeinanderfolgenden Frames, welche parallel wiederhergestellt werden können. Für die PCWT-Rekonstruktionen in dieser Arbeit liegt nachfolgend der eingeführte Partitionierungsansatz der MRT-Daten zugrunde.

Nachdem alle Wavelet-Koeffizienten – Approximations- sowie Detailanteil – berechnet sind, erfolgt die Anwendung des Thresholdings  $\mathcal{T}(\cdot)$ . Im Zuge dessen wird das Hard-Thresholding ( $p = 0$ ) nach Gl. (2.130) zur Realisierung der sparsen Abbildung eingesetzt. Das Soft-Thresholding aus Gl. (2.129) ist aufgrund der Eigenschaft zur Glättung der Koeffizienten ungeeignet. Somit werden alle betroffenen Koeffizienten, deren Werte unterhalb einer definierten Schwelle sind, zu Null gesetzt, sodass ideale sparse Signale vorliegen. Der nächste Schritt der Rekonstruktion besteht in der sukzessiven Anwendung der jeweiligen inversen Permutationen und Transformationen nach Gl. (2.137). Am Ende dieses Vorgangs weisen die resultierenden MRT-Schnittbilder in  $\mathbf{X}_{\text{rec}}$  im korrespondierenden  $k$ -Space  $\mathbf{S}'_{\text{rec}} = \mathbf{D}_F \mathbf{X}'_{\text{rec}}$  an den Positionen  $M_{m,n,t} = 0$  Koeffizienten ungleich Null auf.

**Iterative duale Rekonstruktion** Im Anschluss der SRWT-Zerlegung und dem Thresholding werden diese rekonstruierten Koeffizienten  $(\mathbf{1} - \mathbf{M})\mathbf{S}'_{\text{rec}}$  an die ursprünglich maskierten Koordinaten im  $k$ -Space positioniert. Selbstverständlich bleiben die unmaskierten Werte  $\mathbf{M}\mathbf{S}'$  unverändert erhalten. Nach der Zusammenführung der  $k$ -Space-Koeffizienten bilden die zurücktransformierten MRT-Schnittbilder

$$\mathbf{D}_F^T [(\mathbf{1} - \mathbf{M})\mathbf{S}'_{\text{rec}} + \mathbf{M}\mathbf{S}'] \quad (4.6)$$

das neue Fundament für die nächste SRWT-Zerlegung. Mit Hilfe dieser dualen Rekonstruktion – Wavelet-Thresholding und Aktualisierung der  $k$ -Space Koeffizienten – kann die vollständige MRT-Aufnahme  $\mathbf{X}$  iterativ angenähert werden. Dieser Vorgehensweise liegt die Annahme zugrunde, dass der Rekonstruktionsfehler, basierend auf der sukzessiven Neuberechnung der Permutationen in den jeweiligen SRWT-Zerlegungsstufen, stetig abfällt. Um hohe Restfehler durch vorzeitige Konvergenz sowie große maximale Iterationszahlen  $I_{\text{max}}$  zu vermeiden, ist eine adaptive Anpassung des Schwellwertes  $\lambda_I$  aus Gl. (2.128) in Abhängigkeit der Iteration anzuwenden.

**Adaptives Thresholding** Zunächst folgt an dieser Stelle die Implementierung der klassischen stufenweisen Absenkung des Schwellwertes. Dementsprechend wird eine feste Anzahl  $N_T$  von Schwellen  $\sqrt{\lambda_I}$  mit monoton abfallenden Werten gemäß

$$\sqrt{\lambda_{I,\max}} \left( \frac{\lambda_{I,\min}}{\lambda_{I,\max}} \right)^{\frac{i-1}{2(N_T-1)}} \quad (4.7)$$

zwischen einer logarithmischen Skala von  $\sqrt{\lambda_{I,\min}}$  bis  $\sqrt{\lambda_{I,\max}}$  definiert. Dabei gibt  $i$  aus  $1 \leq i \leq I_{\max}$  die aktuelle Iteration an. Durch die Vorgabe einer maximalen Iterationsanzahl  $I_{\max}$  wird festgelegt, dass die Schwellwerte nach Gl. (4.7) für  $I_{\max}/N_T$  Iterationen unverändert bleiben, wodurch der Stufenverlauf entsteht. Dieser Ansatz ist durch die Inpainting-Algorithmen aus [75, 42, 69], welche zur Rekonstruktion von Bild- und Videodaten zum Einsatz kommen, motiviert.

Allerdings besitzt diese klassische Variante einen deutlichen Nachteil. Die Schwellwerte basieren auf der Definition diverser Freiheitsgrade, welche optimalerweise individuell für jeden Kompressionsgrad sowie Datensatztyp einzustellen sind. Beispielsweise kann das Festlegen einer maximalen Iterationszahl  $I_{\max}$  als einziges Abbruchkriterium dazu führen, dass ein frühzeitiges, aber unzureichendes, oder eben ein bereits vorhandenes, seit mehreren Iterationen nicht mehr verändertes, Rekonstruktionsergebnis ausgegeben wird. Daraus resultierend können durch die stufenweisen Anpassungen der Schwellwerte zudem zwei Effekte auftreten. Einerseits kann es zu temporären Sättigungen des Rekonstruktionsfehlers kommen. Dabei entstehen ausgeprägte Plateaus über mehrere Iterationen, welche keinen signifikanten Beitrag zur Erhöhung der Qualität liefern und die Rekonstruktionsdauer unnötig verlängern. Andererseits reduziert der zu frühe Schwellwertwechsel zur nächsten Wertestufe das Potential die Wavelet-Koeffizienten anhand des vorherigen Thresholds weiter zu sparsifizieren.

Zur Maximierung der Rekonstruktionsqualität ohne das Investment in beitragslose Iterationen durch große Plateaus soll im PCWT-Algorithmus ein adaptives Thresholding implementiert werden. Weiterhin folgen die Schwellwerte einer monoton abfallenden Werteserie nach

$$\sqrt{\lambda_{I,\max}} (1 - \xi)^{i-1}, \quad (4.8)$$

wobei der Parameter  $\xi \in (0, 1)$  die Absenkungsrate angibt. Die Aktualisierung des Schwellwertes gemäß Gl. (4.8) soll dann erfolgen, sobald der Rekonstruktionsfehler nach einem steilen Abfall in die Sättigung geht. Allerdings wird für diese Information der NMSE nach Gl. (2.5) bezüglich dem rekonstruierten  $\mathbf{X}'_{\text{rec}}$  und originalen Datensatz  $\mathbf{X}'$  benötigt. Selbstverständlich steht letzterer während der Berechnung, aufgrund der Maskierung, nicht zur Verfügung. Dementsprechend muss sowohl eine Abschätzung des Fehlerwertes als auch der Fehlerentwicklung zur vorherigen Iteration vorgenommen werden, um die Entstehung von Plateaus zu identifizieren.

Als Grundlage der benötigten Abschätzung sei angenommen, dass während einer idealen Rekonstruktion – basierend auf dem Hard-Thresholding der SRWT-Koeffizienten nach Gl. (2.130) – die unmaskierten Spektralwerte

$$\mathbf{S}'_{\Omega} \approx \mathbf{MS}'^{(i)} = \mathbf{MD}_F \mathbf{X}'^{(i)} \quad (4.9)$$

vor der Korrektur näherungsweise ihren tatsächlichen Werten entsprechen. Mit der Korrektur ist das Ersetzen der Approximationen an den Stellen  $M_{i,i} = 1$  mit den tatsächlichen, unmaskierten Koeffizienten gemeint. Unter Berücksichtigung dieser Annahme kann mit Hilfe der normierten quadratischen Differenz der unmaskierten  $k$ -Space-Koeffizienten ( $M_{i,i} = 1$ )

$$\frac{\|\mathbf{MS}'^{(i)} - \mathbf{S}'_{\Omega}\|_2}{\|\mathbf{S}'_{\Omega}\|_2} \quad (4.10)$$

die Approximationsqualität während der Iteration  $i$  abgeschätzt werden. Solange in aufeinanderfolgenden Iterationen die betragsmäßige Differenz der jeweiligen Fehler

$$\left| \frac{\|\mathbf{MS}'^{(i-1)} - \mathbf{S}'_{\Omega}\|_2}{\|\mathbf{S}'_{\Omega}\|_2} - \frac{\|\mathbf{MS}'^{(i)} - \mathbf{S}'_{\Omega}\|_2}{\|\mathbf{S}'_{\Omega}\|_2} \right| < \varepsilon_T \quad (4.11)$$

eine vorgegebene Schranke  $\varepsilon_T \in \mathbb{R}$  unterschreitet, reduziert sich der Schwellwert nach Gl. (4.8) in der nächsten Iteration. Erfolgt in der darauffolgenden Iteration wieder keine signifikante Verbesserung der Fehlerentwicklung wird der Prozess der Rekonstruktion abgebrochen.

**Reduktion der algorithmischen Komplexität** Um den Berechnungsaufwand neben dem adaptiven Thresholding weiter zu reduzieren, ist die Flexibilität der SRWT-Zerlegung an verschiedenen Stellen weiter einzuschränken. Einerseits kann eine festgelegte Anzahl an Iterationen  $N_c \in \mathbb{N}$  eingeführt werden, welche den Zeitpunkt der Neuberechnung der Permutationen in der Zerlegung vorgibt. Zwischen diesen Marken ist die Permutation für die Approximationskoeffizienten konstant. Andererseits lässt sich die Komplexität der SRWT hinsichtlich der Multiskalenanalyse reduzieren. Aufgrund der sukzessiven Tiefpassfilterung des umsortierten Approximationsanteils liegt bereits in dem frühen Stadium der Zerlegung ein diskretes, niederfrequentes Signal vor. Daraus resultiert, dass in den darauffolgenden Stufen weitere Permutationen der Approximationskoeffizienten eine vernachlässigbare Auswirkung auf den Grad der Sparsity der Detailkoeffizienten hat. Folgerichtig ist es sinnvoll, während der Multiskalenanalyse nach einer Anzahl von  $L_p \in \mathbb{N}$  Wavelet-Zerlegungen von der Transformation SRWT zur SWT-Realisierung zu wechseln, da dort keine aufwendige Permutation der Approximationskoeffizienten implementiert ist. Mit Hilfe der SWT erfolgen  $L_s \in \mathbb{N}$  weitere Zerlegungen, sodass die Multiskalenanalyse eine Tiefe von  $L = L_p + L_s$  besitzt.

In den nachfolgenden Abschnitten erfolgen die Untersuchungen der Freiheitsgrade des eingeführten PCWT-Algorithmus. Anhand einer künstlich generierten MRT-Aufnahme, in diesem Fall BrainWeb aus Abschnitt 4.2.1, soll die Rekonstruktionsgüte bewertet werden. Die Verwendung von Test-Phantomen ist gängige Praxis, da diese viele Effekte des Aufnahmeprozesses abbilden [34]. In den nachfolgenden Simulationen bleiben zusätzlich generierte Störungen, wie das oben angesprochene Rauschen oder Intensitätsschwankungen beim Messvorgang unberücksichtigt. Alle Datensätze beinhalten ausschließlich reelle Werte, welche auf das Intervall  $[0, 1]$  normiert sind.

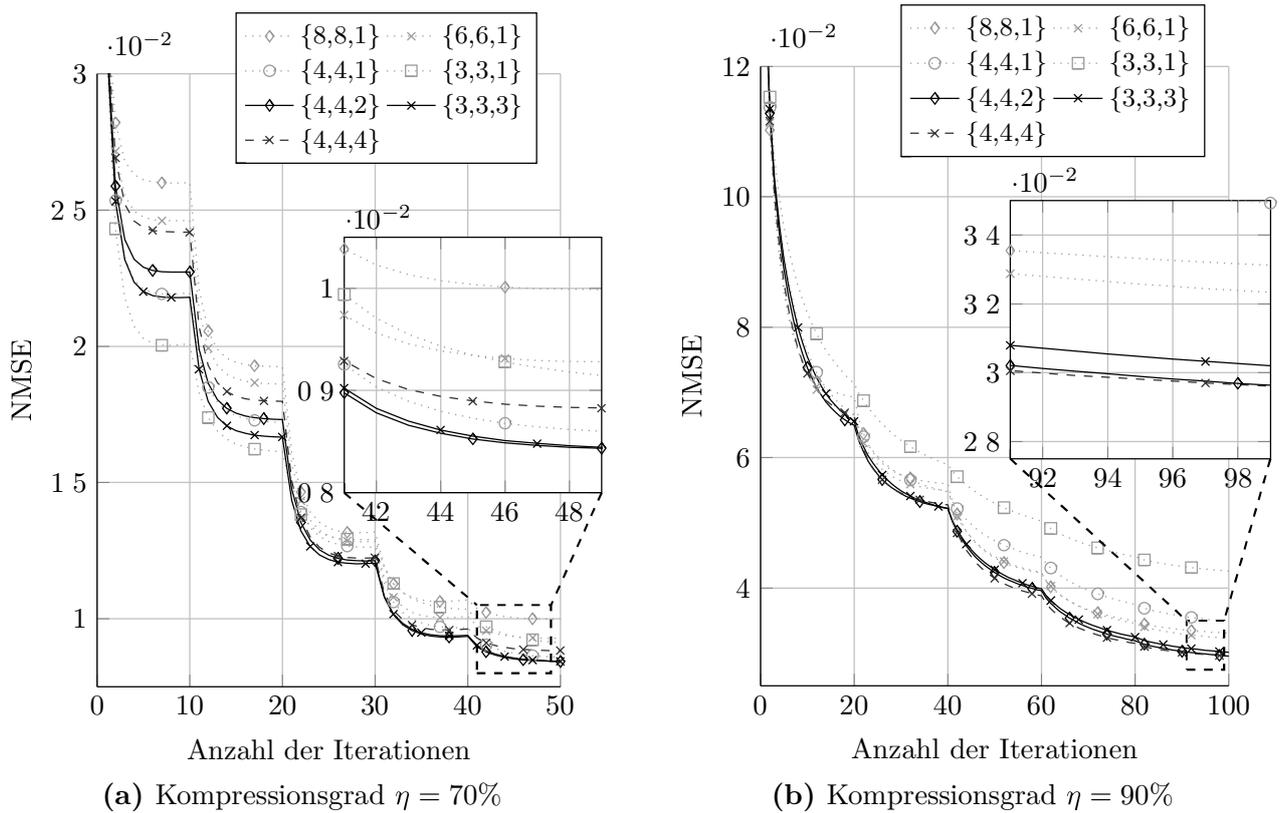
Aufgrund der gegenseitigen Beeinflussung der Freiheitsgrade erfolgt zunächst eine Vordefinition – innerhalb der jeweiligen Untersuchungen – verschiedener Parameter für die PCWT-Rekonstruktion. Um den Einfluss der Maskierung zu analysieren, fließt die logarithmische Spirale als Maske  $\Omega_s$  mit zwei verschiedenen Kompressionsgraden  $\eta = \{70\%, 90\%\}$  in die nachfolgenden Simulationen ein. Diesbezüglich sind maximale Iterationszahlen  $I_{\max} = \{50, 100\}$  für die jeweiligen Kompressionen festgelegt. Während des Wiederherstellungsprozesses wird das Hard-Thresholding  $N_T = 5$  mal angepasst. Dabei basiert die Wahl der Intervallgrenzen  $\lambda_{I,\min} = 5 \cdot 10^{-3}$  und  $\lambda_{I,\max} = 200 \cdot 10^{-3}$  auf einer großen Anzahl von Stichprobentests. Nachdem die Parameter anhand der klassischen stufenweisen Anpassung der Schwellwerte optimiert wurden, erfolgt abschließend die Untersuchung der adaptiven Implementierung für das Thresholding im PCWT.

#### 4.3.2.1 Dimension der Cuboids

Neben anderen Freiheitsgraden in repräsentantenbasierten Inpainting-Verfahren weist die Dimension der Extraktionsausschnitte, hier Cuboids der Ausdehnung  $R_M \times R_N \times R_T$ , einen großen Einfluss auf die Rekonstruktionsqualität auf.

Die Wahl der Dimensionierung geht in der Regel mit einem Trade-Off aus Anzahl der Repräsentanten  $N_R$  und Berechnungsaufwand  $N_R(N_R - 1)/2$  einher. Ersteres führt bei kleiner Ausdehnung der Cuboids zu einer großen Vielfalt der Repräsentanten, was während der Permutation mit einem positiven Zuwachs der Regularität der Subvolumen einhergeht. Durch die Anwendung der SRWT resultiert dies weiter in einer Erhöhung der Sparsity der Wavelet-Koeffizienten. Allerdings verringert sich die Anzahl der Zeilen von  $\mathbf{K}$ , was in der abschließenden gewichteten Mittelwertbildung der Subvolumen zu Schwächen in der Rekonstruktionsqualität führen kann. Große Cuboids resultieren sowohl in einer Abnahme der Vielfalt der Repräsentanten und damit dem Grad der Sparsity als auch einer hochwertigeren Mittelwertbildung der Subvolumen.

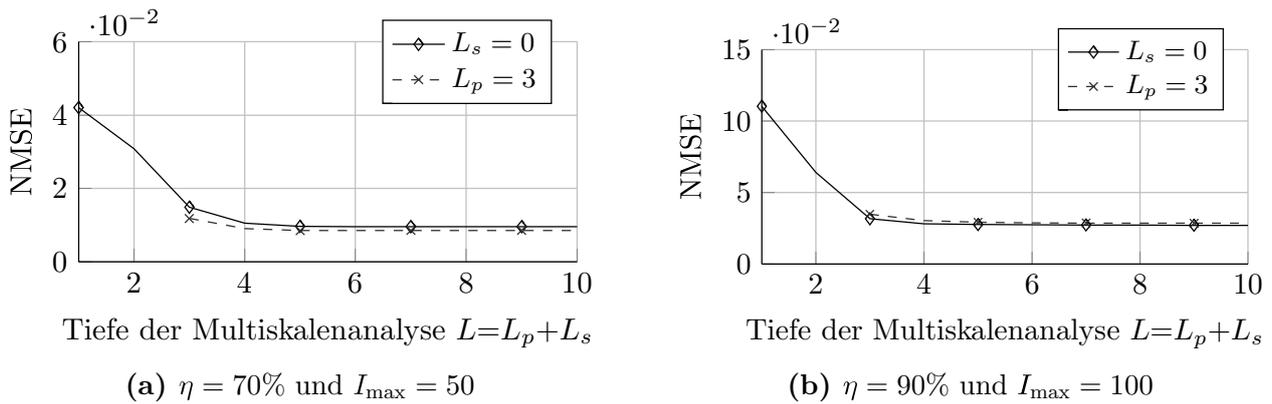
In der Abb. 4.4 ist die Untersuchung des PCWT hinsichtlich verschiedener Dimensionen der Cuboids für die zwei Kompressionsgrade  $\eta = \{70\%, 90\%\}$  dargestellt. Um die Aussagekraft dieser Analyse nicht zu schwächen, wird die Anzahl der Iterationen mit konstanten Permutationsmatrizen  $N_c$  auf eins gesetzt. Des Weiteren erfolgt in jeder Stufe der Multiskalenanalyse die Permutation der Approximationskoeffizienten, wodurch an dieser Stelle  $L = L_p = 5$  gilt. Das Hauptaugenmerk liegt in der Betrachtung der



**Abbildung 4.4:** Auswertung der Dimension der Cuboids  $\{R_M, R_N, R_T\}$  für die Extraktion der Repräsentanten im PCWT-Algorithmus [109].

Rekonstruktionsqualität in Abhängigkeit der geometrischen Ausdehnung  $R_M \times R_N$  der Cuboids innerhalb der MRT-Schnittbilder. Diesbezüglich wird explizit zwischen dem klassischen Frame-by-Frame-Ansatz ( $R_T = 1$ ) und der hier vorgestellten frameübergreifenden Variante ( $R_T > 1$ ) unterschieden. Letzteres eröffnet die Möglichkeit, zusätzlich die Information durch Korrelation von aufeinanderfolgenden Schnittbildern auszunutzen.

Unabhängig vom Grad der Kompression führt die Extraktion von Cuboids mit einer Dimension von  $\{R_M, R_N, R_T\} = \{4, 4, 2\}$  zu einer hohen Rekonstruktionsqualität. Übergeordnet lässt sich feststellen, dass die Ausnutzung der Korrelation zwischen den Schnittbildern ( $R_T > 1$ ) tendenziell genauere Ergebnissen liefert. Es zeigt sich darüber hinaus, dass die Dimension der Cuboids innerhalb der Frame  $R_M \times R_N$  antiproportional mit der Erhöhung der Maskierung der  $k$ -Space-Koeffizienten gewählt werden sollte. Zusätzlich spielt eine Vergrößerung der Ausdehnung  $R_T$  für höhere Kompressionen eine wichtigere Rolle. Dadurch sind zusätzliche Informationspunkte extrahierbar, obwohl die Nulleinträge innerhalb der Frames dominieren. Außerdem begünstigen große Cuboids auch die Rekonstruktionsfähigkeit, da eine höhere Anzahl Subvolumen  $R = R_M R_N R_T$  in die gewichtete Mittelwertbildung der Wiederherstellung einfließen. Leider geht dies mit einer Abnahme der Repräsentantenanzahl  $N_R$  und daraus resultierend der Vielfalt einher, worunter die Qualität der Permutation bzw. Sparsity leidet. Dementsprechend



**Abbildung 4.5:** Auswertung der Tiefe der Multiskalenanalyse der SRWT  $L_p$  sowie nach Übergang zur SWT  $L_s$  im PCWT-Algorithmus.

ist bei der Wahl der Cuboidabmessung ein Trade-Off dieser Faktoren zu finden. In den nachfolgenden Untersuchungen zum eingeführten PCWT-Algorithmus werden daher Cuboids der Dimension  $4 \times 4 \times 2$  für die Extraktion eingesetzt.

#### 4.3.2.2 Wavelet-Zerlegungsstufen und Permutation

Wie bereits in Abschnitt 2.4.2.4 eingeführt, besteht der grundlegende Unterschied zwischen der SWT und SRWT darin, dass letztere die Permutation der Approximationskoeffizienten innerhalb der Wavelet-Zerlegung vorsieht. In diesem Teil der Arbeit erfolgt die Untersuchung der Tiefe der Multiskalenanalyse  $L = L_p + L_s$  sowie die Auswirkung hinsichtlich der Neuberechnung der Permutationen nach der Iterationenzahl von  $I_p$  im PCWT-Algorithmus.

Zusätzlich sei an dieser Stelle angemerkt, dass die dargestellten Kurven idealerweise einen monotonen Verlauf besitzen sollten. Allerdings führt die inhärente Verwendung von Zufallszahlen für den Startwert der Permutation zu Unterschieden in der Rekonstruktionsqualität bei gleichem Parametersatz und geringen Stichprobensatz.

**Tiefe der SRWT** Das Ziel der Umsortierung der Approximationskoeffizienten ist die Erzeugung eines hochgradig regulären Signals. Dadurch reduziert sich die Höhe der Detailkoeffizienten der modifizierten Multiskalenanalyse. Aufgrund der sukzessiven Tiefpassfilterung resultieren bereits reguläre Signale wieder in reguläre Signale. Dadurch ist unter Umständen die Anwendung einer Permutation auf bereits glatten Signalen nicht notwendig. Dementsprechend wird in diesem Abschnitt untersucht, bis zu welcher Tiefe  $L_p$  der Multiskalenanalyse eine Permutation der Approximationskoeffizienten einzusetzen ist, um eine stärkere Sparsifizierung durch die SRWT zu erreichen.

In der Abb. 4.5 wird die Tiefe der Multiskalenanalyse innerhalb der SRWT mit  $L = L_p$  (durchgezogene Linie) untersucht. Unabhängig vom Kompressionsgrad reduziert sich zunächst der Rekonstruktionsfehler mit tiefergehender Multiskalenanalyse. Bereits nach

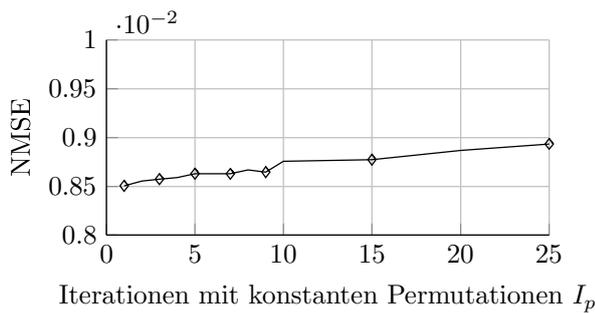
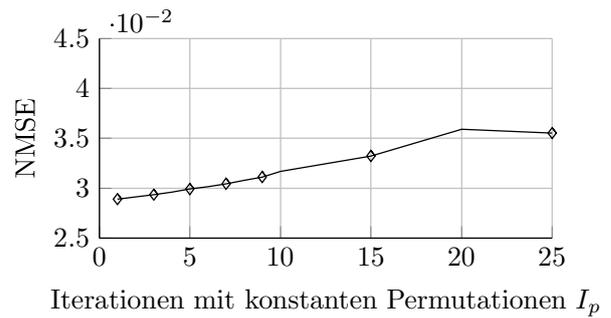
einer geringen Tiefe ist ein Sättigungsverhalten zu erkennen. Der Übergang dieser Bereiche kennzeichnet die Tiefe der SRWT, ab der sich die Rekonstruktionsqualität nur noch geringfügig verbessert. Der einleitenden Erklärung folgend, resultiert die Sättigung aus der sukzessiven Tiefpassfilterung die Approximationskoeffizienten. Diese bilden bereits in einer geringen Tiefe der Multiskalenanalyse reguläre Signale ab, sodass die Permutation keinen weiteren Beitrag zur Erhöhung der Sparsity erbringt. In den nachfolgenden Untersuchungen wird daher – im Hinblick auf einen minimalen Rekonstruktionsfehler – innerhalb der ersten drei Stufen der Multiskalenanalyse die Permutation der Approximationskoeffizienten im PCWT-Algorithmus implementiert.

**Tiefe der permutationsfreien Zerlegung** Nach der Ausnutzung der permutierten Approximationskoeffizienten, ausschließlich in den ersten Stufen des PCWT, erfolgt anschließend der Wechsel zur SWT-Realisierung. In den nachfolgenden Untersuchungen gilt es zu evaluieren, ob zusätzliche Stufen der Multiskalenanalyse unter Berücksichtigung des SWT durch sukzessive Hoch- und Tiefpassfilterung den Grad der sparsen Darstellung weiter erhöhen können.

Die Abb. 4.5 (gestrichelte Linie) zeigt die Fortsetzung zur Untersuchung der Tiefe der Multiskalenanalyse. Dafür wurde die Implementierung einer Permutation der Approximationskoeffizienten in den ersten drei Stufen ( $L_p = 3$ ) berücksichtigt. Auch hier verbessert sich die Rekonstruktion unabhängig vom Kompressionsgrad nur minimal. Allerdings geht diese Qualitätserhöhung mit einer Einsparung der aufwändigen Permutationsberechnung einher. Nichtsdestotrotz ist zu beachten, dass beim Hinzufügen weiterer Stufen die Berechnungszeit exponentiell ansteigt. Dies liegt in der Streckung der Filterkoeffizienten durch das Einfügen von Nullen begründet, da diese während der Faltungsoperation zu weiterem Berechnungsaufwand führen.

Um einen Trade-Off zwischen Berechnungszeit und Wiederherstellungsqualität zu erhalten, wird die Tiefe der Multiskalenanalyse auf sechs ( $L = 6$ ) für zukünftige Simulationen festgelegt. Das bedeutet, dass die Approximationskoeffizienten innerhalb der ersten drei Stufen ( $L_p = 3$ ) permutiert werden. Dann erfolgt ein Wechsel im PCWT-Algorithmus vom SRWT zum SWT, welcher die Wavelet-Koeffizienten abschließend ebenfalls für drei Stufen ( $L_s = 3$ ) zerlegt, um eine möglichst sparse Abbildung zu erhalten.

**Anzahl konstanter Permutation** Bis zu diesem Punkt der Betrachtung des PCWT wurde in jeder der  $I_{\max}$  Iterationen die Permutation der Approximationskoeffizienten innerhalb der SRWT neu berechnet. Dementsprechend erfolgt während der Wiederherstellung mit fortlaufender Iteration eine Anpassung der initial maskierten Daten im Originalbereich. Allerdings ändert sich die Umsortierungsreihenfolge der Wavelet-Koeffizienten – bezogen auf die Iteration – nur langsam. Dies liegt in der Verwendung der euklidischen Distanz für die Anordnung der Cuboids während der Permutation begründet. Im Gegensatz zur Korrelation räumlich benachbarter Cuboids wirken sich kleine Variationen der Einträge lediglich marginal auf die Reihenfolge aus. Resultierend aus

(a)  $\eta = 70\%$  und  $I_{\max} = 50$ (b)  $\eta = 90\%$  und  $I_{\max} = 100$ 

**Abbildung 4.6:** Auswertung der Anzahl konstanter Permutationen  $N_c$  bezogen auf die Iteration des PCWT-Algorithmus.

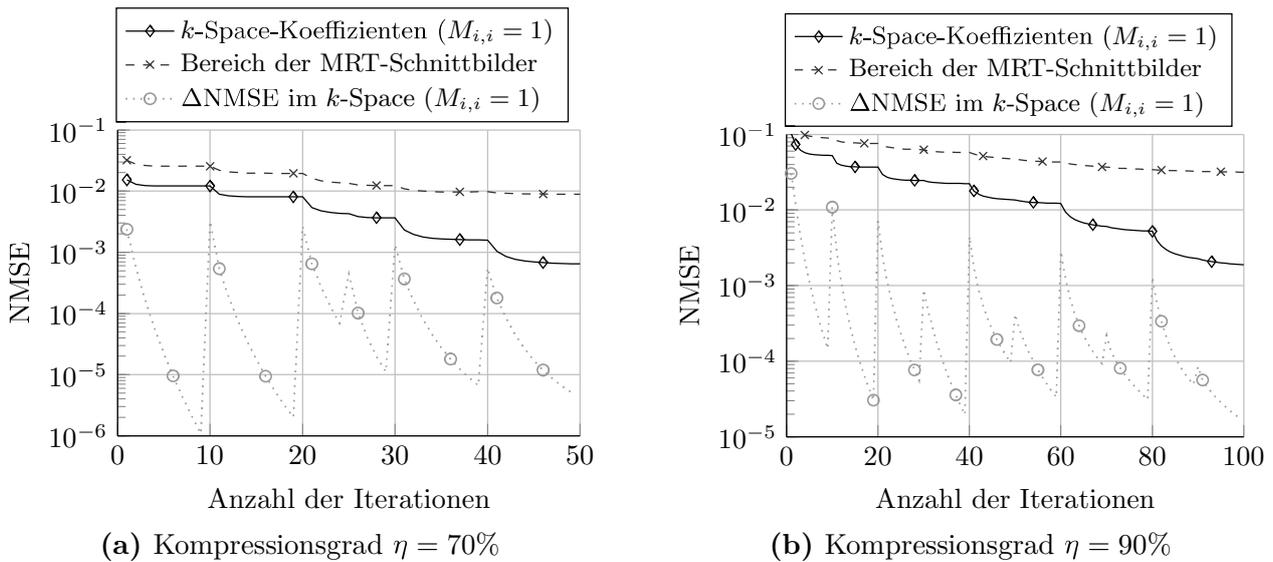
dieser Tatsache ist nachfolgend zu untersuchen, ob das  $I_{\max}/I_p$ -malige Konstanthalten der Umsortierungsreihenfolge innerhalb der Stufen der Multiskalenanalyse für jeweils  $I_p$  Iterationen einen signifikanten Einfluss auf die Rekonstruktionsqualität hat.

In der Abb. 4.6 ist dargestellt, wie sich die Neuberechnung der Permutation innerhalb der ersten drei Stufen der Multiskalenanalyse alle  $I_{\max}/I_p$  Iterationen auf die Wiederherstellungsqualität auswirkt. Anhand der Abbildung ist ein näherungsweise lineares Verhalten des Rekonstruktionsfehlers als Funktion der Iterationszahl  $I_p$  zwischen den Aktualisierungen der Permutationsreihenfolge zu erkennen. Im Vergleich der Abb. 4.6a und 4.6b wird deutlich, dass sich die Steigung der Funktion proportional zum Kompressionsgrad erhöht. Die Erhöhung der Aktualisierungsintervalle  $I_p$  der Permutationsanordnung für die Approximationskoeffizienten wirkt sich demnach schwerwiegender im Bereich hoher Kompression aus. Auch an dieser Stelle muss wieder ein Kompromiss zwischen Berechnungszeit und Güte getroffen werden. Dementsprechend ist die Iterationszahl der konstanten Permutationen auf  $I_p = 10$  für die kommenden Simulationen festgelegt.

### 4.3.2.3 Adaptives Thresholding

Die abschließende Betrachtung des PCWT-Algorithmus bildet die Implementierung und Untersuchung des adaptiven Thresholdings. Bereits in der Abb. 4.4 wurde das Problem des stufenförmigen Rekonstruktionsprozesses visualisiert. Wie bereits im Abschnitt 4.3.2 erläutert, bildet die Grundlage der adaptiven Anpassung der Schwellwerte die Fehlerabschätzung anhand der Rekonstruktion der unmaskierten  $k$ -Space-Koeffizienten nach Gl. (4.9) vor der Korrektur. Zur Verifikation dieser Abschätzung erfolgt in Abb. 4.7 die Gegenüberstellung der NMSE im unmaskierten  $k$ -Space sowie nach der uneingeschränkten Wiederherstellung im Zeitbereich, in dem die MRT-Schnittbilder dargestellt werden.

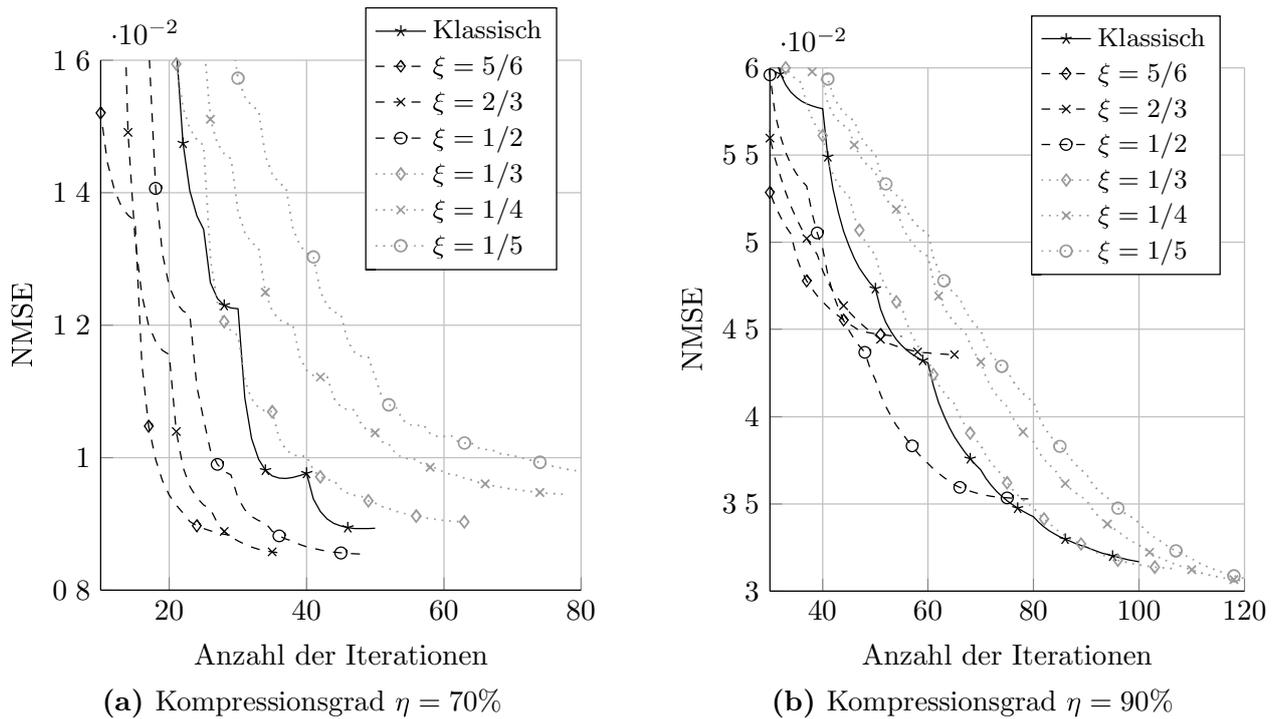
Unabhängig vom Kompressionsgrad weisen die Kurven in beiden Domänen den gleichen qualitativen Verlauf auf. Da lediglich die unmaskierten  $k$ -Space-Koeffizienten bei  $M_{i,i} = 1$  einfließen, liegt die primäre Diskrepanz der Absolutwerte, aufgrund der Maskierung, im



**Abbildung 4.7:** Entwicklung des Rekonstruktionsfehlers der unmaskierten  $k$ -Space-Koeffizienten sowie der MRT-Schnittbilder im Originalbereich. Analyse der stufenförmigen Abstufung der Schwellwerte im PCWT.

fehlenden Anteil der Signalenergie. Unter Berücksichtigung der maskierten Werte bei  $M_{i,i} = 0$  und Verwendung einer Orthonormalbasis sollten die Kurven deckungsgleich sein. Nichtsdestotrotz bildet die Fehlerentwicklung der  $k$ -Space-Koeffizienten das Sättigungsverhalten des tatsächlichen Rekonstruktionsprozesses der MRT-Schnittbilder im Originalbereich adäquat ab. Somit können nachfolgend die unmaskierten Koeffizienten als Kriterium zur Schwellwertanpassung verwendet werden. Des Weiteren ist die Differenz der jeweiligen Fehler zwischen zwei aufeinanderfolgenden Iterationen nach Gl. (4.11), hinsichtlich der unmaskierten  $k$ -Space-Koeffizienten, aufgetragen (gestrichelte Linie). Anhand der Betragswerte lässt sich der Fortschritt der Rekonstruktion während einer möglichen Fehlersättigung ableiten. Unter Annahme einer Schranke  $\varepsilon_T$  von  $10^{-5}$ , unabhängig vom Kompressionsgrad, könnte eine Beschleunigung sowie eine mögliche Erhöhung der Rekonstruktionsgüte erreicht werden. Um diese Eigenschaft auszunutzen, ist nachfolgend die Implementierung der adaptiven Anpassung der Schwellwerte gemäß Gl. (4.8) im PCWT-Algorithmus zu untersuchen. Das Halten sowie Herabsetzen der Schwelle für das Hard-Thresholding basiert auf dem Sättigungsfortschritt des Rekonstruktionsfehlers nach Gl. (4.11) zwischen zwei Iterationen.

In der Abb. 4.8 ist eine Gegenüberstellung der klassischen stufenweisen Schwellwertanpassung mit der vorgeschlagenen adaptiven Implementierung, in Abhängigkeit der Absenkungsrate  $\xi \in (0, 1)$ , dargestellt. Um die Übersicht in den Plots zu erhöhen, wurden die ersten Iterationen sowie größere Fehlerwerte nicht visualisiert. Übergeordnet liefert das eingeführte adaptive Thresholding des PCWT einen positiven Beitrag zur Rekonstruktion bezüglich einer Reduktion der iterativen Berechnungen und/oder der Wiederherstellungsqualität. Allerdings ist bedauerlicherweise kein eindeutiger Trend hinsichtlich der Absenkungsrate festzustellen, sodass die Abbildungen abhängig vom



**Abbildung 4.8:** Auswertung des adaptiven Thresholdings im PCWT-Algorithmus sowie der Vergleich zur klassischen stufenweisen Anpassung der Schwellwerte.

Kompressionsgrad individuell zu betrachten sind. In Abb. 4.8a zeigt der adaptive Ansatz, im Vergleich zur klassischen stückweisen Anpassung der Schwellwerte, eine höhere Rekonstruktionsgüte nach einer geringeren Iterationszahl. Dieser Doppelvorteil stellt sich in dieser Untersuchung bei einer Absenkungsrate von  $\xi \geq 0.5$  ein. Kleinere Werte lösen das Gegenteil, also eine geringere Qualität bei mehr Iterationen, aus. Anzunehmen ist, dass ohne die Einschränkung eines Abbruchkriteriums durch die Fehlerdifferenz aufeinanderfolgender Iterationen alle Kurven zu einem gemeinsamen Grenzwert konvergieren. Im Gegensatz dazu ist dieser Doppelvorteil für hohe Kompressionsgrade, wie in Abb. 4.8b, nicht zu beobachten. Um eine höhere Güte als die klassische stückweise Anpassung der Schwellwerte nach der Wiederherstellung zu erreichen, muss in zusätzliche Iterationen investiert werden. In dieser Untersuchung folgt daraus eine Absenkungsrate von  $\xi \leq 0.5$ . Größere Werte bewirken eine zu frühe Sättigung und damit einen Abbruch der Rekonstruktion. Zusammenfassend ist festzuhalten, dass für eine optimale Rekonstruktion ein spezifischer Wert für die Absenkungsrate  $\xi$ , in Abhängigkeit des Kompressionsgrads  $\eta$ , definiert werden muss.

Unter der Annahme einer monoton fallenden Entwicklung von  $\xi$  als eine Funktion von  $\eta$  soll nachfolgend ein lineares Regressionsmodell zweiten Grades

$$\tilde{\xi}(\eta) = c_2 \eta^2 + c_1 \eta + c_0 \quad (4.12)$$

für die Definition der Absenkungsrate eingeführt werden. Es fließen vier Datenpunkte zur Erstellung des Ausgleichsmodells ein. Die ersten beiden leiten sich aus Abb. 4.8 als geeignete Wahl der Absenkungsraten für die jeweiligen Kompressionsgrade,  $\xi = 2/3$  für  $\eta = 70\%$  und  $\xi = 1/3$  für  $\eta = 90\%$ , ab. Unter Berücksichtigung des Wertebereiches des Parameters  $\xi \in (0, 1)$  können zwei zusätzliche Datenpunkte für das Modell definiert werden. Der Entwicklung folgend, sei für BrainWeb  $\xi = 0$  als Extremwert für  $\eta = 100\%$  festgelegt. Um eine Wertebereichsverletzung zu vermeiden, wird der verbleibende Datenpunkt  $\xi = 1$  nicht  $\eta = 0\%$ , sondern dem Kompressionsgrad  $30\%$  zugeordnet. Die Verschiebung dieses Punktes und die damit einhergehende Erhöhung der örtlichen Distanz auf der Abszisse, führt dazu, dass sich das Maximum der quadratischen Funktion (4.12) zwischen den Datenpunktansammlungen positioniert. Mit  $\xi = 1$  für die geringste Kompression der Betrachtung resultiert dies – für das Maximum – zwangsläufig in ein Verlassen des Wertebereiches  $(0, 1)$ . Die untere Hälfte des Kompressionsbereiches  $\eta \leq 50\%$  besitzt aus praktischer Sicht eine geringere Relevanz. Ein geringer Grad der Maskierung des  $k$ -Spaces, beispielsweise durch die vorgestellten Masken  $\Omega_s$  oder  $\Omega_r$ , führt lediglich zur Entfernung der höchsten Frequenzanteile am äußeren Rand des Spektrums. Die dominanten Koeffizienten, welche maßgebend für den Informationsgehalt der MRT-Aufnahme sind, befinden sich im Zentrum lokalisiert [73].

Aufgrund der geringeren Relevanz von schwachen Maskierungen des  $k$ -Spaces ist außerdem lediglich der Kompressionsbereich ab  $50\%$  für die folgende Auswertung zu betrachten. Im Sinne einer optimalen Rekonstruktion müssen die drei Regressionskoeffizienten der Gl. (4.12) für jeden Datensatz individuell bestimmt werden. Daher sind die Ergebnisse für Shepp-Logan und BraTS2013 in der Abb. A.3 im Anhang A.4.1 zu finden. Für das Test-Phantom Shepp-Logan können die gleichen Absenkungsraten wie BrainWeb abgeleitet werden. Lediglich für die gemessene MRT-Aufnahme BraTS2013 sind abweichende Absenkungsraten  $\xi = \{5/6, 2/3\}$  für  $\eta = \{70\%, 90\%\}$  erforderlich, sodass ein zweites Ausgleichsmodell aufzustellen ist.

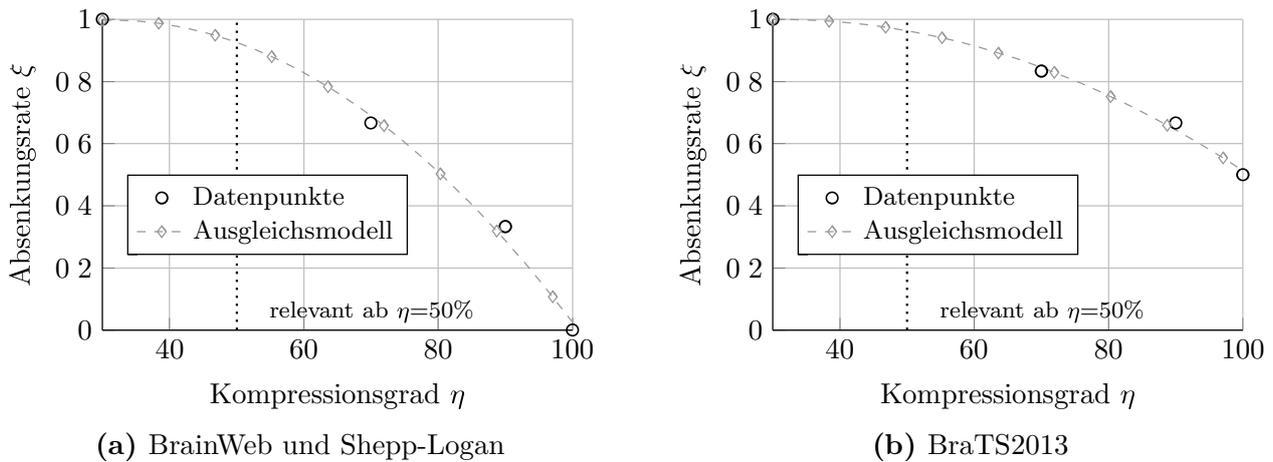
Die Abb. 4.9 zeigt die resultierenden Ausgleichsmodelle basierend auf den vier definierten Datenpunkten. Für die Test-Phantome BrainWeb und Shepp-Logan kann ein einheitlicher Satz an Koeffizienten für das Modell

$$-0.000206 \eta^2 + 0.0129 \eta + 0.795 \quad (4.13)$$

verwendet werden. Des Weiteren erfolgt die Implementierung eines alternativen Regressionsmodells für den BraTS2013 Datensatz:

$$-0.000103 \eta^2 + 0.006461 \eta + 0.8973. \quad (4.14)$$

Neben den dazugehörigen Koeffizienten des Modells stellen die Gl. (4.13) und (4.14) zudem eine funktionale Beziehung zwischen einer geeigneten Absenkungsrate und dem Kompressionsgrad dar. Dadurch erfolgt die Anpassung der Schwellwerte aus einem nahezu vollständig adaptiven Prozess.



**Abbildung 4.9:** Verifikation der erstellten Ausgleichsmodelle anhand der festgelegten Datenpunkte bei  $\eta = \{30, 70, 90, 100\}\%$  für die Absenkungsraten  $\xi = \{1, 2/3, 1/3, 0\}$  für BrainWeb und Shepp-Logan sowie  $\xi = \{1, 5/6, 2/3, 1/2\}$  für BraTS2013.

### 4.3.3 Rekonstruktionsqualität

Abschließend erfolgt an dieser Stelle der Arbeit die Untersuchung der Rekonstruierbarkeit des eingeführten PCWT-Ansatzes für verschiedene MRT-Daten in Abhängigkeit des Maskierungsgrades der  $k$ -Space-Koeffizienten [109]. Dazu werden die drei MRT-Datensätze Shepp-Logan, BrainWeb und BraTS2013, aus Abschnitt 4.2.1, mit aufsteigender Komplexität des Detailanteils verwendet. Die Lösung der IDM, in Form des vorgestellten PCWT-Ansatz, fließt in die Untersuchung, unter Berücksichtigung der algorithmischen Anpassung sowie optimierten Parameter, ein. Letztere sind in Tab. 4.1 als Zusammenfassung dargestellt.

Um die wiederhergestellten MRT-Schnittbilder qualitative beurteilen zu können, sind die Ergebnisse mit SotA-Methoden sowie klassischen Kompressionsverfahren zu vergleichen. Erstere berücksichtigen die technischen und physiologischen Voraussetzung des MRT-Gerätes und führen daher ebenfalls die Datenerfassung, mit Hilfe von nichtkartesischen Trajektorien, durch. Dazu gehören Ansätze basierend auf CS, aus Abschnitt 2.3, sowie das Block-Matching-Inpainting als 3D- und 4D-Variante aus Abschnitt 2.4.2.2. Des Weiteren soll durch das Hinzufügen von JPEG, JPEG2000 und MPEG-4 in die Simulation eine Art Referenz bezüglich der Wiederherstellungsqualität gesetzt werden, da diese

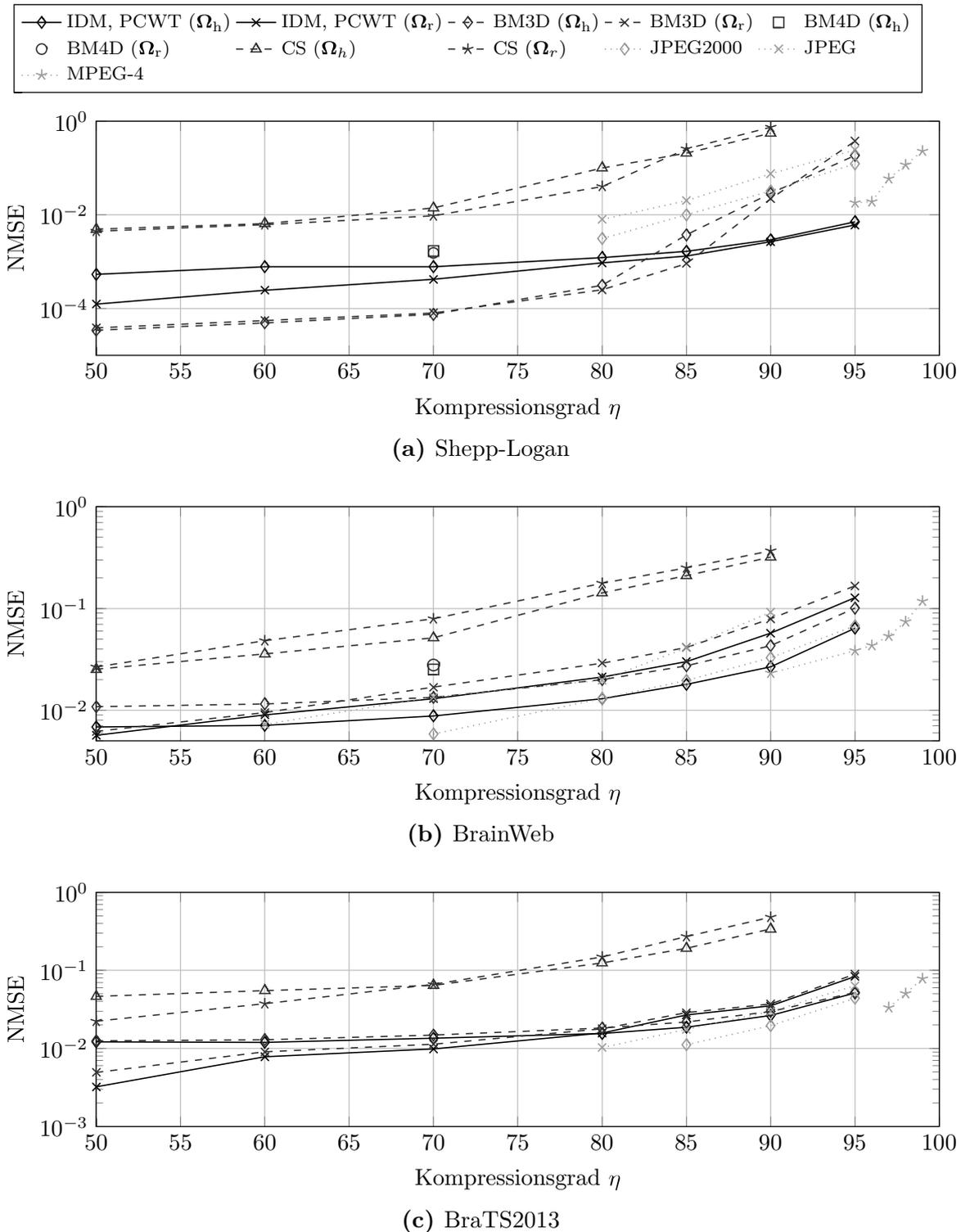
**Tabelle 4.1:** Aufstellung der optimierten Parameter des PCWT-Algorithmus zur Rekonstruktion von MRT-Daten.

Cuboids	Absenkungsrate	$L_p + L_s$	$I_p$	$\lambda_{I,\max}$
$\{4, 4, 2\}$	$\tilde{\xi}(\eta)$ aus Gl. (4.12)	$3 + 3$	10	$200 \cdot 10^{-3}$

klassischen Verfahren ausschließlich auf die Datenkompression von Bild- bzw. Videodatenansätzen ausgelegt sind. Um hochqualitative Schnittbilder als Ausgangsmaterial für die Standardkompressionsverfahren zu erhalten, ist die komplette Aufnahme des  $k$ -Spaces erforderlich. Daher sind diese Ansätze für MRT-Anwendungen nicht praktikabel und dienen lediglich der rein theoretischen Betrachtung. In der nachfolgenden Simulation werden die JPEG-Varianten als Frame-by-Frame Bildverarbeitung eingesetzt. Ausschließlich MPEG-4 nutzt die Korrelation der aufeinanderfolgenden MRT-Schnittbilder aus. MPEG-4 verwendet eine Anzahl von äquidistanten Frames als Referenz, um lediglich die Änderung der Intensitätswerte zu erfassen. Dreidimensionale Datensätze, wie Videos, mit minimalen Änderungen resultieren dadurch in signifikant höheren Kompressionsgraden.

**Bewertung der Güte** Die Abb. 4.10 stellt die Auswertung der drei MRT-Datensätze hinsichtlich der Rekonstruktionsqualität als Funktion des Kompressionsgrades im Bereich  $\eta \in [50\%, 100\%]$  dar. Wie zu Beginn des Kapitels erörtert, ergeben schwächere Maskierungen des  $k$ -Spaces aus technischer Sicht keinen Sinn, da der primäre Informationsanteil im Zentrum des Spektrums konzentriert ist. Für transformationsbasierte Rekonstruktionsansätze sollte daher zwischen zwei kompressionsbedingten Bereichen, deren Übergang in Abhängigkeit des betrachteten Datensatzes variiert, differenziert werden. Unter Berücksichtigung der Trajektorien aus Abb. 4.1 ist der erste Abschnitt größtenteils durch die Maskierung von vernachlässigbar kleinen Koeffizienten an den Rändern des  $k$ -Spaces geprägt. Folgerichtig korrespondieren diese Werte zum hochfrequenten Anteil der Aufnahme. Dementsprechend resultiert die Unterdrückung dieser Werte lediglich in eine geringere Qualitätsreduktion der MRT-Schnittbilder. Sobald mit zunehmender Maskierung die signifikanten  $k$ -Space-Koeffizienten in Richtung des Zentrums unterdrückt werden, erst dann ist eine Bewertung der Rekonstruktionsverfahren sinnvoll. Die adäquate Wiederherstellung des niederfrequenten Anteils des Spektrums ist maßgeblich für die Qualität der MRT-Aufnahme verantwortlich. In der Regel entspricht die Maskierung dieser Werte dem Bereich der hohen Kompression.

Der CS-Ansatz in den Untersuchungen folgt der Umsetzung gemäß [72, 73]. Dementsprechend wird das Minimierungsproblem aus Gl. (4.1) mit dem TV-Strafterm erweitert. Die dazugehörige Implementierung dieser CS-Rekonstruktion stammt aus [71]. Als Sparsifizierungsbasis der jeweiligen MRT-Datensätze wurde eine Level-4 Wavelet-Transformation mit Daubeschies-4 Motherwavelet verwendet. Die Unterabtastungen basieren auf den Trajektorien aus Abb. 4.1. Wie in den Abb. 4.10 ersichtlich, verringert sich die CS-Rekonstruktionsgüte – neben einer erhöhten Unterabtastung  $\eta$  – mit steigendem Detailgrad der MRT-Aufnahme. Je komplexer die Strukturen innerhalb der Frames ausgebildet sind, desto mehr Koeffizienten werden im Transformationsbereich für die Darstellung benötigt. Allerdings ist eine grundsätzliche Sparsity essentiell für den Erfolg der CS-Rekonstruktion. Nimmt die Dünnbesetztheit ab und/oder ist die



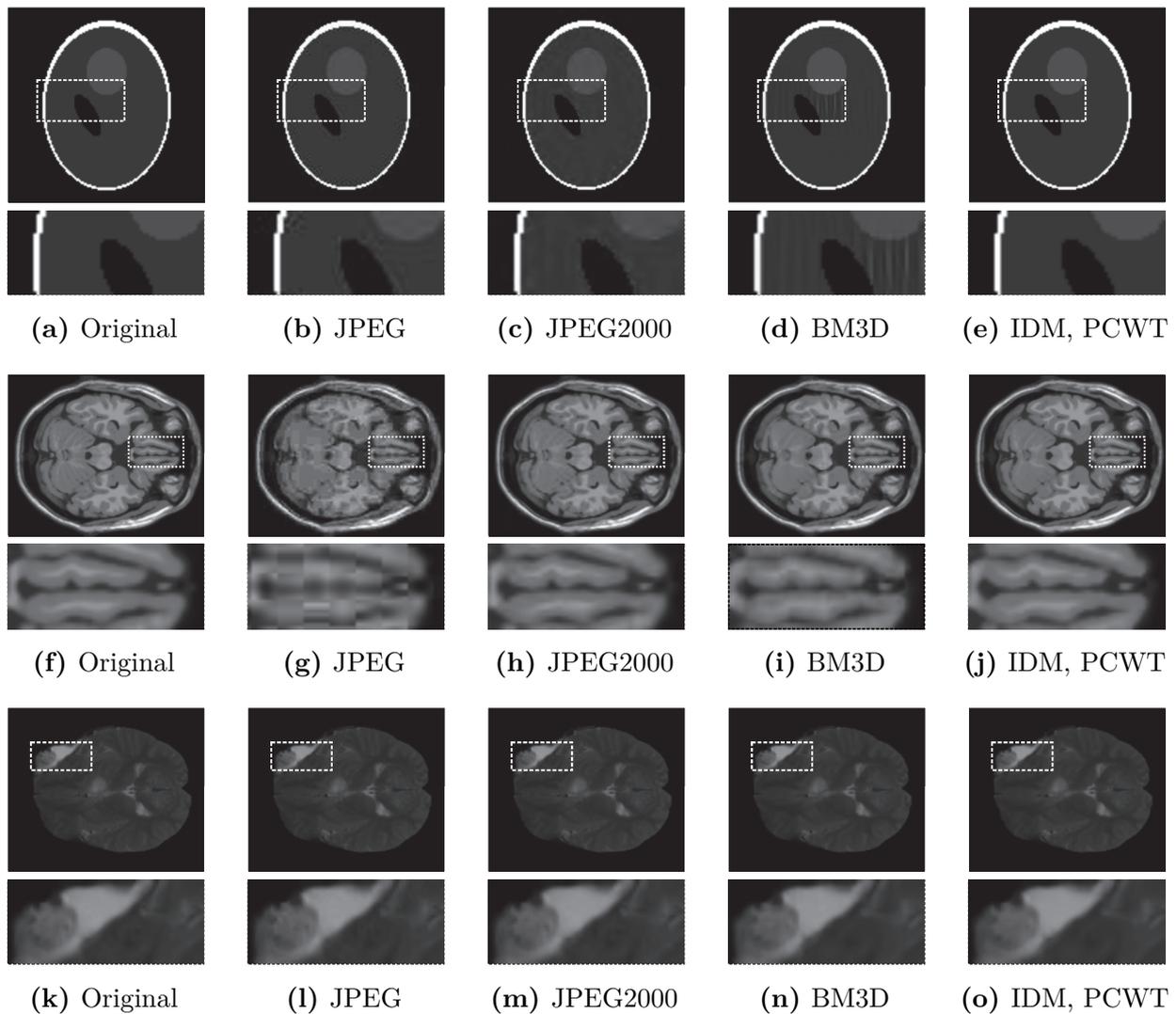
**Abbildung 4.10:** Auswertung der Rekonstruktionsqualität als Funktion des Kompressionsgrades  $\eta$  unter Berücksichtigung der drei MRT-Datensätze Shepp-Logan, BrainWeb und BraTS2013. Es erfolgt eine Gegenüberstellung der Lösung der IDM, basierend auf dem vorgestellten PCWT-Algorithmus, mit SotA-Verfahren sowie klassischen Kompressionsmethoden [109].

Anzahl der CS-Projektionen zu gering, resultiert dies – wie hier dargestellt – in einem niederfrequenten Ergebnis.

Vielversprechender sind Ansätze basierend auf der überlappenden Extraktion von Repräsentanten, welche die im Datensatz vorhandene redundante Information zur Rekonstruktion ausnutzen. Die SotA-Verfahren, wie BM3D und BM4D, stellen aus den extrahierten Repräsentanten mehrdimensionale Gruppen zusammen, die darauffolgend transformiert und gefiltert werden, um eine Approximation der maskierten Koeffizienten zu erreichen. Wie in den Untersuchungen aus Abb. 4.10 dargestellt, erzielt das Block-Matching-Inpainting eine deutliche Aufwertung der Rekonstruktionsqualität im Vergleich zum CS-Ansatz. Das hochwertigste Ergebnis im moderaten Kompressionsbereich wird vom BM3D im Hinblick auf das einfache Test-Phantom Shepp-Logan erreicht. Sobald eine starke Maskierung des  $k$ -Spaces oder komplexere MRT-Aufnahme vorliegt, erschaffen die Block-Matching-Ansätze nach der mehrdimensionalen Transformation keine ausreichende Sparsity in den Gruppen aus Repräsentanten. Dadurch ist eine adäquate Rekonstruktion der Übergänge von verschiedenen Intensitätsarealen nicht mehr möglich.

Analog zu den klassischen Datenkompressionsverfahren ist ein Zuwachs der Wiederherstellungsgüte der Lösung der IDM unabhängig von den Trajektorien gegenüber den anderen SotA-Ansätzen zu verzeichnen. Lediglich der BM3D approximiert den synthetischen Shepp-Logan Datensatz bei moderater Maskierung des  $k$ -Spaces genauer. Im Gegensatz zum Block-Matching-Ansatz liefert der PCWT, mit Hilfe der transformierten und permutierten Repräsentanten, eine vorteilhafte reguläre Darstellung. Dementsprechend liegt ein hoher Grad der Sparsity vor, was beim anschließenden Thresholding lediglich zur Unterdrückung weniger Koeffizienten führt. Durch die verbleibenden dominanten Wavelet-Koeffizienten ist der PCWT auch bei starker Maskierung in der Lage, die Gewebestrukturen präzise wiederherzustellen. Mit zunehmendem Detailgrad innerhalb der MRT-Aufnahme – vom schlichten Shepp-Logan zum gemessenen BraTS2013 – heben sich die klassischen Verfahren, welche auf die Datenkompression spezialisiert sind, hinsichtlich der Rekonstruktionsqualität von den SotA-Ansätzen ab. Da es sich bei der MRT-Aufnahme um eine kontinuierliche Abfolge ähnlicher Schnittbilder handelt, existieren keine inhaltlichen Sprünge. Die Grundlage der Kompression mit MPEG-4 bildet die Verarbeitung der Differenzwerte zwischen aufeinanderfolgenden Frames. Kleinere Kompressionsgrade sind für diese Datensätze für den betrachteten Codec nicht immer möglich.

**Optische Begutachtung** Allerdings ist eine Aussage über die optische Qualität der MRT-Wiederherstellung anhand des numerischen NMSE-Bewertungskriteriums problematisch. In Abhängigkeit des betrachteten Ansatzes kann sich die Charakteristik der rekonstruierten MRT-Frames trotz ähnlichem NMSE-Wert sichtbar unterscheiden. In welcher Form die optischen Verluste vertretbar sind, muss in letzter Instanz das medizinische Fachpersonal entscheiden. An dieser Stelle der Arbeit werden ohne



**Abbildung 4.11:** Optischer Vergleich der Rekonstruktionsqualität der MRT-Datensätze Shepp-Logan (erste Zeile), BrainWeb (zweite Zeile) und BraTS2013 (dritte Zeile) bei  $\eta = 90\%$  Kompression [109].

Wertung lediglich die visuellen Unterschiede zwischen den wiederhergestellten MRT-Schnittbildern erörtert.

In der Abb. 4.11 sind die optischen Ergebnisse eines einzelnen MRT-Frames nach der Wiederherstellung durch verschiedene Verfahren dargestellt. Die erste Spalte der Abbildung beinhaltet mit zunehmendem Detailgrad das originale Schnittbild als Referenz. Für die synthetischen Datensätze, Shepp-Logan und BrainWeb, ist entsprechend anzunehmen, dass der gesamte  $k$ -Space aufgenommen wurde.

Sowohl die Resultate der JPEG-Varianten als auch der Inpainting-Ansätze basieren auf einer 90%-igen Datenkompression bzw. Maskierung der  $k$ -Space-Koeffizienten. MPEG-4 ist nicht dargestellt, da eine Verarbeitung bei  $\eta = 90\%$  nicht für jeden Datensatz möglich war. Die anderen klassischen Datenkompressionsverfahren in Spalte zwei und drei sind, Stimuli übergreifend, geprägt durch Artefakte nach der Dekompression. Dies

äußert sich in allen dekomprimierten JPEG-Schnittbildern in Form des Ringing-Effekts, welche durch das Gibbsche Phänomen hervorgerufen werden. Dementsprechend führt die Transformation zu einer Verpixelung an starken Intensitätsübergängen (Isophoten). Liegen Areale in der Aufnahme vor, an denen eine hohe Dichte dieser Übergänge existieren, kann dies weiter zur Ausbildung von Blockartefakten führen. In Abb. 4.11g sind die  $8 \times 8$ -Blöcke der JPEG-Dekompression deutlich zu erkennen.

Abgesehen vom Ergebnis in Abb. 4.11d liefern die Inpainting-Ansätze eine präzise Approximation der originalen MRT-Datensätze in der ersten Spalte. Sowohl der BM3D als auch die vorgestellte Lösung der IDM sind in der Lage die Textur des Tumors im BraTS2013 aufzulösen. Im Gegensatz zu den JPEG-Varianten sind die Pigmente und der Umriss der Gewebeveränderung kontrastreich dargestellt. Lediglich im direkten Vergleich der Großaufnahme des BrainWeb-Datensatzes sind Unterschiede zwischen den Ergebnissen der Inpainting-Rekonstruktion festzustellen. Mit dem eingeführten PCWT-Algorithmus ist es möglich die Konturen des Gewebes innerhalb der Schnittaufnahme des Test-Phantoms mit höherem Grad der Tiefenschärfe wiederherzustellen.

## 4.4 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt wurde eine Lösung der IDM zur Verbesserung von SotA-Ansätzen im medizinischen Anwendungsbereich MRT, mit Hilfe von existierenden Trajektorien als Maskierung zur beschleunigten Aufnahme des  $k$ -Spaces, vorgestellt und diskutiert. Die Herausforderung bestand in der Rekonstruktion der fehlenden  $k$ -Space-Koeffizienten nach einer definierten Unterabtastung, um die MRT-Aufnahmezeit für den Patienten zu reduzieren. Im Zuge dessen erfolgte die Entwicklung des PCWT-Algorithmus mit adaptiver Schwellwertanpassung zur dreidimensionalen Wiederherstellung von maskierten MRT-Daten. Im Gegensatz zum zugrunde liegenden zweidimensionalen RTBWT-Verfahren wies der eingeführte PCWT, neben einer höheren Rekonstruktionsqualität, eine geringere Berechnungsdauer auf. Anhand der drei vorgestellten Test-Phantomen Shepp-Logan, BrainWeb und BRaTS2013, welche mit einem aufsteigenden Detailgrad der MRT-Aufnahmen einhergehen, wurden die algorithmischen Parameter und die Güte der Datenwiedergewinnung untersucht. Zur qualitativen Einordnung des Rekonstruktionsergebnisses erfolgte der Vergleich der Lösung der IDM mit den SotA-Ansätzen sowie klassischen Kompressionsmethoden. Obwohl die JPEG-Verfahren auf die Datenkompression optimiert wurden, allerdings ungeeignet für die reduzierte Aufnahme des  $k$ -Spaces sind, erzielte der PCWT eine numerisch und optisch präzisere Rekonstruktion bei synthetischen MRT-Datensätzen. Des Weiteren präsentierten sich die inpaintingbasierten SotA-Verfahren als deutlich vielversprechender, hinsichtlich der Datenwiederherstellung unabhängig vom Kompressions- oder Detailgrad der MRT-Aufnahme, als die CS-Implementierung. Neben der deutlichen Identifikation des Tumors verzeichnete die vorgestellte Lösung der IDM im Bereich der hohen Kompression zusätzlich eine höhere

Rekonstruktionsgüte im Vergleich zu den Block-Matching-Varianten, welche derzeit zu den SotA-Inpaintingansätzen im MRT-Bereich gehören.

In diesem Kapitel werden Lösungen der IDM für weitere Anwendung kompakt vorgestellt. Im Zuge dessen erfolgt eine eingeschränkte Darstellung der Problemstellung sowie eine kurze Erörterung der Ergebnisse. Im Vordergrund der Untersuchungen steht die Vorstellung und Implementierung des IDM-Ansatzes. Ein Vergleich mit existierenden Ansätzen oder die Optimierung der algorithmischen Parameter nimmt in diesem Kapitel eine untergeordnete Rolle ein.

## 5.1 Active Pixel Sensor

In diesem Teil erfolgt die Anwendung der vorgestellten IDM aus Abschnitt 2.5 zur Restauration beschädigter Bildaufnahmen in Satellitensystemen. Dieses Szenario beinhaltet ein klassisches Restaurationsproblem. Die Grundlage bilden Complementary Metal-Oxide-Semiconductor (CMOS)-Active Pixel Sensor (APS)-Aufnahmen von Objekten im Weltall, welche allerdings durch Strahlung sowie Alterung korrumpiert wurden. Dabei sind die Störungen mit Hilfe von Statusflags als Maskierung zu interpretieren. Um dieses Problem zu lösen, erfolgt der Einsatz des Inpaintingansatzes für Bildverarbeitung aus Abschnitt 2.4.

### 5.1.1 Problemstellung

Im Entwurf von Integrated Circuits (IC) sind in den letzten Jahren zwei konträre Entwicklungen zu beobachten. Dazu gehört einerseits der anwachsende Bedarf nach Commercial Off The Shelf (COTS) Komponenten für sicherheitskritische Systeme, da somit eine Einsparung der Entwicklungskosten und -zeit zu erreichen ist. Andererseits wird fortschreitend die technologische Strukturabmessung verkleinert. Daraus resultiert eine anspruchsvolle Einflussuntersuchung des Prozesses, der Umgebungsvariation sowie der Alterung von Transistoren. In diesem Abschnitt werden beide Ausrichtungen in einem Verbundansatz als Systementwurf, unter Berücksichtigung von Zuverlässigkeit für ausfallbedrohte Komponenten auf einem Satelliten, betrachtet.

Sowohl analoge Schaltungen als auch speziell die digitale Bildgebung, basierend auf APS, zeigen unterschiedliche Formen der Zuverlässigkeitsverletzung. Die verschiedenen

Auswirkungen dafür können beispielsweise Umgebungseinflüsse, wie Temperatur und Strahlung, sein [21]. Des Weiteren bildet Alterung eine schaltungsbedingte Ursache [17, 57]. Diese Einflüsse treten in modernen Herstellungsprozessen, aufgrund der immer weiter schrumpfenden Technologiegrößen, deutlicher in den Vordergrund [35]. Die Arbeit [20] zeigt, dass die Summe dieser Effekte auf der Device-Ebene berücksichtigt werden kann. Besonders in bildgebenden Anwendungen ist der Einfluss auf die Gesamtheit der Pixelsensoren, welche die Aufnahme abbilden, zu betrachten. Somit muss die Abstraktion auf der Systemebene erfolgen, da ein APS-Array aus Millionen unabhängigen Pixelsensoren mit dazugehörigen Auslese- und Verarbeitungsschaltungen bestehen kann, welche den Einflüssen ausgesetzt sind.

Nachfolgend wird ein Satellitensystem betrachtet, welches APS-gestützte Aufnahmen von Objekten im Weltall erstellen soll. Auf solchen Satelliten sind sowohl das Array aus APS als auch die damit verbundenen Auslese- und Verarbeitungsschaltungen hinterlegt, die den Einflüssen von Strahlung und Alterung ausgesetzt sind. Dabei wird ein sogenannter Delta-Sigma Modulator (DSM) zum Auslesen in Kombination mit einer Online-Überwachungsschaltung zur Detektion von Ausfällen eingesetzt. Satelliten unterliegen Einschränkungen hinsichtlich des Flächen- und Energiebedarfs. Daher stehen in diesem Szenario keine Ressourcen für die schaltungstechnische Implementierung von Korrekturkomponenten zur Verfügung. Selbst wenn eine Korrekturschaltung implementiert werden könnte, wäre diese ebenfalls den Störeinflüssen ausgesetzt. Dementsprechend ist ein solcher Satellit als ressourcenlimitiertes System spezifiziert, dem lediglich eine stark eingeschränkte Berechnungskapazität zur Verfügung steht.

Strahlungsereignisse führen an den betroffenen Positionen innerhalb des APS-Arrays zu einer maximalen Aktivierung der Pixelsensoren. Diese sogenannten Hot Pixels führen in der Bildaufnahme zu weißen Bildpunkten, die, aufgrund der Übersteuerung, mit dem Werte 255 nach der A/D-Wandlung einhergehen. In Abhängigkeit der Art und Architektur der Ausleseschaltung resultieren diese strahlungsbedingten Korruptionen in weiße Linien oder Mosaikstrukturen.

Wohingegen die Ausfälle, basierend auf der Alterung, mit der Verwendungshäufigkeit sowie der Lichtintensität der APS korrelieren. Dementsprechend wirkt sich die Degradierung auf die davon betroffenen Pixel schnell aus. Diese Sensoren erfahren mit der Zeit eine asymmetrische Verschiebung im DSM. Die implementierte Online-Überwachungsschaltung ist dann in der Lage, die entstandene Abweichung zu detektieren. Das Resultat dieser Komponenten liefert eine Matrix  $\mathbf{X} \in [0, 255]^{M \times T}$  mit den Intensitätswerten sowie eine Matrix  $\mathbf{\Omega} \in \{0, 1\}^{M \times T}$  bestehend aus Flags. Mit dem Flageintrag Null werden korrumpierte Pixel durch Strahlung oder Alterung gekennzeichnet.

Die Bildaufnahmen der Objekte aus dem Weltall, mit Hilfe des APS-Arrays auf dem Satelliten, sollen anschließend auf der Erde ausgewertet werden. Dementsprechend erfolgt die Übertragung beider Datensätze,  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{\Omega}$ , wobei der Beitrag von  $\mathbf{\Omega}$  zum Datenvolumen durch Lauflängenkodierung vernachlässigbar klein gestaltet werden kann. Auf der nachfolgenden algorithmischen Ebene nehmen die Störungsursachen der APS,



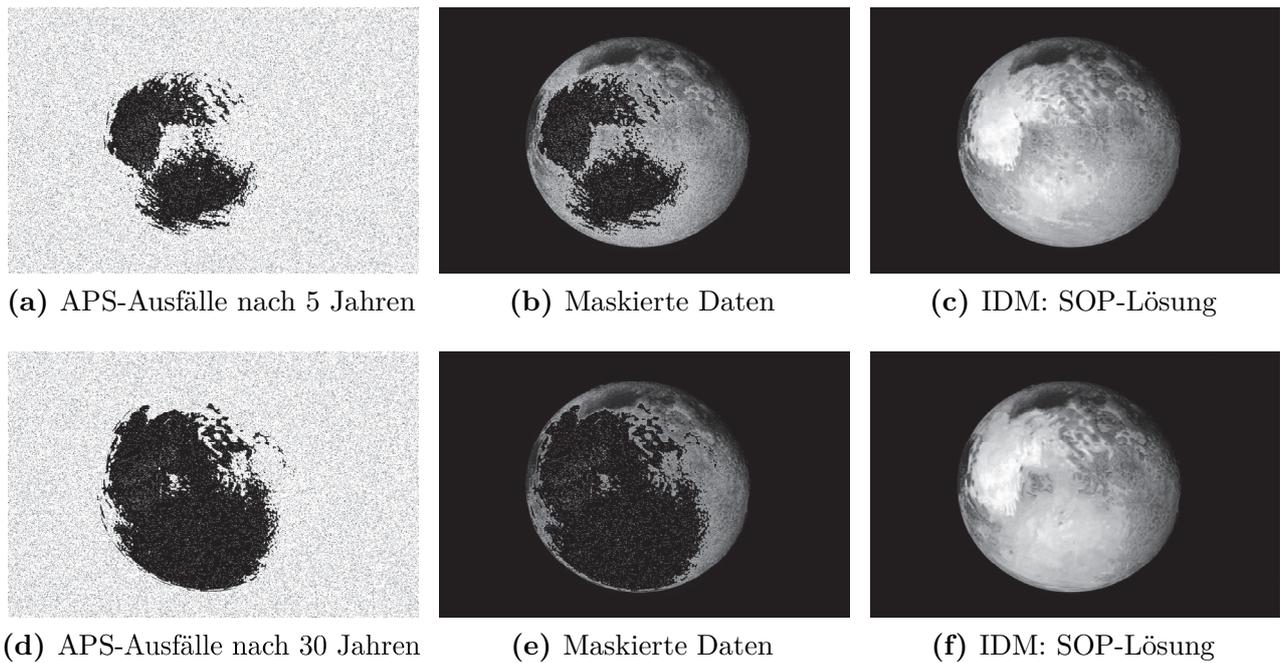
**Abbildung 5.1:** Als Testbild  $\mathbf{X}$  wird die NASA-Aufnahme von Pluto verwendet [82]. Die Dimension des Datensatzes ist  $717 \times 1041$ .

Strahlung oder Alterung, eine untergeordnete Rolle ein, sodass die Pixelfehler auf ein und die gleiche Weise behandelt werden können.

Die, in dieser Arbeit vorgestellte, Lösung der IDM sieht daher vor, die unvermeidbaren APS-Korruptionen zu akzeptieren und die fehlerbehafteten Werte mit Hilfe eines Inpaintingansatzes auf der Erde zu rekonstruieren [106]. Als Maske wird die Matrix  $\mathbf{\Omega}$  verwendet, da diese während der Aufnahme die ursprünglichen und korrumpierten APS durch die Flags kennzeichnet. Um den IDM-Ansatz untersuchen zu können, wird im nachfolgenden Abschnitt als Testdatensatz eine National Aeronautics and Space Administration (NASA)-Aufnahme von Pluto gemäß Abb. 5.1 verwendet.

### 5.1.2 Lösungsansatz und Diskussion

Bevor der algorithmische Rekonstruktionsansatz untersucht wird, soll an dieser Stelle eine kompakte Darstellung der Simulationsumgebung erfolgen. Das vorgestellte System auf dem Satelliten setzt sich aus dem CMOS APS-Array, dem DSM sowie der Auslese- und Überwachungslogik zusammen. Alle Komponenten sind in einer prädiktiven 65 nm CMOS-Technologie implementiert und basieren auf modifizierten BSIM6 Transistormodellen aus [54]. Zur Provokation der APS-Ausfälle werden nachfolgend lediglich Strahlungsereignisse und Alterung betrachtet. Letzteres ist durch den Einfluss von Temperatur sowie Hot Carrier Injection (HCI) und Bias Temperature Instability (BTI) geprägt. Wie bereits erwähnt, führen diese Einflüsse zur Korruption der APS, sodass die betroffenen Pixelsensoren den maximalen Helligkeitswert annehmen. Diese werden dann durch die Online-Überwachung detektiert und als Flags in der Matrix  $\mathbf{\Omega}$  hinterlegt. Nach der Übertragung der Daten zur Erde soll ein repräsentantenbasiertes Inpaintingverfahren aus Abschnitt 2.4.2.1 für die Wiederherstellung der fehlerhaften Pixel, im Sinne eines klassischen Restaurationsproblems, sorgen. Die Inhalte in diesem Abschnitt basieren auf der Arbeit [55].



**Abbildung 5.2:** Visualisierung der APS-Ausfälle und SOP-Rekonstruktionsergebnisse nach fünf Jahren (erste Zeile) sowie 30 Jahren (zweite Zeile). Die Korruption beträgt  $\eta_5 = 18.24\%$  und  $\eta_{30} = 26.86\%$  [55].

Wie in Abb. 5.1 dargestellt, besteht die Oberfläche des Plutos weniger aus verschiedenen Strukturen, sondern mehr aus einer abschnittswise Variation der Textur. Im Gegensatz zum SBI-Algorithmus kann durch die Repräsentantenextraktion die redundante Texturinformation aus dem gesamten Datensatz vielversprechend für die Rekonstruktion ausgenutzt werden. Außerdem treten die Sensorfehler nicht in einer räumlichen Regelmäßigkeit auf, sodass sowohl willkürliche Pixel als auch ganze Areale maskiert sind. Im Abschnitt 3.3.2 wurden beide erwähnten Eigenschaften der Maske bereits durch ähnliche Maskierungsbeschaffenheiten mit Hilfe des SOP-Algorithmus untersucht und die Daten erfolgreich wiederhergestellt. Dementsprechend erfolgt in dieser Untersuchung der Einsatz einer zweidimensionalen Datenrekonstruktion durch den SOP. Es werden dafür zwei Iterationen verwendet. In der ersten Iteration beträgt die Dimension für die Patchextraktion  $32 \times 32$  mit vier parallelen Permutationsberechnungen für die Makroinformation. Darauffolgend werden in der zweiten Iteration  $8 \times 8$  Patches und zwei Permutationspfade eingesetzt, um die Detailinformation wiederherzustellen. Des Weiteren erfolgt eine Partitionierung des Datensatzes, gemäß Abschnitt 4.3.1, um die Berechnungszeit zu reduzieren. Auf eine Optimierung oder tiefere Untersuchung der algorithmischen Parameter für diesen Datensatz wird an dieser Stelle verzichtet, da die Vorstellung des Konzepts der Lösung der IDM in diesem Kapitel der Arbeit im Vordergrund steht.

In diesem Szenario wird ein 30 Jahre gealtertes Satellitensystem, unter Berücksichtigung von Strahlungsereignissen, untersucht. Durch die alterungsbedingte asymmetrische Verschiebung im DSM kommt es während der Aufnahme von größeren Intensitätswerten zu erhöhten APS-Ausfällen. Daraus resultierend setzt sich die Maske als Überlagerung von willkürlichen und flächendeckenden Statusflags, welche die hellen Bereiche in der Aufnahme  $\mathbf{X}$  kennzeichnen, zusammen. In der Abb. 5.2 ist die Auswirkung der APS-Ausfälle für fünf und 30 Jahre dargestellt. Mit Hilfe der Definition des Kompressionsgrades aus Gl. (2.2) aus Abschnitt 2.1.1 erfolgt die prozentuale Angabe der Korruption. Basierend auf der Simulation des vorgestellten Systems verzeichnet das APS-Array nach fünf Jahren der Alterung im Durchschnitt  $\eta_5 = 18.24\%$  Sensorpixelfehler. Nach 30 Jahren steigt diese Zahl auf ca.  $\eta_{30} = 26.86\%$  an, wobei der Ausfall von Sensoren zur Aufnahme heller Bildpunkte vermehrt eingeht.

Bei Betrachtung der korrumpierten Daten nach der Alterung des Satellitensystems ist die Bildaufnahme von Pluto ohne weitere Maßnahmen unbrauchbar. Durch die Anwendung des SOP-Algorithmus, unter Berücksichtigung der Statusflags, liegt die Möglichkeit der Wiederherstellung der Bildinformationen vor. In der letzten Spalte der Abb. 5.2 sind die dazugehörigen Rekonstruktionsergebnisse nach fünf und 30 Jahren Alterung sowie strahlungsbedingte APS-Ausfälle dargestellt. Die verbleibende Diskrepanz zu den Originaldaten aus Abb. 5.1 wird als NMSE angegeben und beträgt jeweils 0.079 und 0.082.

Selbst innerhalb der flächendeckenden Areale, die durch hohe Helligkeitswerte geprägt sind und daher mit höherer Wahrscheinlichkeit übersteuern, ist eine adäquate SOP-Rekonstruktion möglich. Aufgrund der Präsenz von räumlich sporadisch aktiven Pixelsensoren sowie der Verfügbarkeit von Repräsentanten aus dem gesamten Datensatz können die ausgefallenen Werte wiederhergestellt werden.

### 5.1.3 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt wurde eine innovative Lösung der IDM zur Wiederherstellung von korrumpierten APS-Daten auf einem Satelliten zur Aufnahme von Himmelskörpern vorgestellt. Dabei wurden die APS-Ausfälle, in diesem Szenario durch Strahlung und Alterung induziert, mit Hilfe von Auslese- und Überwachungslogik detektiert und der Systemebene als Statusflags übergeben. Diese Statusflags wurden aus algorithmischer Sicht als Einträge einer Maske gekennzeichnet und weiterverarbeitet. Basierend auf dieser Maskierung erfolgte die Verwendung eines Inpaintingansatzes, um die fehlerhaften Werte zu rekonstruieren. Anhand eines Testbildes der NASA vom Himmelskörper Pluto wurde der IDM-Ansatz verifiziert. Dieser Datensatz unterlag den Einflüssen von Strahlung sowie einer Alterung bis zu 30 Jahren. Selbst für flächendeckende Areale aus korrumpierten APS-Werten lieferte der vorgestellte Lösungsansatz ein adäquates Wiederherstellungsergebnis.

## 5.2 Orbiting Carbon Observatory-2-Mission

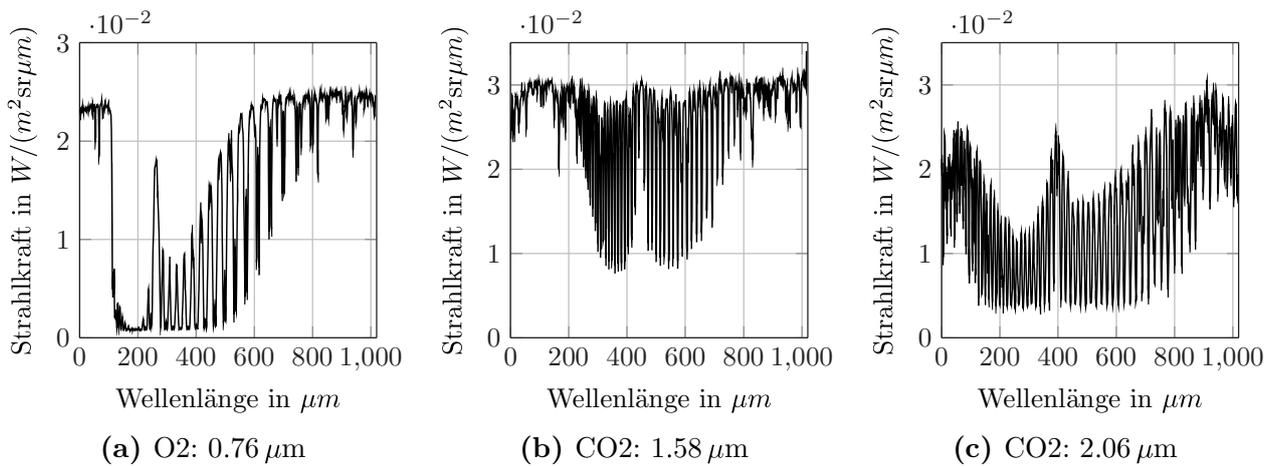
In diesem Teil erfolgt die Anwendung der vorgestellten IDM aus Abschnitt 2.5 zur reduzierten Datenerfassung in Satellitensystemen. Das Szenario beinhaltet die Implementierung einer maskierten Datenerfassung im Transformationsbereich, um die Berechnungskomplexität des Satelliten zu reduzieren. Die Lösung dieser Problemstellung basiert auf dem Inpaintingansatz für Videoverarbeitung aus Abschnitt 2.4.

### 5.2.1 Problemstellung

Innerhalb der letzten Jahrzehnte haben Messungen von globalen Netzwerken aus terrestrischen Stationen aufgezeigt, dass lediglich die Hälfte des Kohlenstoffdioxid (CO<sub>2</sub>)-Ausstoßes durch die Verbrennung fossiler Brennstoffe und Biomasse sowie anderen menschlichen Aktivitäten in der Atmosphäre verbleibt [30]. Dem Anschein nach wird der Rest von Ozeanen und von Ökosystemen auf dem Land absorbiert. Unglücklicherweise ist das Netzwerk aus terrestrischen Stationen nicht in der Lage, die notwendige Abdeckung oder räumliche Auflösung für eine Identifikation und Überwachung der CO<sub>2</sub>-Senken zu liefern. Die Messungen zeigen zudem einen deutlichen Nachweis für die Senkeneigenschaft der nördlichen Hemisphäre. Allerdings ist es nicht möglich, die dazugehörigen Beiträge der einzelnen Kontinente sowie Ozeane zu differenzieren. Des Weiteren kann dadurch die Variation des atmosphärischen Kohlenstoffanstiegs im Bereich von eins zu sieben Gigatonnen pro Jahr als Reaktion der stetig steigenden Emission fossiler Brennstoffe nicht vollständig erklärt werden.

Diese Unsicherheiten erschweren die Bemühungen, eine zukünftige atmosphärische CO<sub>2</sub>-Konzentration und deren Effekte auf das Klima vorherzusagen. Dies ist eine Folge der eingeschränkten Fähigkeit, zu prognostizieren, wie sich die Senken verändern können, wenn sich das Klima weiterentwickelt. Außerdem erschweren die Unsicherheiten die notwendige Kontrolle, ob die Abkommen für Treibhausgasemission eingehalten werden. Um eine Lösung für dieses Problem zu finden, existiert bei der NASA das Programm zum Satelliten Orbiting Carbon Observatory (OCO). Das Ziel des Programmes ist der Entwurf von globalen, weltraumgestützten Messungen des atmosphärischen CO<sub>2</sub> unter Berücksichtigung der notwendigen räumlichen Auflösung und Genauigkeit, um die oberflächlichen Quellen und Senken zu charakterisieren.

**Datenerfassung** Untersuchungen von Quellen-Senken-Inversionsmodellen [93] haben gezeigt, dass ein Zusammenschluss der Daten aus dem existierenden terrestrischen Überwachungsnetzwerk und globalen weltraumgestützten Messungen zu einer wesentlichen Verbesserung der Quellen-Senken-Beziehung führt. Die satellitenbasierten Messungen erfolgen durch sogenannte spaltenweise integrierte CO<sub>2</sub> dry air mole fraction  $X_{CO_2}$ , welche mit Genauigkeiten von ca. 0.3% (1ppm von 370ppm) einhergehen. Für die weltraumgestützte Beobachtung werden hochauflösende Spektren aus - an der Erde reflektiertem -



**Abbildung 5.3:** Visualisierung der Strahlkraft in Abhängigkeit der Wellenlänge für die verschiedenen Spektren.

Sonnenlicht im 0.76  $\mu m$  O<sub>2</sub> A-Band sowie die CO<sub>2</sub> Bänder mit 1.58  $\mu m$  und 2.06  $\mu m$  aufgenommen. Die Visualisierung dieser Spektren in Abhängigkeit der Wellenlänge ist in Abb. 5.3 dargestellt. Diese Spektraldaten werden mit Hilfe von Algorithmen zur simultanen Schätzung der räumlichen und zeitlichen Gradienten der  $X_{CO_2}$  entlang der Bodenspur analysiert.

Mit der Komplementierung der Daten durch die weltraumgestützte Beobachtung lässt sich eine Genauigkeit der  $X_{CO_2}$ -Messung von 0.3% (1ppm CO<sub>2</sub>) auf regionalen Skalen in monatlichen Abständen anfertigen. Das resultierende und ausgewertete Source-Sink-Inversionsmodell ermöglicht dann die Charakterisierung der geografischen Verteilung der CO<sub>2</sub>-Quellen und -Senken über einen Zweijahreszyklus.

Ursprünglich sollte im Februar 2009 der OCO-2-Satellit in Betrieb genommen werden. Allerdings wurde der geplante Orbit aufgrund eines sogenannten Launch Vehicle Failure nicht erreicht [5]. Bei der Nachfolgemission im Juli 2014 war der Start dann erfolgreich. Der OCO-2 Satellit befindet sich auf einer sonnensynchronen polaren Umlaufbahn mit einer 98.8-minütigen Periode. Sobald die sogenannte A-Train-Formation eingenommen wird, umkreist der Satellit die Erde 14.65 Mal pro Tag [30]. Alle 16 Tage wiederholt OCO-2 die Messung der gleichen Bodenspur.

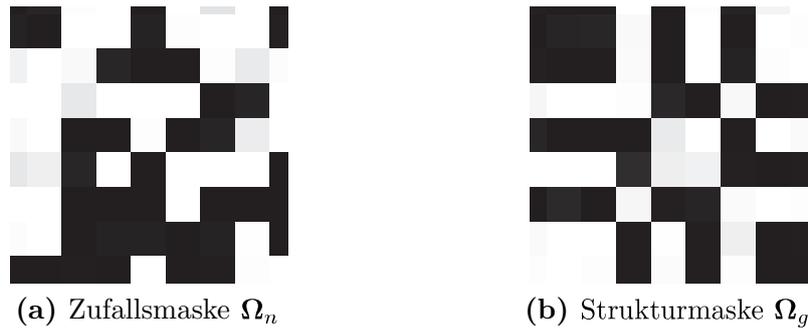
Während dieser Umrundung verwendet OCO-2 drei verschiedene Modi für die wissenschaftliche Überwachung. Im Nadir-Modus wird eine Tiefpunktmessung durchgeführt. Dieser beinhaltet die direkte Messung unterhalb des Raumfahrzeugs, was mit einer hohen räumlichen Auflösung und geringen Signal-to-Noise-Ratio (SNR) über dunklen Ozeanoberflächen einhergeht. Im Glint-Modus erfolgt durch die Ausrichtung der Instrumente auf den sogenannten Glanzspot, wo die Sonnenstrahlen von der Oberfläche reflektiert werden. Dies resultiert in einem deutlich höheren SNR. Zwischen diesen Modi wird alternierend alle 16 Tage gewechselt, also nach einem globalen Bodenwiederholungszyklus. Dadurch kann die gesamte Erde in beiden Modi ca. auf monatlichen Zeitskalen abgebildet werden. Des Weiteren existiert der Target-Modus, um spezielle

Oberflächen zu messen. Beim Überfliegen mit dem Satelliten ist es möglich, bis zu 27 000 Abtastpunkte mit bodenbasierten OCO-Kalibrierungselementen in monatlichen Intervallen zu erhalten [30]. Unabhängig vom Modus wird parallel die Strahlkraft der drei verschiedenen Spektren aus Abb. 5.3 gemessen. Das dazugehörige Instrument enthält drei hochauflösende Gitterspektrometer, die sich ein gemeinsames Teleskop teilen [52]. Jedes der Spektrometer besitzt ein Focal Plane Array (FPA) der Größe  $1024 \times 1024$ , das das jeweilige Spektrum in einer Dimension (Spalten) aufnimmt. Die Messung der räumlichen Dimension (Zeilen) erfolgt mit Hilfe von Winkeln entlang des Schlitzes. Das Instrument digitalisiert 220 Zeilen, wovon lediglich 160 Zeilen als wissenschaftliche Daten verwendet werden. Um das Datenvolumen zu reduzieren, erfolgt ein Zusammenschluss im Sinne einer Mittelwertbildung der 160 Zeilen in acht Gruppen aus 20 Pixeln pro Zeile [52]. An den beiden Enden jeder Spalte in der spektralen Dimension werden vier Pixel verworfen. Dadurch verbleiben 1016 spektrale Abtastpunkte. Somit resultiert eine  $1016 \times 8$ -Aufnahme der Strahlkraft für  $T$  Zeitpunkte, welche in der Matrix  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{M \times N \times T}$  mit  $M = 1016$  und  $N = 8$  hinterlegt sind. Des Weiteren wurden näherungsweise 1% der Pixel innerhalb des FPA als sogenannte Bad-Pixel identifiziert. Die dort erzeugten Daten können für die wissenschaftliche Auswertung nicht verwendet werden, was mit einem Verwurf der Messung einhergeht.

Sowohl die Erhöhung der räumlichen spektralen Dimension durch das Hinzufügen weiterer Zeilen im FPA als auch die Berücksichtigung der tatsächlichen Werte für die Bad-Pixel kann zur Verbesserung der Qualität der OCO-2-Messung beitragen. Ersteres geht mit einer deutlichen Erhöhung des Datenvolumens einher, welches zunächst auf dem Satelliten gespeichert und anschließend zur Erde übertragen werden muss. Letzteres erfordert eine adäquate Wiederherstellung der Bad-Pixel im Spektralbereich. In dieser Arbeit soll daher ein IDM-Ansatz vorgestellt und untersucht werden, welcher mit Hilfe einer Maskierung während der Aufnahme nachträglich sowohl das Datenvolumen erhöht (Super-Resolution) als auch die Werte der Bad-Pixel rekonstruiert.

## 5.2.2 Lösungsansatz und Diskussion

Für die nachfolgenden Simulationen werden Daten der NASA [60] verwendet, welche die drei Spektren aus O<sub>2</sub> bei  $0.76 \mu\text{m}$  sowie CO<sub>2</sub> bei  $1.58 \mu\text{m}$  und  $2.06 \mu\text{m}$  für insgesamt  $T = 8364$  Zeitaufnahmen beinhalten. Einerseits sieht die klassische Datenverarbeitung während der OCO-2-Mission eine Gruppierung der räumlichen spektralen Dimension zur Reduktion des Datenvolumens  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{1016 \times 8 \times 8364}$  vor. Um die spezifizierte Datenmenge bei gleichzeitigem Hinzuschalten weiterer Teile des FPA einzuhalten, dient im IDM-Ansatz eine Maske  $\mathbf{\Omega} \in \{0, 1\}^{1016 \times 8}$  pro Zeitaufnahme zur Datenreduktion. Unter der Bedingung, dass die Maske auf dem Satelliten und auf der Erde bekannt ist, müssen die maskierten Pixel weder gespeichert noch übertragen werden. Die Abb. 5.4 zeigt die Grundstruktur der Masken, welche in dieser Arbeit für das OCO-2-Szenario Verwendung finden. Dabei handelt es sich um eine Normalverteilung der Einträge  $\{0, 1\}$ , gekennzeichnet mit



**Abbildung 5.4:** Zur Maskierung der OCO-2-Spektren wird die dargestellte Grundstruktur der Dimension  $8 \times 8$  im Aufnahmearray entlang der Sensoren dupliziert und pro Zeitaufnahme invertiert.

$\Omega_n$ , sowie eine definierte Struktur  $\Omega_g$ , die für das gesamte FPA in der spektralen Dimension dupliziert und pro Zeitaufnahme invertiert wird. Andererseits beinhaltet die Datenverarbeitung der OCO-2 die Identifikation von Bad-Pixeln und anschließendem Verwurf dieser Daten. Basierend auf der Detektion werden die Koordinaten der Bad-Pixel im FPA der Maske  $\Omega$  hinzugefügt. Dies betrifft lediglich 1% der Daten pro Aufnahme, wodurch der dazugehörige Datenoverhead zur Speicherung und Übertragung als vernachlässigbar anzusehen ist. Die anschließende Wiederherstellung der maskierten Daten im IDM-Ansatz erzeugt eine höhere räumliche spektrale Auflösung ohne die Präsenz korrupter Pixel. Bezogen auf den gesamten Datensatz  $\mathbf{S}$  kann die kollektive Maskierung

$$\mathbf{S}'_{\Omega} = (\mathbf{M}_R + \mathbf{M}_B)\mathbf{S}' = \mathbf{M}\mathbf{S}', \quad (5.1)$$

bestehend aus den Teilen für die Datenreduktion  $\mathbf{M}_R$  und Berücksichtigung von Bad-Pixeln  $\mathbf{M}_B$ , mit Hilfe der logischen Maske  $\mathbf{M} \in \{0, 1\}^{D \times D}$  mathematisch beschrieben werden. Dabei gibt  $D = MNT$  das Produkt der Dimensionen, also die Summe der Datenpunkte innerhalb der Messung, an. In dieser Arbeit werden die eingeführten Maskierungsstrukturen einheitlich für alle drei Spektraldatensätze verwendet.

Während der OCO-2-Mission wurde die räumliche spektrale Dimension auf acht Werte pro Zeitaufnahme zusammengefasst. Dementsprechend existieren im vorliegenden OCO-2-Datensatz der NASA [60] nicht die Rohdaten des vollständigen  $1016 \times 1016$ -Arrays. Um die Qualität des IDM-Ansatzes trotzdem untersuchen zu können, werden die drei erfassten Spektren in den nachfolgenden Simulationen mit  $\eta = 50\%$  maskiert. Dies entspricht im Szenario dieser Arbeit einer Erhöhung der räumlichen spektralen Auflösung von vier auf acht Gruppen. Des Weiteren umfasst die initiale Untersuchung der Umsetzbarkeit sowie der Qualität der Lösung der IDM lediglich eine Teilmenge des OCO-2-Datensatzes von bis zu 100 Zeitaufnahmen.

Das übergeordnete Profil der spektralen Dimension, dargestellt in Abb. 5.3, innerhalb der O2- und den beiden CO2-Messungen weist eine starke Korrelation hinsichtlich der Aufnahmezeitpunkte und Sensoren im FPA auf. Die OCO-2-Messungen werden als

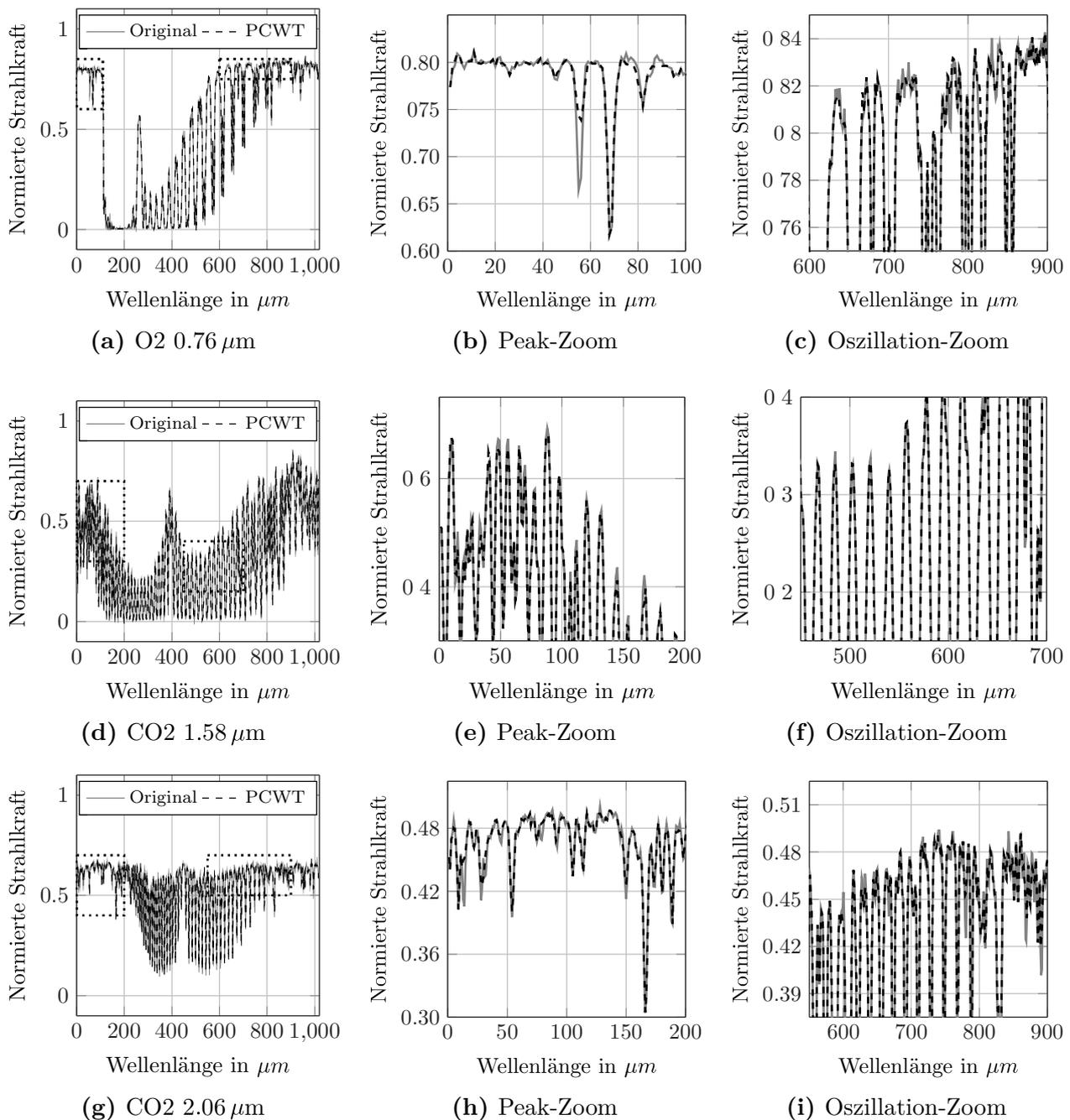
dreidimensionaler Datensatz in der IDM betrachtet und nachfolgend mit dem PCWT aus Abschnitt 4.3.2 verarbeitet. Mit dem Ziel zunächst die Einhüllende und darauffolgend die detaillierten Peaks wiederherzustellen, analog zum SOP für die LFP aus Abschnitt 3.3.2, erfolgt der Einsatz einer zweistufigen PCWT-Rekonstruktion. In den Iterationen werden Cuboids  $\{R_M, R_N, R_T\}$  der Dimension  $\{16, 3, 8\}$  sowie  $\{8, 2, 2\}$  zur Extraktion der Repräsentanten verwendet.

Die Tab. 5.1 stellt die Mittelwerte und Standardabweichungen der Rekonstruktionsgüte für die Masken  $\Omega_n$  und  $\Omega_g$  (50%) sowie verschiedenen rekonstruierten Spektren dar. Im Vergleich der verwendeten Masken ist eine höhere Wiederherstellungsqualität, unter Verwendung der Zufallsmaske, zu verzeichnen. Lediglich das Ergebnis der Rekonstruktion des CO<sub>2</sub>-Spektrums bei 2.06  $\mu\text{m}$  zeigt keinen signifikanten Unterschied hinsichtlich der Maskierung. Für  $\Omega_n$  ist anhand der Werte eine Anwendbarkeit der Lösung der IDM abzuleiten. Allerdings sind Zufallsmasken aus praktischer Sicht eher ungeeignet. Dementsprechend sind in weitergehenden Untersuchungen Faktoren zur Erstellung einer Maskierungsstruktur für die vorliegenden Spektraldaten zu identifizieren. Außerdem ist, basierend auf der geringeren Rekonstruktionsgüte der CO<sub>2</sub>-Daten bei 2.06  $\mu\text{m}$ , eine optionale Verwendung von individuellen Masken in den verschiedenen Wellenlängenbereichen zu empfehlen.

In der Abb. 5.5 sind exemplarisch die originalen und rekonstruierten Daten der Sensorgruppe Nr. 5 für alle drei Spektren, unter Verwendung der Maske  $\Omega_n$ , gegenübergestellt. Die zweite und dritte Spalte der Abbildung zeigt jeweils eine Vergrößerung der wiederhergestellten Peaks sowie das Oszillationsverhalten innerhalb des Strahlkraftprofils. Bei der vollständigen Maskierung ist der PCWT abhängig von den Informationen aus der Nachbarschaft. Dies umfasst sowohl die anderen Sensoren im FPA als auch die Aufnahmen aufeinanderfolgender Zeitpunkte. Sind diese Werte ebenfalls maskiert, aufgrund einer willkürlichen Verteilung der  $\{0, 1\}$ -Einträge, kommt es zu fehlerhaften Rekonstruktionen der Peaks, wie in Abb. 5.5b zu sehen. Wohingegen die Wiederherstellung des Oszillationsverhaltens von lokalen Arealen aus bekannten Werten profitiert. In den Abb. 5.5c und 5.5i ist zu erkennen, dass die übergeordnete Schwingung adäquat nachgebildet wurde. Allerdings existieren bei dieser Art der Maskierung teilweise eindeutige Diskrepanzen in der Wiedergewinnung der hochfrequenten Schwingungsanteile.

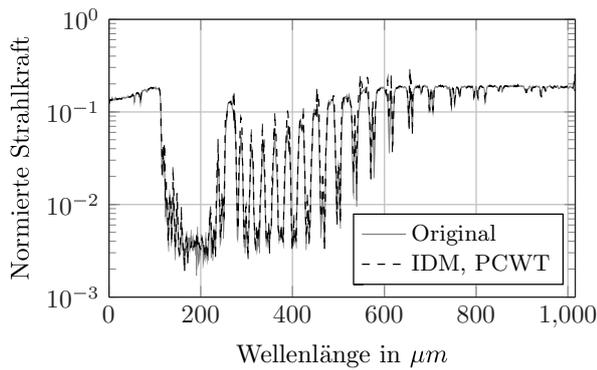
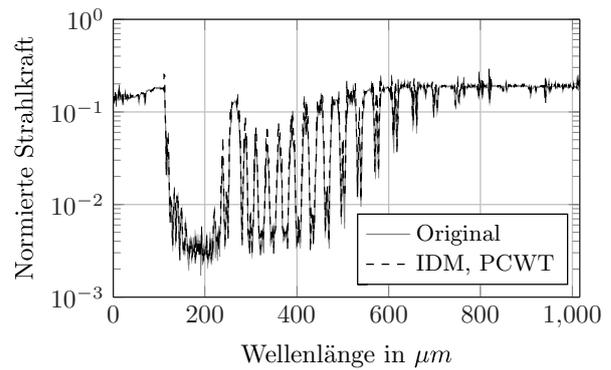
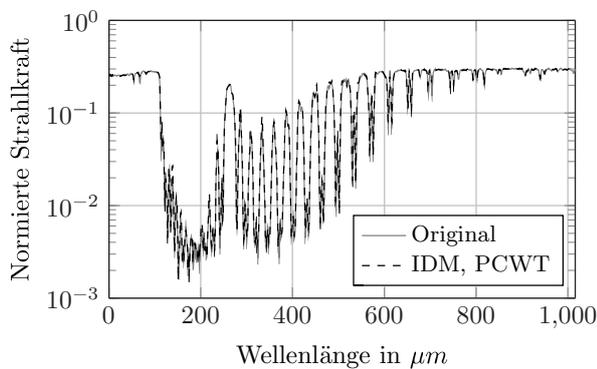
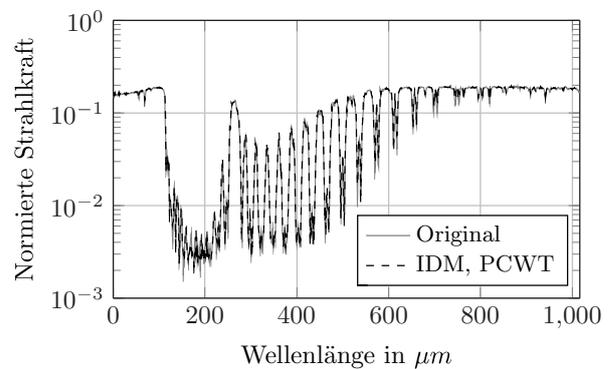
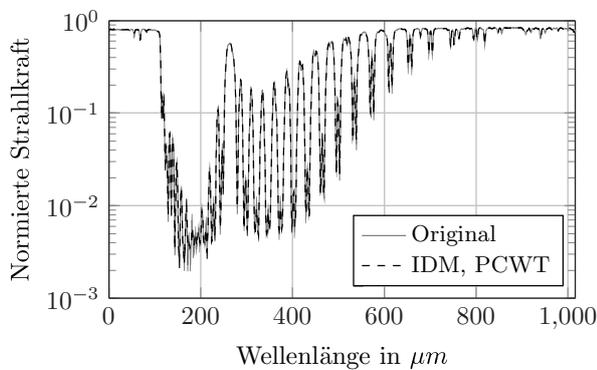
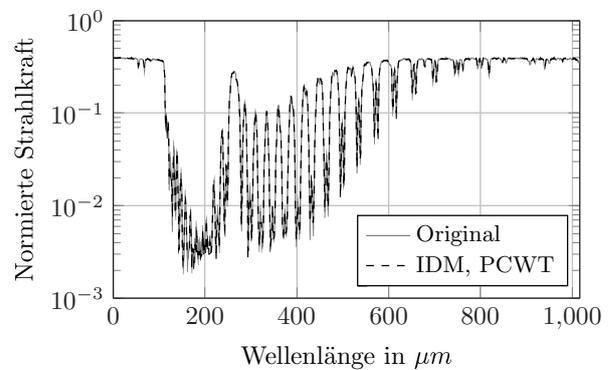
**Tabelle 5.1:** Übersicht der Rekonstruktionsergebnisse für OCO<sub>2</sub> bei  $\eta = 50\%$  mit  $\Omega_n$  und  $\Omega_g$ . Dargestellt ist der  $\overline{\text{NMSE}}$  mit dazugehöriger Standardabweichung.

Maske	O <sub>2</sub> 0.76 $\mu\text{m}$	CO <sub>2</sub> 1.58 $\mu\text{m}$	CO <sub>2</sub> 2.06 $\mu\text{m}$
$\Omega_n$	0.023 $\pm$ 0.011	0.029 $\pm$ 0.011	0.051 $\pm$ 0.028
$\Omega_g$	0.039 $\pm$ 0.017	0.108 $\pm$ 0.049	0.050 $\pm$ 0.029



**Abbildung 5.5:** Optischer Vergleich der Rekonstruktionsqualität der Strahlkraft in Abhängigkeit der Wellenlänge für die verschiedenen Spektren (Zeilen). Die Maskierung von  $\eta = 50\%$  basiert auf der Zufallsmaske  $\Omega_\eta$ . Des Weiteren ist mit Hilfe von Vergrößerungen exemplarisch die Wiederherstellung der Peaks und des Oszillationverhaltens im Spektralbereich visualisiert.

Die Abb. 5.6 zeigt für beide Varianten der Maskierung eine exemplarische Entwicklung des Rekonstruktionsfehlers und dessen Auswirkung auf das spektrale O<sub>2</sub>-Profil. In der ersten Zeile ist jeweils ein Wiederherstellungsergebnis mit einer deutlichen Ab-

(a) Sensor 8, Frame 54,  $\Omega_n$ , NMSE = 0.106(b) Sensor 8, Frame 54,  $\Omega_g$ , NMSE = 0.139(c) Sensor 2, Frame 42,  $\Omega_n$ , NMSE = 0.052(d) Sensor 7, Frame 45,  $\Omega_g$ , NMSE = 0.054(e) Sensor 5, Frame 29,  $\Omega_n$ , NMSE = 0.011(f) Sensor 4, Frame 18,  $\Omega_g$ , NMSE = 0.011

**Abbildung 5.6:** Die Auswirkung und Entwicklung der fehlerbehafteten Rekonstruktion hinsichtlich der Masken  $\Omega_n$  (erste Spalte) und  $\Omega_g$  (zweite Spalte).

weichung (NMSE > 0.1) zum originalen Datensatz dargestellt. Unabhängig von der Maskierung liegt die Diskrepanz sowohl in der Rekonstruktion der Peaks als auch den hochfrequenten Schwingungen vor. Ein hoher Beitrag zur Wiederherstellungsqualität bildet die präzise Approximation der makroskopischen Ausschläge im Signalverlauf. Aufgrund der Regelmäßigkeit der Struktur von Maske  $\Omega_g$  ist der PCWT in der Lage, die Peaks der Strahlkraft im Fehlerbereich von NMSE  $\approx$  0.01 vollständig zu rekonstruieren.

Des Weiteren verbleibt ein Restfehler, unabhängig von der Maske, basierend auf der ungenauen Nachbildung der Oszillation.

### 5.2.3 Zusammenfassung

Basierend auf dem vorgestellten IDM wurde in diesem Abschnitt ein neuartiger Lösungsvorschlag für die Datenverarbeitung innerhalb der OCO-2-Mission eingeführt. Neben der Korrektur von unvermeidbaren Bad-Pixeln, welche ca. 1% der erfassten OCO-Daten ausmachen, eröffnete der IDM-Ansatz eine Möglichkeit, das große Datenvolumen während der Messung zu bewältigen. Dazu wurde der Zusammenschluss von zwei Masken verwendet, die sowohl die Koordinaten der identifizierten Bad-Pixel als auch eine Maskierung zur Datenreduktion beinhaltet. Basierend auf der Erhöhung der Sensorenanzahl sowie der Vermeidung des Datenverwurfs steht, im Gegensatz zum klassischen Ansatz, eine größere Datenmenge für die Auswertung zur Verfügung. Die Rekonstruktion der maskierten Strahlkraft erfolgte über den eingeführten PCWT-Algorithmus ohne Berücksichtigung einer Parameteroptimierung. Anhand der Simulationsergebnisse ist, als weitergehende Untersuchung, eine Individualisierung und Anpassung der Maske für die Datenkompression, speziell für die beiden CO<sub>2</sub>-Profile, abzuleiten. Abschließend zeigte die adäquate Wiederherstellung der O<sub>2</sub>-Konzentration, hinsichtlich der Peaks sowie des Oszillationsverhaltens, das vielversprechende Potential einer Verbesserung OCO-2-Mission basierend auf der vorgestellten Lösung der IDM.

## 5.3 Single Pixel Camera

In diesem Teil der Arbeit wird ein Verbesserungsvorschlag, basierend auf der eingeführten IDM aus Abschnitt 2.5, zum Entwurf einer Kamera vorgestellt. Die Betrachtung beinhaltet ein Designvorschlag für die Realisierung einer sogenannten Single Pixel Camera (SPC). Diese werden hinsichtlich der Datenerfassungszeit mit dem Rastermode- sowie CS-Ansatz verglichen. Die Maske im IDM-Vorschlag fungiert als Instrument zur beschleunigten Aufnahme von Stilleben. Die Lösung dieser Problemstellung basiert auf dem SOP-Inpaintingansatz zur Rekonstruktion von Bilddaten aus Abschnitt 2.4.

### 5.3.1 Problemstellung

Die Einführung der Charge-Coupled Device (CCD)- und CMOS-Technologie hat in den letzten Jahren zu einer enormen Verbesserung der bildgebenden Sensoren geführt. Allerdings ist die Implementierung von SotA-Digitalkameras mit einer Bildgebung ab dem Niveau der Wellenlängen des sichtbaren Lichts sehr schwierig, massiv und kostenintensiv [41]. Dementsprechend erhöht sich der Preis einer Digitalkamera mit vergleichbarer Auflösung für den Infrarotbereich um das hundertfache im Vergleich zum sichtbaren Licht. In dem Artikel [41] wird der Aufbau einer SPC zur Realisierung einer einfachen,

kleinen und günstigen Digitalkamera vorgestellt. Die Architektur umfasst ein sogenanntes Digital Micromirror Device (DMD) mit Spatial Light Modulator (SLM). Der SLM moduliert die Intensität eines Lichtstrahls gemäß eines Kontrollsignals. Ein lichtdurchlässiges SLM zum Blockieren oder Passieren von Lichtstrahlen kann beispielsweise durch Liquid Crystal Display (LCD) realisiert werden.

Zur Aufnahme von Objekten  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N \times T}$  wird lediglich eine bikonvexe Linse benötigt. Dadurch fällt das Licht nicht auf ein CCD- oder CMOS-Array aus Sensoren, sondern flächendeckend auf das DMD, welches über eine  $N \times T$ -Anordnung von SLM-Spiegeln verfügt. Basierend auf der Steuerung der Spiegel ist es möglich eine Lichtmessung oder die Überlagerung vieler Messungen an die einzige Photodiode weiterzugeben. Die Art der Ansteuerung des SLM-Spiegelarrays wird nachfolgend in Kategorien eingeteilt.

**Raster** Im Raster-Modus werden für den einzelnen Sensor nacheinander für alle  $NT$  Pixel Lichtmessungen angefertigt. Das bedeutet, dass immer lediglich ein einzelner SLM-Spiegel das Licht zur Photodiode weiterleitet und die verbleibenden Spiegel blockieren.

**Compressed Sensing** Der CS-Modus aus [41] sieht vor, dass nacheinander  $M \ll NT$  verschiedene Kombinationen aus einer Überlagerung  $\mathbf{Y}' \in \mathbb{R}^M$  unterschiedlicher Konstellationen der SLM-Spiegel zum Sensor durchgelassen wird. Für jede der  $M$  Messungen erfolgt dabei die Verwendung von zufälligen Mustern  $\mathbf{a}_i \in \{0, 1\}^{NT}$  des SLM-Spiegelarrays, korrespondierend zu den Spalten der CS-Messmatrix  $\mathbf{A} \in \{0, 1\}^{M \times NT}$ , welche einer Bernoullischen Verteilung folgen. Dafür wird in [41] die Implementierung eines Random Number Generator (RNG) verwendet. Als Anhaltspunkt für die Anzahl der Messungen wird typischerweise eine vereinfachte Version

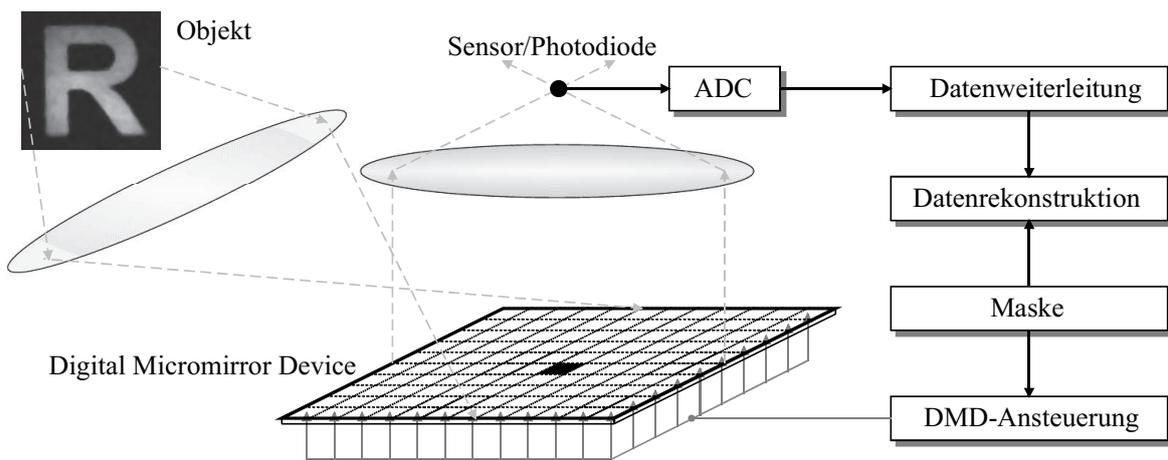
$$M = K \log(N/K) \quad (5.2)$$

der Gl. (2.39) als Schätzung angesetzt, sofern das Objekt der Aufnahme kompressibel ist. Dementsprechend kann weiter angenommen werden, dass die Zeilen in  $\mathbf{A}$  einer Menge von permutierten Walsh-Funktionen  $\{0, 1\}$  entsprechen. Um anschließend aus  $M$  überlagerten Messungen das aufgenommene Objekt zu rekonstruieren, muss das BPDN-Minimierungsproblem

$$\arg \min \|\mathbf{X}'\|_1, \quad \text{s.t.} \quad \|\mathbf{Y}' - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}'\|_2 \leq \varepsilon \quad (5.3)$$

gelöst werden.

Eine solche Single-Sensor-Kamera ist, sowohl der Raster- als auch CS-Mode, aufgrund der zeitaufwendigen Aufnahmeprozedur lediglich für Stilleben geeignet. Wird die Anzahl der CS-Messungen auf ein deutliches Maß reduziert, leidet die Wiederherstellungsqualität der Aufnahme darunter. Wohingegen der Raster-Mode das Objekt adäquat wieder zusammensetzt, dabei allerdings die maximale Aufnahmezeit benötigt.



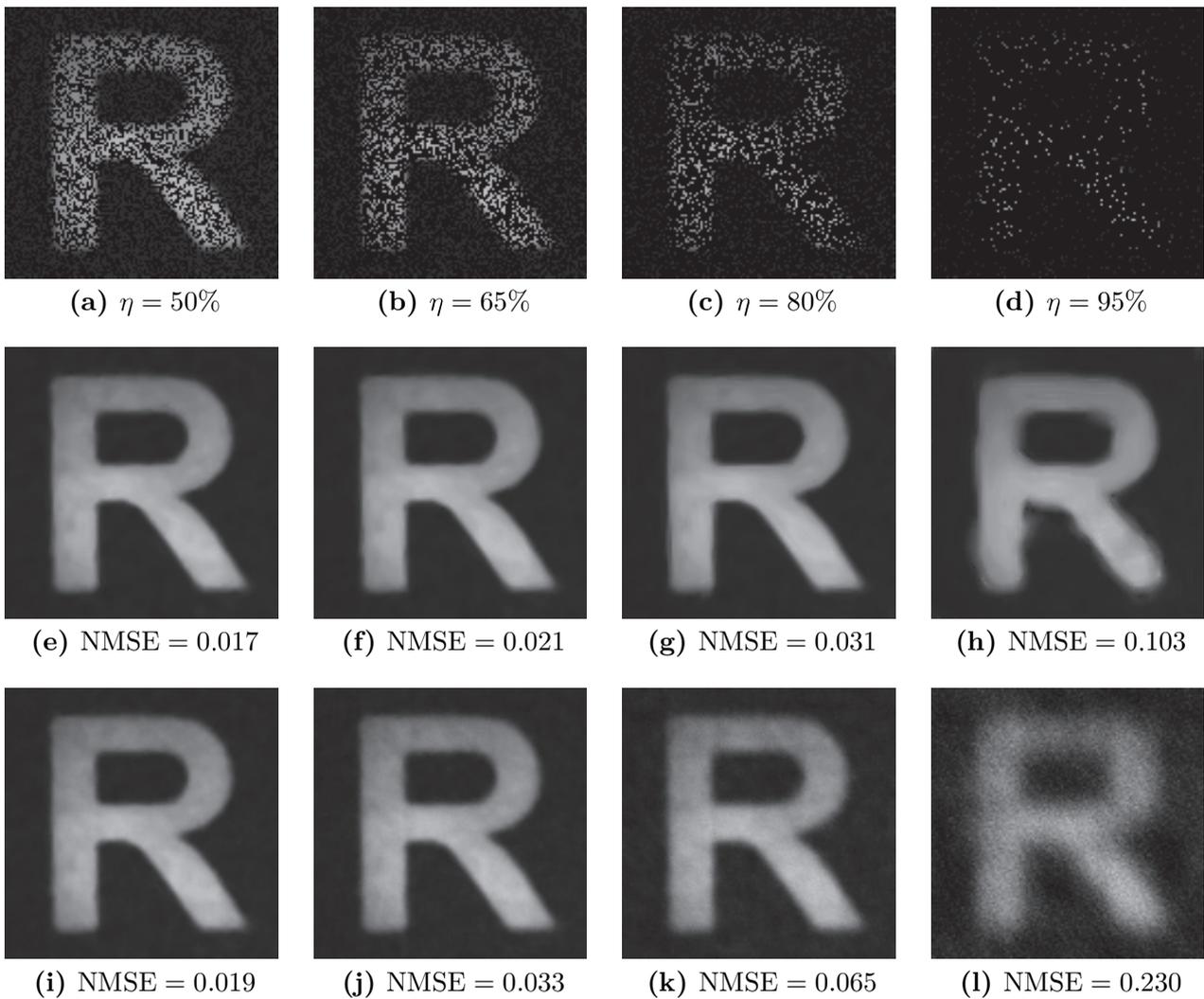
**Abbildung 5.7:** Schematischer Aufbau einer Single-Sensor-Kamera, angelehnt an [14]. Das System zur Aufnahme eines Objektes besteht aus dem DMD und der Photodiode. Die Maske  $\Omega$  gibt dabei die Konfiguration der aufeinanderfolgenden durchlässigen DMD-Spiegel vor.

In diesem Teil der Arbeit erfolgt die Einführung einer Lösung der IDM als Verbesserungsvorschlag der bestehenden Techniken zur Realisierung einer Single-Sensor-Kamera. Dabei ist das Ziel des vorgestellten Ansatzes ein Modus mit der Vereinigung aus beschleunigter Aufnahmezeit und gleichzeitiger hoher Rekonstruktionsgüte.

### 5.3.2 Lösungsansatz und Diskussion

Neben einer höherwertigen Aufnahmezeit und Wiederherstellungsqualität sollen die essentiellen Komponenten für den Aufbau der Single-Sensor-Kamera als Spezifikation erhalten bleiben. Im Vergleich zur Kamera im CS-Modus erfolgt lediglich ein Austausch des RNG mit einer Maske  $\Omega \in \{0, 1\}^{N \times T}$  zur Steuerung der DMD-Spiegel. Dadurch ist weiterhin die Spezifikation zur Realisierung einer möglichst energie- und flächenarmen SPC erfüllt. Die Nichtnulleinträge der Maske kennzeichnen dabei die durchlässigen DMDs. Diese leiten aber nicht gleichzeitig, wie beim CS-Modus, das Licht zum Sensor weiter. Vielmehr erfolgt – analog zum Raster-Modus – nacheinander eine Lichtweiterleitung zur Photodiode. Allerdings wird bei der Lösung der IDM lediglich eine, durch  $\Omega$  definierte, Teilmenge der DMDs verwendet. Dementsprechend steuert der dazugehörige Kompressionsgrad  $\eta$  die Geschwindigkeit der Aufnahme.

Die Abb. 5.7 zeigt den schematischen Aufbau der vorgestellten Single-Sensor-Kamera. Selbstverständlich muss für die Wiederherstellung der aufgenommenen Objekte die Maske, analog zur CS-Messmatrix, bei der Rekonstruktion, basierend auf den Inpaintingansätzen, bekannt sein. Außerdem besitzt die IDM-Lösung den Freiheitsgrad, dass je nach Art des Stilllebens eine geeignete Maske einsetzbar ist. Dafür kann beispielsweise ein Ensemble aus Masken bereitgestellt werden, welche durch ihre Struktur aus  $\{0, 1\}$  verschiedene Bereich im Objekt fokussieren. Ist die Gestalt des Objektes nicht



**Abbildung 5.8:** Gegenüberstellung des maskierten und rekonstruierten Testbildes, Buchstabe R aus [41], für vier Kompressionsgrade  $\eta = \{50, 65, 80, 95\}$  in Prozent. In der ersten Zeile ist die Maskierung  $\Omega_n$  dargestellt. Die zweite und dritte Zeile beinhaltet jeweils die SOP- und CS-Wiederherstellung. Der CS-Ansatz basiert auf der Verwendung einer Messmatrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times NT}$  mit Normalverteilung und DCT als Basis-matrix  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{NT \times NT}$ .

a priori bekannt, empfiehlt sich der Einsatz einer Zufallsmaske  $\Omega_n$ . Im Sinne einer allgemeinen und unoptimierten Betrachtung soll nachfolgend  $\Omega_n$  als Fundament für eine beschleunigte Aufnahme dienen.

Um den IDM-Ansatz zu verifizieren, wird als Testbild der Buchstabe R, aus [41] und dargestellt in Abb. 5.7, beschrieben durch die Matrix  $\mathbf{X} \in [0, 255]^{124 \times 124}$  verwendet. Für die Wiederherstellung des Objektes wird der SOP-Algorithmus aus Abschnitt 2.4.2.1 mit drei Iterationen verwendet. In jeder Iteration erfolgt die Anwendung von zehn unabhängigen Permutationen mit quadratischer Suchbereichsbeschränkung. Die Extraktion

der Repräsentanten aus den Abtastpunkten des Objektes basiert auf quadratischen Patches der Größe  $\{32 \times 32, 8 \times 8, 4 \times 4\}$ .

Die Abb. 5.8 stellt die Maskierungen mit  $\Omega$  und die Rekonstruktionsergebnisse für das Testbild für verschiedene Kompressionen bzw. beschleunigte Aufnahmen dar. Selbst bei  $\eta = 95\%$  ist die Kontur der Aufnahme des Buchstabens R deutlich zu erkennen. Hinsichtlich der Texturen im Testbild sind Qualitätsverluste zu verzeichnen. Für diesen Kompressionsgrad verzeichnet das Resultat der CS-Rekonstruktion starke Abweichungen zum originalen Bild. Es liegen lediglich weiche bzw. verrauschte Kanten der Kontur vor, da der hochfrequente Anteil im Transformationsbereich nicht präzise wiederhergestellt wurde. Des Weiteren geht die Textur vollständig im Bildrauschen unter. Unter der Annahme, dass ein DMD-Array mit  $10 \cdot 10^6$  Spiegeln (entspricht 10 Megapixeln) vorliegt und die Aufnahmezeit eine Millisekunde beträgt, benötigt der Raster-Modus 166.667 Minuten bzw. 2.778 Stunden zur Erfassung des Stillebens. Im Kontrast dazu ist sowohl für den CS- als auch den vorgestellten IDM-Ansatz lediglich ein Zeitaufwand von 8.333 Minuten bei  $\eta = 95\%$  erforderlich. Allerdings geht das CS-Wiederherstellungsergebnis mit einem deutlich höheren Fehler von 0.23 im Gegensatz zur Lösung der IDM mit 0.1 einher. Selbstverständlich muss in Abhängigkeit der Anwendung bewertet werden, in welchem Umfang die Höhe der Diskrepanz zur originalen Aufnahme des Stillebens vertretbar ist.

### 5.3.3 Zusammenfassung

Motiviert durch den CS-Entwurf wurde in diesem Abschnitt ein neuartiger Verbesserungsvorschlag zur Realisierung einer Single-Pixel-Kamera zur Aufnahme von Stilleben eingeführt. Dabei diente die Maske in der Lösung der IDM als Unterabtastung der DMD-Spiegel im Raster-Modus. Im Zuge dessen wurde, genau wie bei der CS-Variante, lediglich ein reduzierter Satz an Daten erfasst. Anschließend erfolgte, gestützt auf diese Stützstellen, die Rekonstruktion der Aufnahme des Stillebens. Innerhalb des vorgestellten Szenarios verzeichnete der IDM-Entwurf, genau wie die CS-Variante, eine deutliche Beschleunigung der Aufnahmegeschwindigkeit im Vergleich zum Raster-Modus. Neben dem Rekonstruktionsfehler wurden die qualitativen Unterschiede der Wiederherstellung des Stillebens hinsichtlich der Kontur und Textur optisch bewertet. Diesbezüglich erzielte die Lösung der IDM, im Gegensatz zum CS-Entwurf, zur Realisierung der Single-Pixel-Kamera im Bereich großer Dateneinsparung eine deutlichen Verbesserung bezüglich der Rekonstruktionsqualität.





## 6

# Zusammenfassung

Innerhalb dieser Arbeit wurden innovative Lösungen anhand der eingeführten Inpainting Design Methodology (IDM) für ausgewählte anwendungsspezifische Problemstellungen entwickelt und untersucht. Neben der Erfassung großer Datenvolumen sind die betrachteten Systeme geprägt durch ressourcenabhängige Einschränkungen der Berechnungskapazität. Die Methodik basiert dabei auf einer asymmetrischen Verteilung des Berechnungsaufwandes durch die Verwendung von algorithmischen Werkzeugen aus dem Bereich der mehrdimensionalen digitalen Datenrestauration (Inpainting).

Der grundlegende Lösungsvorschlag der IDM ist durch anwendungsabhängige Spezifikationen an die ressourcenbeschränkte Problemstellung vorgegeben und setzt sich aus zwei Hauptkomponenten für den Entwurf – Maskierung und Inpainting – zusammen. In der zugrunde liegenden Heuristik erfolgt die Wiederherstellung der maskierten Daten mit Hilfe von Inpaintingalgorithmen. Für eine effiziente Rekonstruktion, unabhängig von der Dimension oder Domäne der Daten, werden zumeist repräsentantenbasierte Verfahren eingesetzt, welche durch die Extraktion überlappender Repräsentanten sowie deren Permutation und Interpolation geprägt sind. Zur Reduktion der Datenmenge mit minimalem Berechnungsaufwand erfolgt der Einsatz einer anwendungsspezifischen Maskierung. Die Eignung der entworfenen Maske für die jeweilige Applikation wird anhand der Regularität der permutierten Maskenrepräsentanten in einem Transformationsbereich verifiziert. Mit dem Ziel die vorgegeben Spezifikationen einzuhalten, erfolgt im Anschluss die Optimierung der resultierenden Lösung der IDM. Dazu gehören neben der Neugestaltung der Maskierung außerdem die Modifikation der Datenwiederherstellung in Form von algorithmischer und/oder hardwarebasierter Anpassung.

Zur Überwachung von invasiv abgeleiteter neurologischer Aktivität wurde ein neuartiger Ansatz als Realisierungsvorschlag eines vollständig implantierbaren NMS zur berechnungsarmen Verarbeitung entwickelt. Das Fundament der zugrunde liegenden Lösung der IDM basierte auf der Verwendung einer Maske zur Elektrodensteuerung unter Ausnutzung von inhärenten Signalkorrelationen. Dadurch wurden die Elektroden im MEA für definierte Zeitpunkte ein- und ausgeschaltet, was in einer Reduktion der Datenmenge auf dem NMS ohne zusätzlichen Berechnungsaufwand resultierte. Nach der Übertragung und dem Empfang der komprimierten medizinischen Signale sowie der Kenntnis der eingesetzten Maske erfolgte die Datenwiedergewinnung mit Hilfe

von Inpaintingverfahren. Alle Untersuchungsergebnisse für diese IDM-Lösung wurden anhand echter klinischer, invasiv abgeleiteter Messdaten aus einer 24 h Signalerfassung bei einem männlichen Epilepsiepatienten gewonnen. Beim Vergleich mit SotA-Verfahren wie CS zeigten bereits Inpaintingverfahren, welche lediglich auf die Rekonstruktion von übergeordneten Strukturen ausgelegt sind, deutlich präzisere Approximationen der Signale. Für solche Ansätze ist zusätzlich, im Rahmen der Arbeit, eine parallelisierte FPGA-Implementierung zur beschleunigten Rekonstruktion im Sinne eines hohen Datendurchsatzes entwickelt worden.

Anhand von weiterführenden Untersuchungen konnte gezeigt werden, dass der Einsatz von repräsentantenbasierten Inpaintingansätzen zur Wiedergewinnung der neurologischen Signale sehr vielversprechend ist. Neben der Einführung von Entwurfskriterien für die Maskierung sowie der Optimierung der algorithmischen Freiheitsgrade wurden verschiedene Ansätze für eine beschleunigte Berechnung der SOP-Permutation der extrahierten Repräsentanten vorgestellt und ausgewertet. Die eingeführte Lösung der IDM erzielte eine qualitativ hochwertigere Wiederherstellung der neurologischen Aktivität für große Kompressionsgrade im Vergleich zu Standardkompressionsverfahren wie JPEG. Des Weiteren wurden weitere äquivalente SOP-Verfahren entwickelt und untersucht. Diese basieren einerseits auf der ein- und dreidimensionalen Extraktion von Repräsentanten sowie andererseits auf einem innovativen Ansatz bestehend aus randomisierten Clustern zur beschleunigten Permutationsberechnung. Für Letzteres wurde dafür die RSVD in der zweiten Iteration des SOP-Algorithmus implementiert. Neben einer deutlichen Beschleunigung der Rekonstruktion erzielte der entwickelte ROP im Vergleich zum SOP zusätzlich auch eine geringfügige Verbesserung der Wiederherstellungsqualität für neurologische Daten.

Den Abschluss der Untersuchung bildete die Interpretation der biomedizinischen Daten als Videodatensatz und der damit verbundenen Entwicklung von zwei verschiedenen dreidimensionalen Inpaintingalgorithmen. Initial erfolgte dafür beim SOC-Algorithmus initial der Übergang von Patches zu Cuboids im Extraktionsprozess. Der Einsatz von Cuboids führte zu einer Reduktion der Anzahl der extrahierten Repräsentanten im Vergleich zum zweidimensionalen SOP bei gleicher Datenblocklänge, was eine Verringerung der Rekonstruktionsgüte zur Folge hatte. Als Resultat dieser Erkenntnis erfolgte die Entwicklung eines  $K$ -SVD-basierten Verfahrens zum Anlernen von Dictionaries aus extrahierten Repräsentanten für die Rekonstruktion. Aufgrund der Anpassung des Wiederherstellungsverfahrens wurden zusätzlich weitere Masken eingeführt und untersucht. Des Weiteren konnte festgestellt werden, dass eine hochfrequentierte Rekalibrierung zur Aktualisierung des Dictionarys keinen signifikanten Vorteil zur Wiederherstellung der Ruhepotentiale sowie epileptischen Anfällen lieferte. Eine Verbesserung der Rekonstruktionsqualität konnte durch die Implementierung eines gemeinsamen Dictionarys sowie überlappender Frames, zur Korrektur von Fehlern an den Rändern der Datenblöcke, eingeleitet werden. In Abhängigkeit des Kompressionsgrades erfolgte neben einer Betrachtung von wiederhergestellten epileptischen Anfällen des Weiteren die ab-

schließende Untersuchung der Rekonstruktionsgüte der neurologischen Aktivität. Im Zuge dessen ist als weitere Referenz das Videokompressionsverfahren MPEG-4 (H.264) in die Untersuchung zur besseren Einordnung der Qualität eingeflossen. Anhand der Gegenüberstellung mit anderen 3D-Rekonstruktionsverfahren konnte die Leistungsstärke des neuartigen  $K$ -SVD-basierten Algorithmus hinsichtlich der Rekonstruktionsqualität evaluiert werden.

Im medizinischen Anwendungsbereich MRT wurde eine Lösung der IDM zur Verbesserung von SotA-Ansätzen, mit Hilfe von existierenden Trajektorien als Maskierung zur beschleunigten Aufnahme des  $k$ -Spaces, vorgestellt und diskutiert. Um die MRT-Aufnahmezeit für den Patienten zu reduzieren, erfolgte die definierte Unterabtastung der  $k$ -Space-Koeffizienten. Die Wiederherstellung der fehlenden Koeffizienten bildete den Ausgangspunkt in dieser Untersuchung und motivierte die Entwicklung des PCWT-Algorithmus. Diese IDM-Lösung nutzt eine adaptive Schwellwertanpassung zur dreidimensionalen Wiederherstellung der Aufnahme aus den maskierten MRT-Daten. Für die Untersuchung wurden die drei Test-Phantome Shepp-Logan, BrainWeb und BRaTS2013 verwendet. Die Test-Phantome gingen mit einem aufsteigenden Grad an Details der MRT-Aufnahmen einher und dienten zur Festlegung von algorithmischen Parametern sowie der Beurteilung der Güte nach der Datenwiedergewinnung. Zur qualitativen Einordnung des Rekonstruktionsergebnisses erfolgte der Vergleich der Lösung der IDM mit den SotA-Ansätzen sowie klassischen Kompressionsmethoden. Unabhängig vom Kompressionsverhältnis oder dem Grad der Details der MRT-Aufnahme stellten sich die inpaintingbasierten SotA-Verfahren bezüglich der Wiederherstellungsgüte als deutlich vielversprechender heraus als die CS-Implementierung. Des Weiteren erzielte die entwickelte Lösung mit Hilfe der IDM neben einer höheren Rekonstruktionsqualität auch eine bessere Identifikation von Tumorgewebe für hohe Datenkompressionen im Vergleich zu den Block-Matching-Varianten aus der Literatur.

Zur Wiederherstellung von korrumpierten APS-Daten auf einem Satelliten zur Aufnahme von Himmelskörpern wurde eine innovative Lösung der IDM entwickelt. Die durch Strahlung und Alterung induzierten APS-Ausfälle wurden in diesem Szenario mit Hilfe von Auslese- und Überwachungslogik detektiert und der Systemebene als Statusflags übergeben. Aus algorithmischer Sicht wurden diese binären Informationen als Einträge einer Maske interpretiert und weiterverarbeitet. Um die fehlerhaften Werte wiederherzustellen, erfolgte die Verwendung eines Inpaintingrekonstruktionsansatzes unter Berücksichtigung der durch die Anwendung vorgegebene Maske. Als Testdatensatz wurde eine Aufnahme vom Himmelskörper Pluto aus der NASA-Datenbank verwendet. Nach der simulativen Alterung von bis zu 30 Jahren sowie dem Hinzufügen von Strahlungseinflüssen auf die Testdaten erfolgte die Untersuchung und Verifikation des IDM-Ansatzes. Der vorgestellte Lösungsansatz zeigte für diese Anwendung ein adäquates Wiederherstellungsergebnis, selbst für flächendeckende Areale aus korrumpierten APS-Ausfällen.

Für die Datenverarbeitung in der OCO-2-Mission erfolgte die Entwicklung einer neuartigen Lösung basierend auf der IDM. Der IDM-Ansatz eröffnete neben der Korrektur von unvermeidbaren Bad-Pixeln, welche ca. 1% der erfassten OCO-Datenaufnahme ausmachen, eine Möglichkeit, das große Datenvolumen während der Messung zu bewältigen. Um beide Ziele umzusetzen, wurde ein Zusammenschluss aus zwei Masken verwendet, die sowohl die Koordinaten der identifizierten Bad-Pixel als auch eine Maskierung zur Datenreduktion beinhaltet. Im Gegensatz zum klassischen Ansatz steht dadurch der IDM-Lösung, als Resultat der Erhöhung der Sensoranzahl sowie der Korrektur von Bad-Pixeln, eine größere Datenmenge für die Auswertung zur Verfügung. Die Rekonstruktion der maskierten Strahlkraft erfolgte – ohne Berücksichtigung einer Parameteroptimierung – mit Hilfe des eingeführten PCWT-Algorithmus. Der entwickelte Lösungsvorschlag, basierend auf der IDM, zeigte adäquate Resultate bei der Wiederherstellung der O<sub>2</sub>-Konzentration hinsichtlich der Strahlkraft-Peaks sowie des Oszillationsverhaltens.

Zur Realisierung einer Single-Pixel-Kamera zur Aufnahme von Stilleben wurde, motiviert durch den CS-Entwurf, ein neuartiger Verbesserungsvorschlag, basierend auf der IDM, entwickelt. Im Zuge dessen wird die Maske als Raster-Modus mit eindeutigen zufälligen Abtastpunkten als DMD-Spiegelkonfiguration eingesetzt. Genau wie bei der CS-Variante erfolgte damit lediglich eine Erfassung einer Untermenge der Daten, was mit einer Reduktion der Aufnahmezeit einhergeht. Die Stützstellen dieser Untermenge bildeten den Ausgangspunkt für die Rekonstruktion der Aufnahme des Stillebens. Im Vergleich zum Raster-Modus verzeichnen beide Entwürfe, basierend auf dem IDM- und CS-Ansatz, eine deutliche Beschleunigung der Aufnahmegeschwindigkeit. Zusätzlich zum Rekonstruktionsfehler wurden die qualitativen Unterschiede der Wiederherstellung des Stillebens anhand optischer Bewertung der Kontur und Textur verglichen. Das Ergebnis dieser Gegenüberstellung mit der CS-Realisierung zeigte, dass die Lösung der IDM zum Entwurf einer Single-Pixel-Kamera im Bereich der hohen Datenkompression in eine deutliche Verbesserung der Rekonstruktionsgüte resultiert.

Zusammenfassend kann die im Rahmen dieser Arbeit eingeführte und verwendete Methodik, basierend auf Maskierung und Inpainting, zur innovativen und effizienten Lösungsgenerierung von Problemstellungen mit großen Datenvolumen in Systemen mit eingeschränkter Berechnungskapazität angesehen werden. Anhand ausgewählter Anwendungen wurden individuelle Lösungsansätze zur berechnungsarmen Reduktion der Datenmenge bei der maskenbasierten Erfassung sowie der performanten Datenwiederherstellung mit Hilfe von geeigneten Inpaintingverfahren vorgestellt. Im Zuge dessen wurden neben der Einführung einer Methode zur Eignungsverifikation von Maskierungen außerdem verschiedene neuartige Inpaintingverfahren entwickelt. In den anwendungsspezifischen Untersuchungen erzielten die vorgestellten Lösungen der IDM nahezu ausnahmslos akkuratere Ergebnisse als vergleichbare Referenzen aus dem SoTA. Selbst gegenüber klassischen Verfahren, welche auf die Datenkompression ausgelegt sind, verzeichnen die IDM-Ansätze, im Vergleich zu den Standardverfahren ohne nen-

nenswerten Berechnungsaufwand während der Datenerfassung, zumeist eine höhere Wiederherstellungsqualität der Daten.

## 6.1 Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit führten die entwickelten Ansätze der Inpainting Design Methodology zu hochgradig effizienten Lösungen für Problemstellungen mit großen Datenvolumen in Systemen mit eingeschränkter Berechnungskapazität. Hinsichtlich der hauptsächlichen Entwurfskomponenten lassen sich weitergehende Perspektiven erkennen, welche zur Erhöhung der Datenreduktion oder Rekonstruktionsqualität sowie dem Komfort der Bedienung der IDM führen können.

Die inpaintingbasierte Datenwiederherstellung weist das Potential für denkbare Weiterentwicklungen für den vorgestellten medizinischen Anwendungsbereich auf. Dabei ist die Zielsetzung stets eine Erhöhung der Rekonstruktionsqualität. Für die Überwachung der neurologischen Aktivität ist die Implementierung einer dualen Rekonstruktion denkbar. Neben der Extraktion der Repräsentanten im Zeitbereich könnte zusätzlich für die Wiederherstellung, ähnlich zum PCWT, die Kenntnis über die Frequenzanteile der LFP vorteilhaft ausgenutzt werden. Zudem ist die Verarbeitung von differentiellen Informationen der MRT-Frames, analog zum MPEG-4-Verfahren, für die inpaintingbasierte Datenrekonstruktion interessant.

Des Weiteren lassen sich für die Maskierung viele anwendungsspezifische Weiterentwicklungen erkennen. Neben der Markierung der unvermeidbaren Bad-Pixeln gilt es, in der OCO-2-Mission eine geeignete Struktur zur Reduktion der Datenmenge zu finden. Für die SPC aus dem Gebiet der bildgebenden Aufnahmemedien ist die Entwicklung verschiedener Schemata erstrebenswert, welche eine motivabhängige Abtastung vornehmen, um die Güte der Aufnahme zu erhöhen. Unabhängig von der Problemstellung ist die tiefergehende Untersuchung der Maskierung als kryptografischer symmetrischer Schlüssel eine interessante Forschungsrichtung.

Neben den anwendungsspezifischen Erweiterungen existiert ebenfalls das Potential, die IDM weiterzuentwickeln. Im Zuge dessen ist eine Verallgemeinerung der anwendungsabhängigen Spezifikationen sowie Entwurfskriterien als globale Menge an Parametern denkbar. Mit dem Ziel einen automatisierten Initialentwurf zu erhalten, ist diesbezüglich die Berücksichtigung sowohl von Techniken zum Aufbau als auch einer Bibliothek aus Masken und Rekonstruktionsverfahren vorstellbar. Im Sinne einer Optimierung, zur Einhaltung der vorgegebenen Spezifikationen, ist als optionale Erweiterung eine Verknüpfung zu Techniken aus dem Bereich High-Level Synthesis (HLS) denkbar, um zusätzlich eine automatisierte Hardwarebeschreibung zu generieren.



# A Anhang

## A.1 Berechnungsaufwand für SOP-Suchalgorithmen

In diesem Teil erfolgt die detaillierte Herleitung der eingeführten Algorithmen zur beschleunigten SOP-Permutationsbestimmung durch die Einschränkung des Suchbereiches. Der Ausgangspunkt aller nachfolgenden Betrachtungen ist die Wahl eines zufälligen initialen Repräsentanten aus  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{R \times N_R}$ .

### A.1.1 Priorisierte Suche entlang gleicher Elektroden

Nachdem der Startpatch festgelegt wurde, erfolgt im nächsten Schritt die Suche nach dem Repräsentanten mit der minimaler Distanz lediglich entlang der gleichen Elektrodenkonstellation. Dafür stehen  $T - R_T$  Patches zur Verfügung. Nach jeder Zuordnung verringert sich die Anzahl

$$\sum_{t=1}^{T-R_T+1} T - R_T - t = (T - R_T + 1)(T - R_T) - \sum_{t=1}^{T-R_T+1} t \quad (\text{A.1})$$

$$= (T - R_T + 1)(T - R_T) - \frac{(T - R_T + 1)(T - R_T)}{2} \quad (\text{A.2})$$

$$= \frac{(T - R_T + 1)(T - R_T)}{2}. \quad (\text{A.3})$$

Der Vorgang der priorisierten Suche wird für alle definierten Elektrodenkonstellationen  $MN - R_M + 1$  durchgeführt:

$$(MN - R_M + 1) \frac{(T - R_T + 1)(T - R_T)}{2} = N_R \frac{T - R_T}{2} \quad (\text{A.4})$$

Nach der Zuordnung aller Repräsentanten entlang der Zeitachse, erfolgt eine unbeschränkte Suche hinsichtlich aller verbleibenden Patches

$$(T - R_T + 1) \sum_{m=1}^{MN-R_M+1} MN - R_M - m = N_R \frac{MN - R_M}{2} \quad (\text{A.5})$$

um die nächste Elektrodenkonstellation festzulegen. Der kombinatorische Berechnungsaufwand für die priorisierte Suche entlang gleicher Elektroden setzt sich also aus der Summe der Ausdrücke (A.4) und (A.5) zusammen:

$$\mathcal{B}_{ec} = N_R \frac{T - R_T}{2} + N_R \frac{MN - R_M}{2} = \frac{N_R}{2} (T + MN - R_T - R_M). \quad (\text{A.6})$$

### A.1.2 Anordnung zu Patchgruppen

In diesem Ansatz zur Beschleunigung der SOP-Permutation erfolgt die Anordnung der Repräsentanten in Gruppen der Größe  $G$ . Nach der Wahl des Startpatches erfolgt eine unbeschränkte Suche. Aus dem Ergebnis werden die  $G$  Repräsentanten mit der minimalen Distanz ausgewählt und in selbiger Reihenfolge der Referenz zugeordnet. Danach wird wieder unbeschränkt gesucht, wobei die neue Referenz der Patch an der letzten Position der Gruppe ist. Dadurch entstehen neben dem Startpatch

$$\left\lceil \frac{N_R - 1}{G} \right\rceil \quad (\text{A.7})$$

Cluster für die Permutation. Nach jeder neuen Zuordnung einer Gruppe reduzieren sich die verbleibenden Repräsentanten um  $G$  Patches:

$$\sum_{r=1}^{\left\lceil \frac{N_R-1}{G} \right\rceil} N_R - 1 - rG = \left\lceil \frac{N_R - 1}{G} \right\rceil (N_R - 1) - G \sum_{r=1}^{\left\lceil \frac{N_R-1}{G} \right\rceil} r \quad (\text{A.8})$$

$$= \left\lceil \frac{N_R - 1}{G} \right\rceil (N_R - 1) - G \frac{\left\lceil \frac{N_R-1}{G} \right\rceil (\left\lceil \frac{N_R-1}{G} \right\rceil + 1)}{2}. \quad (\text{A.9})$$

Damit kann ein kombinatorischer Berechnungsaufwand von

$$\mathcal{B}_{gp} = \left\lceil \frac{N_R - 1}{G} \right\rceil \left( N_R - 1 + G \frac{\left\lceil \frac{N_R-1}{G} \right\rceil + 1}{2} \right) \quad (\text{A.10})$$

für diese Ansatz angegeben werden.

### A.1.3 Patchgruppen entlang gleicher Elektroden

Die Kombination der Ansätze aus den Abschnitten A.1.1 und A.1.2 definiert sich aus der priorisierten Suche von Repräsentanten entlang der gleichen Elektroden, welche in Gruppe angeordnet werden. Dementsprechend existieren neben dem Referenzpatch insgesamt

$$\left\lceil \frac{T - R_T}{G} \right\rceil \quad (\text{A.11})$$

Cluster der Gruppengröße  $G$  pro Elektrodenkonstellation. Ist die gruppierte Suche entlang der gleichen Elektroden

$$\sum_{t=1}^{\left\lceil \frac{T-R_T}{G} \right\rceil - 1} N_R - 1 - tG = \left( \left\lceil \frac{T-R_T}{G} \right\rceil - 1 \right) (N_R - 1) - G \sum_{t=1}^{\left\lceil \frac{T-R_T}{G} \right\rceil - 1} t \quad (\text{A.12})$$

$$= \left( \left\lceil \frac{T-R_T}{G} \right\rceil - 1 \right) (N_R - 1) - G \frac{(\left\lceil \frac{T-R_T}{G} \right\rceil - 1) \left\lceil \frac{T-R_T}{G} \right\rceil}{2} \quad (\text{A.13})$$

$$= \left( \left\lceil \frac{T-R_T}{G} \right\rceil - 1 \right) \left( (N_R - 1) - \frac{G}{2} \left\lceil \frac{T-R_T}{G} \right\rceil \right) \quad (\text{A.14})$$

abgeschlossen, erfolgt eine unbeschränkte Suche hinsichtlich der verbleibenden Elektrodenkonstellationen (wie in Gl. (A.5)). Daraus resultiert der Berechnungsaufwand von

$$\mathcal{B}_{gc} = N_R \frac{MN - R_M}{2} + \left( \left\lceil \frac{T-R_T}{G} \right\rceil - 1 \right) \left( (N_R - 1) - \frac{G}{2} \left\lceil \frac{T-R_T}{G} \right\rceil \right). \quad (\text{A.15})$$

## A.2 Anpassung der Datenblocklänge für den SOC

Der Ausgangspunkt ist die iterationsübergreifende Gleichheitsforderung zwischen dem SOC und SOP hinsichtlich der extrahierten Repräsentanten:

$$\sum_{i=1}^{I_{\max}} \prod_{d=\{M,N,T^{SOC}\}} (d - R_{d,i}^{SOC} + 1) = \sum_{i=1}^{I_{\max}} \prod_{d=\{MN,T^{SOP}\}} (d - R_{d,i}^{SOP} + 1). \quad (\text{A.16})$$

Die rechte Gleichungsseite für den SOP bleibt unangetastet. Wohingegen die Terme der linken Seite zunächst wie folgt zerlegt werden

$$T^{SOC} \sum_{i=1}^{I_{\max}} \prod_{d=\{M,N\}} (d - R_{d,i}^{SOC} + 1) - \sum_{i=1}^{I_{\max}} (R_{T,i}^{SOC} - 1) \prod_{d=\{M,N\}} (d - R_{d,i}^{SOC} + 1). \quad (\text{A.17})$$

Im letzten Schritt erfolgt die Auflösung nach  $T^{SOC}$  um die Gleichheitsvorschrift der extrahierten Repräsentanten durch Anpassung der Datenblocklänge

$$T^{SOC} = \frac{\sum_{i=1}^{I_{\max}} \prod_{d=\{MN,T^{SOP}\}} (d - R_{d,i}^{SOP} + 1) + \sum_{i=1}^{I_{\max}} (R_{T,i}^{SOC} - 1) \prod_{d=\{M,N\}} (d - R_{d,i}^{SOC} + 1)}{\sum_{i=1}^{I_{\max}} \prod_{d=\{M,N\}} (d - R_{d,i}^{SOC} + 1)} \quad (\text{A.18})$$

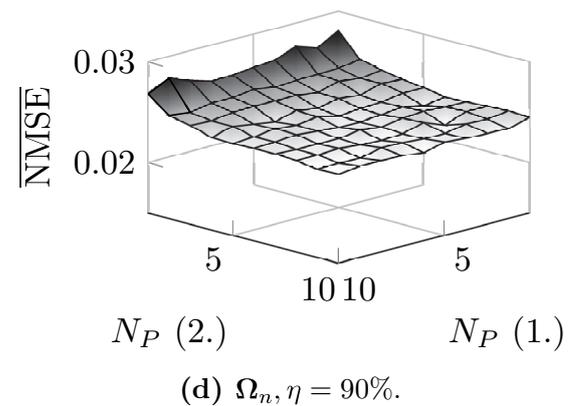
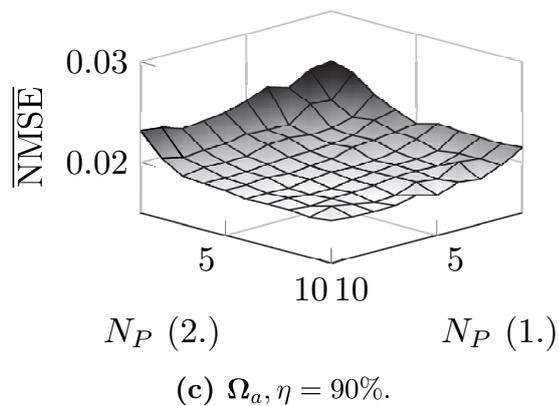
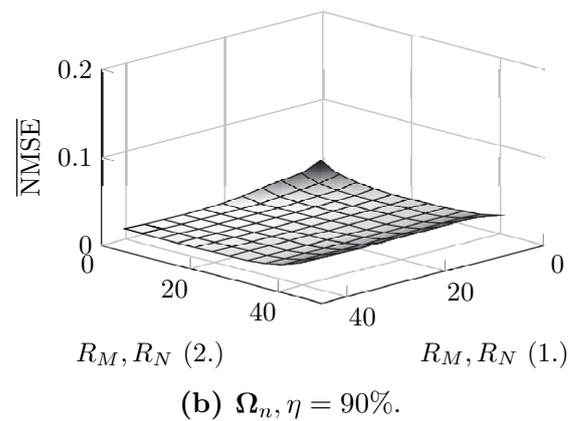
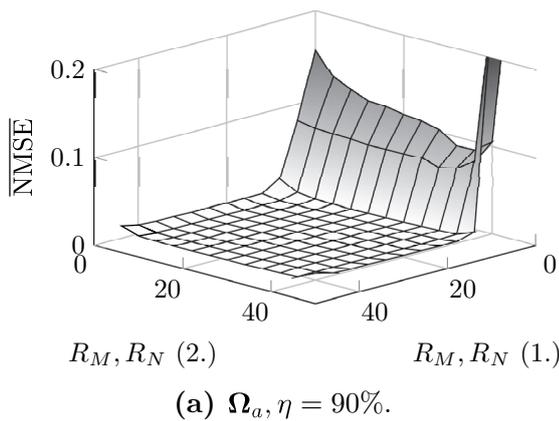
zu erzwingen.

## A.3 SOP-Rekonstruktionsparameter

Im Sinne der Vollständigkeit erfolgt in diesem Teil des Anhangs die Darstellung weiterer Untersuchungsergebnisse hinsichtlich der algorithmischen Freiheitsgrade des SOP-Algorithmus.

### A.3.1 Größe der Repräsentantengruppen

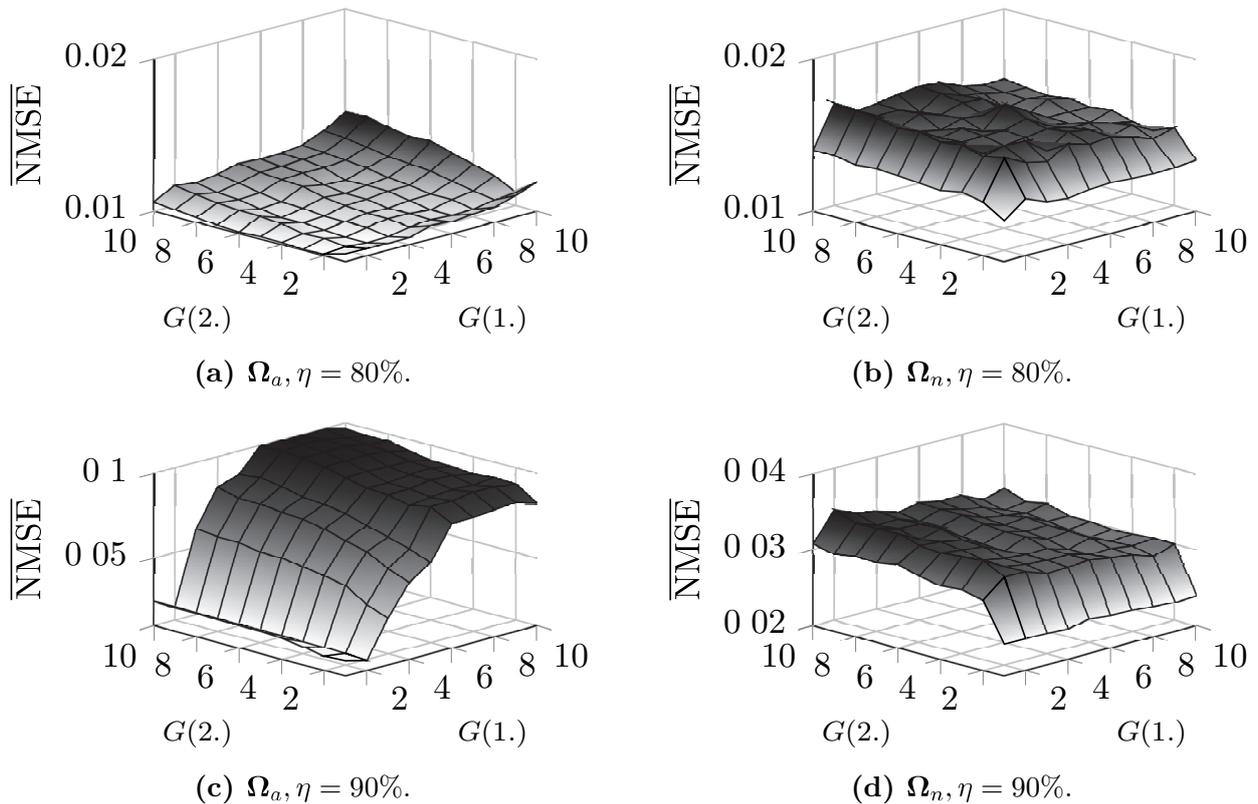
Zur Vervollständigung der Ergebnisse aus Abschnitt 3.3.2.2 werden an dieser Stelle die Untersuchungen zur Patchgröße  $R_M \times R_T$  sowie die Anzahl der unabhängigen, parallelen Permutationen in der ersten und zweiten Iteration des SOP-Algorithmus für die Masken  $\Omega_a$  und  $\Omega_n$  dargestellt.



**Abbildung A.1:** Untersuchung der Patchdimension  $R_M \times R_T$  und Anzahl der Permutationen  $N_P$  für die 1. und 2. Iteration im SOP.

### A.3.2 Größe der Repräsentantengruppen

Zur Vervollständigung der Ergebnisse aus Abschnitt 3.3.3.1 werden an dieser Stelle die Untersuchungen zur Gruppengröße  $G$  in der ersten und zweiten Iteration des SOP-Algorithmus für die Masken  $\Omega_a$  und  $\Omega_n$  dargestellt.



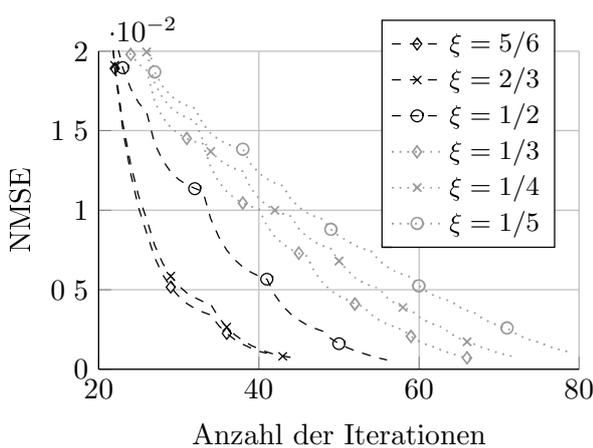
**Abbildung A.2:** Untersuchung der Gruppengröße  $G$  für die 1. und 2. Iteration im SOP für die Masken  $\Omega_a$  und  $\Omega_n$ . Die Patchgröße beträgt  $32 \times 32$  bzw.  $48 \times 48$  in der ersten und  $8 \times 8$  in der zweiten Iteration. Es wurden jeweils zehn Permutationen verwendet.

## A.4 PCWT-Rekonstruktionsparameter

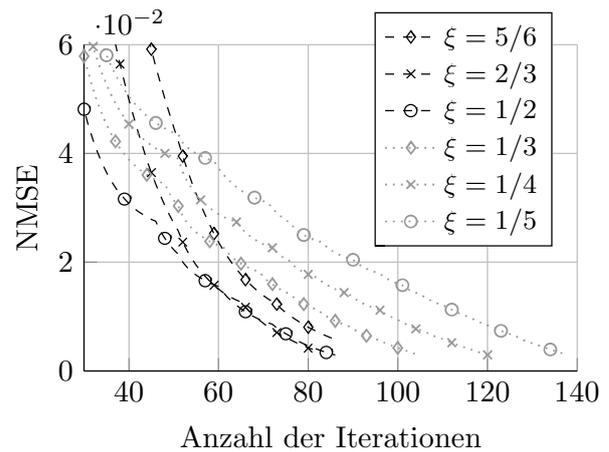
Im Sinne der Vollständigkeit erfolgt in diesem Teil des Anhangs die Darstellung weiterer Untersuchungsergebnisse hinsichtlich der algorithmischen Freiheitsgrade des PCWT-Algorithmus.

### A.4.1 Adaptives Thresholding

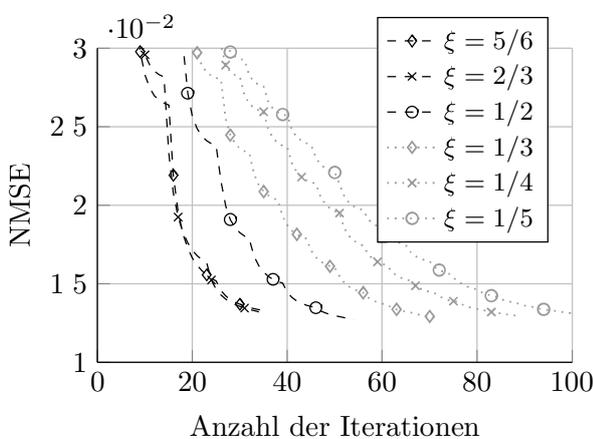
Zur Vervollständigung der Ergebnisse aus Abschnitt 4.3.2.3 werden an dieser Stelle die Untersuchungen zum adaptiven Thresholding für die MRT-Datensätze Shepp-Logan und BRaTS2013 im PCWT-Algorithmus für die Kompressionsgrade  $\eta = \{70\%, 90\%\}$  dargestellt.



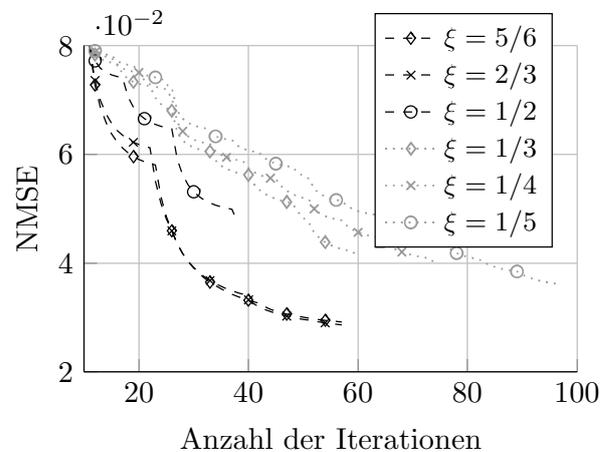
(a) Shepp-Logan,  $\eta = 70\%$



(b) Shepp-Logan,  $\eta = 90\%$



(c) BraTS2013,  $\eta = 70\%$



(d) BraTS2013,  $\eta = 90\%$

**Abbildung A.3:** Auswertung des adaptiven Thresholdings im PCWT-Algorithmus für die MRT-Datensätze Shepp-Logan und BraTS2013.

**B**

# Notations-, Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

## B.1 Notationsverzeichnis

$x$	Wert
$x_n$	Vektorelement
$\mathbf{x}$	Vektor
$\mathbf{x}_n$	$n$ -te Spaltenvektor der Matrix
$\mathbf{X}$	Matrix
$X_{m,n}$	Matrixelement
$\mathbf{0}$	Nullmatrix
$\mathbf{1}$	Einheitsmatrix
$\mathbf{X}'$	Vektordarstellung der Matrix
$\mathbf{X}^\dagger$	Moore-Penrose Pseudoinverse
$\hat{\mathbf{X}}$	Teilsegment aus der Matrix
$\tilde{\mathbf{X}}$	Schätzung der Matrix
$ \{\cdot\} $	Kardinalität
$\text{nz}(\cdot)$	Anzahl der Nichtnulleinträge
$\text{rang}(\cdot)$	Rang einer Matrix
$\text{supp}(\cdot)$	Träger
$\text{vec}(\cdot)$	Vektordarstellung der Matrix durch Spaltenpartitionierung
$(\cdot)^{(i)}$	$i$ -te Iteration
$(\cdot \otimes \cdot)$	Kroneckerprodukt zweier Matrizen
$\ \cdot\ _n$	$\ell_n$ -Norm
$\mathcal{A}$	Endliches Wertalphabet
$\mathcal{B}$	Berechnungsaufwand
$\mathcal{D}(\cdot)$	Operator für Diffusion
$\mathcal{E}(\cdot)$	Operator für überlappende Patch-Extraktion
$\mathcal{H}(\cdot)$	Operator für Interpolation
$\mathcal{O}(\cdot)$	Landau-Operator für Berechnungskomplexität
$\mathcal{P}(\cdot)$	Operator für Permutation
$\mathcal{R}(\cdot)$	Operator für Randbedingungen

$\mathcal{T}(\cdot)$  Operator für Thresholding (Schwellwertentscheidung)

## B.2 Symbolverzeichnis

$\mathbf{a}^l$	approximierte Wavelet-Koeffizienten der Stufe $l$
$A_{\max}$	Anzahl der Iteration für die Isophoten-Detektion/Vervollständigung
$\mathbf{A}$	CS-Messmatrix
$B$	Menge aller unmaskierten Datenpunkte einer Matrix
$B_{\max}$	Anzahl der Iteration für die anisotrope Diffusion
$\mathbf{B}$	Bandmatrix
$\{c_p, c_q\}$	Normierungsfaktoren für die DCT-Koeffizienten
$C_b$	Chrominanz Blau zu Gelb
$C_r$	Chrominanz Rot zu Türkis
$\mathbf{C}_i$	Extraktionsmatrix für die $i$ -te Teildarstellung aus $\mathbf{K}$
$\mathbf{d}^l$	detaillierte Wavelet-Koeffizienten der Stufe $l$
$D$	Anzahl aller Einträge einer Matrix
$\mathbf{D}$	Basismatrix bzw. Dictionary
$\mathbf{D}_A$	Basismatrix zur Wavelet-Analyse
$\mathbf{D}_B$	Interblock-Transformation beim BM3D
$\mathbf{D}_E$	Dictionary für epileptische Anfälle
$\mathbf{D}_N$	Dictionary für Ruhepotentiale
$\mathbf{D}_R$	Intrablock-Transformation beim BM3D
$\mathbf{D}_S$	Basismatrix zur Wavelet-Synthese
$\mathbf{D}_{\text{DCT}}$	DCT-Basismatrix
$E_s$	Signalenergie
$\mathbf{E}_i$	Extraktionsmatrix für den $i$ -ten Repräsentanten aus $\mathbf{X}$
$f(x)$	Allgemeine Funktion $f$ in Abhängigkeit von $x$
$\mathbf{g}$	Wavelet-Tiefpassfilter
$G$	Menge für den Zusammenschluss aller Gruppen
$G_b$	Menge für die $b$ -ten Gruppe
$\mathbf{G}$	Gruppe
$\mathbf{h}$	Wavelet-Hochpassfilter
$I_{\max}$	Anzahl der Iteration
$I_p$	Iterationsanzahl mit konstanter Permutation
$\mathbf{j}$	Funktion zur Ausblendung von Teilbereichen
$J$	Fehlerabschätzungswert in der SVD
$k$	Anzahl der Cluster in $k$ -Means
$\mathbf{k}_i$	$n$ -ter Repräsentant aus der Kollektionsmatrix $\mathbf{K}$
$K$	Anzahl der Nichtnulleinträge in einem sparsen Vektor
$\mathbf{K}$	Kollektionsmatrix
$L$	Tiefe der Multiskalenanalyse

$L_p$	Tiefe der Multiskalenanalyse vom SRWT (mit Permutation)
$L_s$	Tiefe der Multiskalenanalyse vom SWT (ohne Permutation)
$M$	Anzahl der Zeilen in der Matrix
$M_b$	Anzahl der Zeilen in einem Block der DCT-Matrix
$M_m$	Anzahl der Zeilen im variablen MPEG-Unterblock
<b>M</b>	logische Maske
<b>n</b>	additive Störgröße
$N$	Anzahl der Spalten in der Matrix
$N_B$	Anzahl der Gruppenteilnehmer bzw. Blockgröße
$N_G$	Anzahl der Gruppen
$N_m$	Anzahl der Spalten im variablen MPEG-Unterblock
$N_P$	Anzahl der parallelen Permutation im SOP
$N_R$	Gesamtanzahl der extrahierten Repräsentaten
$N_S$	Gesamtanzahl der LNS-Segmente
$N_T$	Anzahl der adaptiven Schwellwerte im PCWT
$O$	Menge aller ursprünglichen Datenpunkte einer Matrix
$p$	Art der Norm $\ \cdot\ _p^p$
$p$	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion
$P$	Wahrscheinlichkeit
<b>P</b>	Permutationsmatrix
$q_b$	Gewicht für Mehrfachverwendung im BM3D
<b>Q</b>	Unitäre Matrix in der QR-Zerlegung
<b>r</b>	Residuum
$r_{\max}$	Maximaler Fehler bei der LFA
$R$	Gesamtanzahl der Einträge des extrahierten Repräsentaten
$R_b$	JPEG2000-Dynamikbereich
$R_M$	vertikale Dimension des extrahierten Repräsentaten
$R_N$	horizontale Dimension des extrahierten Repräsentaten
$R_T$	zeitliche Dimension des extrahierten Repräsentaten
<b>R</b>	Residuenmatrix beim K-SVD
$s_t$	Segmentbeginn im LFA
$S_m$	vertikale Ausdehnung des Suchbereiches nach Repräsentanten
$S_n$	horizontale Ausdehnung des Suchbereiches nach Repräsentanten
$S_t$	zeitliche Ausdehnung des Suchbereiches nach Repräsentanten
$\hat{S}^Q$	quantisiertes Ausschnitt des Spektrums
<b>S</b>	Spektrum der Matrix
$t$	Zeit
$T$	Anzahl der Spalten bzw. Frames in einer Matrix bzw. Zeitrichtung
$T_b$	Anzahl der Spalten in einem Block der DCT-Matrix
$T_{\text{clk}}$	Datendurchsatz pro Sekunde
<b>T</b>	Regularisierte Gram-Matrix

---

$U$	Menge aller reduzierten Datenpunkte einer Matrix
$\mathbf{U}$	Matrix der Links-Singulärvektoren (SVD)
$\mathbf{V}$	Matrix der Rechts-Singulärvektoren (SVD)
$\mathbf{V}$	Verbleibender Anteil in der Matrixzerlegung beim CSVit
$w$	RSVD-Parameter
$\mathbf{W}$	Gewichtsmatrix des CSVit
$\mathbf{x}$	Originalvektor
$\mathbf{x}_{\text{rec}}$	Vektor nach Rekonstruktion
$\mathbf{X}$	Originalmatrix
$\mathbf{X}_{\text{rec}}$	Matrix nach Rekonstruktion
$\mathbf{y}$	CS-Projektionsvektor
$Y$	Luminanz
$\mathbf{Y}$	RSVD-Zufallsmatrix
$\mathbf{z}$	Ausgangssignal beim MLSE-Modell
$\mathbf{Z}$	Transformation der Matrix
$\alpha$	Sparse Darstellung der Repräsentanten im K-SVD
$\Gamma_o$	Überlappungsgrad zwischen Datenblöcken
$\Delta_b$	JPEG2000-Intervallbreite
$\Delta u$	Allgemeine Differenz von zwei Ausdrücken
$\delta_K$	CS-RIP-Konstante
$\epsilon_b$	JPEG2000-Exponent
$\epsilon$	tolerierbarer Fehler
$\epsilon_T$	tolerierbarer Schranke im PCWT-Thresholding
$\eta$	Kompressionsgrad
$\Theta$	Quantisierungsmatrix in der DCT
$\kappa$	Polynom dritten Grade für die Spline-Interpolation
$\lambda$	Regularisierungsterm
$\lambda_B$	Schwellwert im BM3D
$\lambda_I$	Schwellwert im PCWT
$\lambda_K$	Strafterm im K-SVD-Optimierungsproblem
$\lambda_n$	$n$ -ter Maskenrepräsentant aus der Maskenkollektionsmatrix $\Lambda$
$\Lambda$	Maskenkollektionsmatrix
$\mu$	Zentroid bei $K$ -Means
$\mu_b$	JPEG2000-Mantisse
$\mu_i$	Skalierungsfaktor im K-SVD-Optimierungsproblem
$\xi$	Absenkungsrate des Schwellwerts beim PCWT
$\Xi$	Indikatormatrix in der RSVD
$\rho$	Pearsonscher Maßkorrelationskoeffizient
$\sigma$	Singulärwert
$\sigma_n^2$	Varianz der Größe $\mathbf{n}$
$\Sigma$	Matrix mit Singulärwerten (SVD)

---

$\tau$	Numerischer Rang in der RSVD
$\phi$	Skalierungsfunktion
$\psi$	Mother-Wavelet
$\Omega$	Sampling-Maske

## **B.3 Abkürzungsverzeichnis**

A/D	Analog-to-Digital
ADC	Analog-to-Digital Converter
ASIC	Application Specific Integrated Circuit
ADMM	Alternating Direction Method of Multipliers
APS	Active Pixel Sensor
AMP	Approximate Message Passing
AWGN	Additive White Gaussian Noise
BM3D	Block-Matching 3D
BM4D	Block-Matching 4D
BP	Basis Pursuit
BPDN	Basis Pursuit Denoising
BPIC	Basis Pursuit with Inequality Constrains
BPSK	Binary Phase-Shift Keying
BTI	Bias Temperature Instability
CCD	Charge-Coupled Device
CO <sub>2</sub>	Kohlenstoffdioxid
COTS	Commercial Off The Shelf
CMOS	Complementary Metal-Oxide-Semiconductor
CoSaMP	Compressive Sampling Matching Pursuit
CS	Compressed Sensing
CSVit	Compressed Sensing Viterbi
CT	Röntgencomputertomographie
CVX	Convex Optimization Tools
D/A	Digital-to-Analog
DAC	digital-to-Analog-Converter
DCT	Discrete Cosinus-Transform
DFT	Discrete Fourier-Transform
DMD	Digital Micromirror Device
DSM	Delta-Sigma Modulator
DWT	Discrete Wavelet-Transform
ECG	Elektrokortikogramm
EEG	Elektroenzephalogramm
EZE	Epilepsiezentrum Erlangen
FWT	Fast Wavelet-Transform
FFT	Fast Fourier-Transform
FIR	Finite Impulse Response
FPGA	Field Programmable Gate Array
FPNS	Festkommazahlensystem
FPA	Focal Plane Array

---

FRI	Finite Rate of Innovation
FSM	Finite State Machine
GP	Gradient Pursuit
HCI	Hot Carrier Injection
HLS	High-Level Synthesis
HW	Hardware
IC	Integrated Circuits
IDCT	Inverse Discrete Cosinus-Transform
IDM	Inpainting Design Methodology
IHT	Iterative Hard-Thresholding
IoT	Internet of Things
JPEG	Joint Photographic Expert Group
<i>K</i> -SVD	<i>K</i> -Means Clustering Singular Value Decomposition
LASSO	Least Absolute Selection and Shrinkage Operator
LCD	Liquid Crystal Display
LFA	Linear Function Approximation
LFP	Local Field Potential
LNS	logarithmisches Zahlensystem
LP	lineare Programmierung
LS	Least Squares
LUT	Look Up Table
MAP	Maximum a posteriori
ML	Maximum Likelihood
MLSE	Maximum Likelihood Sequence Estimation
MEA	Multi Electrode Array
MPEG	Moving Picture Experts Group
MRA	Multiresolution Analysis
MRI	Magnetic Resonance Imaging
MRT	Magnetresonanztomographie
MSB	Most Significant Bit
MSE	Mean Squared Error
MUX	Multiplexer
NASA	National Aeronautics and Space Administration
NMS	Neural Measurement System
NMSE	Normalized Mean Squared Error
NP	Non-Deterministic Polynomial-Time
OCO	Orbiting Carbon Observatory
OMP	Orthogonal Matching Pursuit
PCWT	Permuted Cuboids Wavelet Thresholding
ppm	Parts per Million
PSK	Phase-Shift Keying

PSNR	Peak-Signal-to-Noise-Ratio
QAM	Quadrature Amplitude Modulation
QPSK	Quadrature Phase-Shift Keying
RF	Radio Frequency
RGB	Red-Green-Blue
RIP	Restricted Isometry Property
RNG	Random Number Generator
ROMP	Regularized Orthogonal Matching Pursuit
RoI	Region of Interest
ROP	Randomized Ordering of Patches
RSVD	Randomized Singular Value Decomposition
RTBWT	Redundant Tree-based Wavelet Transform
SBI	Structure-based Inpainting
SCOMP	Sub-Correlation Orthogonal Matching Pursuit
SLM	Spatial Light Modulator
SPC	Single Pixel Camera
SNR	Signal-to-Noise-Ratio
SOC	Smooth Ordering of Cuboids
SOP	Smooth Ordering of Patches
SOS	Smooth Ordering of Slits
SotA	State-of-the-Art
StOMP	Stagewise Matching Pursuit
SW	Software
SVD	Singular Value Decomposition
TSVD	Truncated Singular Value Decomposition
SRWT	Sparse Redundant Wavelet Transform
SWT	Stationary Wavelet Transform
TE	Time to Echo
TR	Time to Repetition
TSP	Travelling Salesman Problem
TV	Total-Variation
UHD	Ultra High Definition
VHDL	Very High Speed Integrated Circuit Hardware Description Language
WHT	Discrete Walsh Hadamard Transform
s.t.	subject to



# Wissenschaftliche Beiträge

Im Folgenden werden die im Rahmen der Promotion entstandenen wissenschaftlichen Veröffentlichungen antichronologisch aufgelistet.

## C.1 Wissenschaftliche Veröffentlichungen

**Online Surveillance Techniques for Reliable Active Pixel Sensor Systems**, Theodor Hillebrand, Sebastian Schmale, Steffen Paul and Dagmar Peters-Drolshagen, *submitted to 2018 IEEE Nuclear and Space Radiation Effects Conference (NSREC)*, Kona, Hawaii, USA, July, 2018

**Random Subsampling based Signal Detection for Spatial Correlated Massive MIMO Channels**, Pascal Seidel, Benjamin Knoop, Sebastian Schmale, Daniel Gregorek, Jochen Rust and Steffen Paul, *accepted for IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*, Florence, Italy, May, 2018

**Compressed Sensing of Multiple Inputs - Implementation and Reconstruction Error**, Heiner Lange, Sebastian Schmale and Steffen Paul, *accepted for IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*, Florence, Italy, May, 2018

**Inpainting Makes Every Sample Count**, Sebastian Schmale and Steffen Paul, *Biomedical Circuits and Systems Conference (BioCAS 2017)*, Turin, Italy, October, 2017

**Permuted Cubes Wavelet Thresholding for Mask-Sensed MRI**, Sebastian Schmale, Pascal Seidel and Steffen Paul, *IEEE Digital Signal Processing (DSP)*, London, England, September, 2017

**Neurological Activity Monitoring Based on Video Inpainting**, Sebastian Schmale, Pascal Seidel, Steffen Thiermann and Steffen Paul, *39th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society (EMBC)*, Jeju Island, South Korea, July, 2017.

**Efficient and Fast SOP-Based Inpainting for Neurological Signals in Resource Limited Systems**, Sebastian Schmale, Pascal Seidel, Heiner Lange, Benjamin Knoop, Dagmar Peters-Drolshagen and Steffen Paul, *23rd IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems (ICECS)*, Monte Carlo, Monaco, December, 2016.

**Fast Digital Design Space Exploration with High-Level Synthesis: A Case Study with Approximate Conjugate Gradient Pursuit**, Benjamin Knoop, Karthik Vinod, Sebastian Schmale, Dagmar Peters-Drolshagen, Steffen Paul, *50th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, Pacific Grove, CA, USA, November, 2016.

**Low Power ASIC Design for Infrared Sensor Network Inside Ariane 5 Vehicle Equipment Bay**, Hendra Kesuma, Sebastian Schmale, Johannes Sebald, Steffen Paul, *Wireless for Space and Extreme Environments 2016 (WiSEE2016)*, Aachen, Germany, September 2016.

**High Throughput Architecture for Inpainting-Based Recovery of Correlated Neural Signals**, Sebastian Schmale, Jochen Rust, Nils Hülsmeier, Heiner Lange, Benjamin Knoop, Steffen Paul, *24th European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2016)*, Budapest, Hungary, September 2016.

**Rapid Digital Architecture Design of Orthogonal Matching Pursuit**, Benjamin Knoop, Jochen Rust, Sebastian Schmale, Dagmar Peters-Drolshagen, Steffen Paul, *24th European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2016)*, Budapest, Hungary, September 2016.

**Hardware-Accelerated Reconstruction of Compressed Neural Signals Based on Inpainting**, Sebastian Schmale, Hendra Kesuma, Heiner Lange, Jochen Rust, Benjamin Knoop, Dagmar Peters-Drolshagen and Steffen Paul, *22nd International Conference Mixed Design of Integrated Circuits and Systems (MIXDES)*, Lodz, Poland, June, 2016.

**Time Synchronization/Stamping Method with Visible Light Communication and Energy Harvesting Method for Wireless Sensor Network inside Ariane 5 Vehicle Equipment Bay**, Hendra Kesuma, Kris Niederkleine, Sebastian Schmale, Tejas Ahobala, Johannes Sebald, Steffen Paul, *Data Systems In Aerospace (DASIA)*, Tallinn, Estonia, May, 2016.

**Compression and Reconstruction Methodology for Neural Signals Based on Patch Ordering Inpainting for Brain Monitoring**, Sebastian Schmale, Heiner Lange, Benjamin Knoop, Dagmar Peters-Drolshagen, Steffen Paul, *41st IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 2016)*, Shanghai, China, March 2016.

**Activity and Channel Estimation in Multi-User Wireless Sensor Networks**, Benjamin Knoop, Sebastian Schmale, Dagmar Peters-Drolshagen, Steffen Paul, *20th International ITG Workshop on Smart Antennas (WSA 2016)*, Munich, Germany, March 2016.

**Structure Reconstruction of Correlated Neural Signals Based on Inpainting for Brain Monitoring**, Sebastian Schmale, Benjamin Knoop, Dagmar Peters-Drolshagen, Steffen Paul, *Biomedical Circuits and Systems Conference (BioCAS 2015)*, Atlanta, Georgia, USA, October, 2015.

**ADC Topology Based on Compressed Sensing for Low Power Brain Monitoring**, Heiner Lange, Sebastian Schmale, Benjamin Knoop, Dagmar Peters-Drolshagen, Steffen Paul, *EUROSENSORS 2015*, Freiburg, Germany, September 2015.

**Exploiting Correlation in Neural Signals for Data Compression**, Sebastian Schmale, Janpeter Hoeffmann, Benjamin Knoop, Gernot Kreiselmeyer, Hajo Hamer, Dagmar Peters-Drolshagen, Steffen Paul, *22nd European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2014)*, Lissabon, Portugal, September 2014.

**Joint Compression of Neural Action Potentials and Local Field Potentials**, Sebastian Schmale, Benjamin Knoop, Janpeter Hoeffmann, Dagmar Peters-Drolshagen, Steffen Paul, *47th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, Pacific Grove, CA, USA, November, 2013.





# D Studentische Projekte

Im Folgenden werden die im Rahmen der Promotion entstandenen studentischen Projekte antichronologisch aufgelistet.

**Randomized Ordering of Patches**, Lennart Abels, Sebastian Schmale, Prof. Dr.-Ing. Steffen Paul, Prof. Dr. Angelika Bunse-Gerstner, *Bachelorarbeit*, Februar, 2018

**Dictionary-Based Video-Inpainting of Neurological Activity Monitoring with K-SVD Dictionary Learning**, Steffen Thiermann, Sebastian Schmale, Prof. Dr.-Ing. Steffen Paul, Dr.-Ing. Dagmar Peters-Drolshagen, *Diplomarbeit*, Februar, 2018

**Algorithms to Perform on-line EEG Pattern Recognition in a Digital Bioprocessor**, Fabian Frese, Sebastian Schmale, Prof. Dr.-Ing. Steffen Paul, Dr.-Ing. Jochen Rust, *Diplomarbeit*, Juni, 2017

**Untersuchung der Sparsity für neurologische Signale mittels MOD und Sparsenet**, Fabian Kohlsdorfer, Dipl.-Ing. Sebastian Schmale, Prof. Dr.-Ing. Steffen Paul, *Bachelorvertiefungsprojekt*, Juni, 2017

**Untersuchung von Verschlüsselungsverfahren für maskierte neurologische Daten**, Simon Knobbe, Sebastian Schmale, Prof. Dr.-Ing. Steffen Paul, Dr.-Ing. Jochen Rust, *Bachelorarbeit*, April, 2017

**Kantenbasierte Maskenerstellung für MRT-Aufnahmen**, Alexandra Kirchner, Sebastian Schmale, Prof. Dr.-Ing. Steffen Paul, Dr.-Ing. Jochen Rust, *Bachelorarbeit*, Februar, 2017

**Frequenzmaskierung und Inpainting-Rekonstruktion von dreidimensionalen biomedizinischen Daten**, Pascal Seidel, Sebastian Schmale, Prof. Dr.-Ing. Steffen Paul, Dr.-Ing. Dagmar Peters-Drolshagen, *Masterarbeit*, Dezember, 2016

**Rekonstruktion von extrem maskierten Signalen**, Henrik Ücdemir, Sebastian Schmale, Prof. Dr.-Ing. Steffen Paul, Prof. Dr. Angelika Bunse-Gerstner, *Bachelorarbeit*, November, 2016

**Untersuchung von Reihenapproximationen auf strukturbasiertes Inpainting**, Simon Knobbe, Sebastian Schmale, Prof. Dr.-Ing. Steffen Paul, *Bachelorvertiefungsprojekt*, August, 2016

**K-Means-Algorithmus zur Detektion epileptischer Anfälle**, Camilla Konermann, Sebastian Schmale, Prof. Dr.-Ing. Steffen Paul, *Bachelorvertiefungsprojekt*, April, 2016

**Patch-basierte Inpainting-Rekonstruktion von neurologischen Signalen**, Pascal Seidel, Sebastian Schmale, Prof. Dr.-Ing. Steffen Paul, *Masterprojekt*, Mai, 2016

**Hardware-Architektur des structure-based Inpainting Algorithmus zur Rekonstruktion korrelierter neurologischer Signale**, Nils Hülsmeier, Sebastian Schmale, Prof. Dr.-Ing. Steffen Paul, Dr.-Ing. Jochen Rust, *Bachelorarbeit*, April, 2016

**Rekursives Compressed Sensing - Kompression und Rekonstruktion von Streaming Data**, Kim Kramer, Sebastian Schmale, Prof. Dr.-Ing. Steffen Paul, Dr.-Ing. Dagmar Peters-Drolshagen, *Bachelorarbeit*, Januar, 2016

**Untersuchung zur Rekonstruktion sparser Signale unter Verwendung des Regularized Orthogonal Matching Pursuits (ROMP)**, Daniel Hotes, Sebastian Schmale, Prof. Dr.-Ing. Steffen Paul, *Bachelorvertiefungsprojekt*, Dezember, 2015

**Untersuchung von konvexen Optimierungsverfahren zur sparsen Signalrekonstruktion in Compressed Sensing**, Robert Tapken, Sebastian Schmale, Prof. Dr.-Ing. Steffen Paul, Dr.-Ing. Dagmar Peters-Drolshagen, *Bachelorarbeit*, September, 2015

**Untersuchung des Approximate Message Passing Algorithmus (AMP) basierend auf Graphical Models zur Rekonstruktion in Compressed Sensing**, Surik Krdoyan, Sebastian Schmale, Steffen Paul, Dr.-Ing. Jochen Rust, *Bachelorarbeit*, August, 2015

**Empirische Untersuchung von Gradient Pursuit Algorithmen zur sparsen Signalrekonstruktion**, Nils Hülsmeier, Sebastian Schmale, Prof. Dr.-Ing. Steffen Paul, *Bachelorvertiefungsprojekt*, August, 2015

**Untersuchung zur Rekonstruktion sparser Signale unter Verwendung des Stagewise Orthogonal Matching Pursuits**, Jan-Philipp Fromm, Sebastian Schmale, Prof. Dr.-Ing. Steffen Paul, *Bachelorvertiefungsprojekt*, Juli, 2015

**High Level Synthese zur Übersetzung von MATLAB-Code in VHDL**, Hannes Buntjer, Sebastian Schmale, Prof. Dr.-Ing. Steffen Paul, *Bachelorvertiefungsprojekt*, Juli, 2015

**Distributed LASSO Algorithm for Underdetermined Linear Systems and Sparse Signals**, Maxim Strauch, Sebastian Schmale, Prof. Dr.-Ing. Steffen Paul, *Studienarbeit*, Juni, 2015

**Untersuchung des Thistlethwaite's-45-Algorithmus zur Lösung von Rubik's-Cubes**, Sven Ole Schmidt, Sebastian Schmale, Prof. Dr.-Ing. Steffen Paul, *Bachelorvertiefungsprojekt*, Mai, 2015

**Analyse von patchbasierten Inpainting-Algorithmen zur räumlichen Strukturrekonstruktion von korrelierten neurologischen Signalen**, Roman Hetke, Sebastian Schmale, Prof. Dr.-Ing. Steffen Paul, *Masterprojekt*, April, 2015

**Compressed Sensing Support Detektion unter Anwendung von Maximum Likelihood Sequence Estimation zur sparsen Signalrekonstruktion**, Pascal Seidel, Sebastian Schmale, Prof. Dr.-Ing. Steffen Paul, Dr.-Ing. Dagmar Peters-Drolshagen, *Bachelorarbeit*, Februar, 2015

**Strukturrekonstruktion mittels Inpainting für korrelierte neurologische Signale**, Michael Krasnitskij, Sebastian Schmale, Prof. Dr.-Ing. Steffen Paul, Dr.-Ing. Dagmar Peters-Drolshagen, *Bachelorarbeit*, Oktober, 2014

**Untersuchung von Compressed Sensing-Algorithmen im Bereich fehlerbehafteter Rekonstruktion**, Constanze Hungar, Sebastian Schmale, Prof. Dr.-Ing. Steffen Paul, Prof. Dr. Angelika Bunse-Gerstner, *Bachelorarbeit*, August, 2014

**Implementierung eines automatisierten Sudoku-Lösungsverfahrens in MATLAB mittels  $\ell_1$ -Minimierung**, Pascal Seidel, Sebastian Schmale, Prof. Dr.-Ing. Steffen Paul, *Bachelorvertiefungsprojekt*, Juli, 2014





# Literaturverzeichnis

- [1] L. Agostini and S. Bampi. Integrated Digital Architecture for JPEG Image Compression. In *European Conference on Circuit Theory and Design*, volume 3, pages 181–184, 2001.
- [2] L. V. Agostini, I. S. Silva, and S. Bampi. Pipelined Fast 2D DCT Architecture for JPEG Image Compression. In *Integrated Circuits and Systems Design, 2001, 14th Symposium on.*, pages 226–231. IEEE, 2001.
- [3] W. Bäni. *Wavelets: Eine Einführung für Ingenieure*. Oldenbourg Verlag, 2005.
- [4] R. Baraniuk, M. Davenport, R. DeVore, and M. Wakin. A Simple Proof of the Restricted Isometry Property for Random Matrices. *Constructive Approximation*, 28(3):253–263, 2008.
- [5] R. R. Basilio, T. R. Livermore, Y. J. Shen, and H. R. Pollock. The Quest for an OCO (Orbiting Carbon Observatory) Re-Flight. *Pasadena, CA: Jet Propulsion Laboratory, National Aeronautics and Space Administration*, 2010.
- [6] M. Bertalmio, G. Sapiro, V. Caselles, and C. Ballester. Image Inpainting. In *Proceedings of the 27th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, SIGGRAPH '00, New York, NY, USA, 2000. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co.
- [7] T. Blumensath and M. E. Davies. Gradient Pursuits. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(6):2370–2382, 2008.
- [8] C. Boutsidis, A. Zouzias, M. W. Mahoney, and P. Drineas. Randomized Dimensionality Reduction for  $k$ -Means Clustering. *IEEE Transactions on Information Theory*, 61(2):1045–1062, 2015.
- [9] S. Boyd, N. Parikh, E. Chu, B. Peleato, and J. Eckstein. Distributed Optimization and Statistical Learning via the Alternating Direction Method of Multipliers. *Foundations and Trends® in Machine Learning*, 3(1):1–122, 2011.

- 
- [10] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge university press, 2004.
- [11] I. N. Bronstein, J. Hromkovic, B. Luderer, H.-R. Schwarz, J. Blath, A. Schied, S. Dempe, G. Wanka, and S. Gottwald. *Taschenbuch der Mathematik*, volume 1. Springer-Verlag, 2012.
- [12] E. Candes and J. Romberg. Sparsity and Incoherence in Compressive Sampling. *Inverse problems*, 23(3), 2006.
- [13] E. Candes, J. Romberg, and T. Tao. Robust Uncertainty Principles: Exact Signal Reconstruction from Highly Incomplete Frequency Information. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 2006.
- [14] E. Candes, T. Tao, J. Romberg, and R. Baraniuk. Compressed sensing Makes Every Pixel Count. *International Journal on What's Happening In The Mathematical Sciences*, pages 114–127, 2007.
- [15] E. J. Candès et al. Compressive Sampling. In *Proceedings of the international congress of mathematicians*, volume 3, pages 1433–1452. Madrid, Spain, 2006.
- [16] E. J. Candès and T. Tao. Decoding by Linear Programming. *IEEE Transactions on Information Theory*, 51(12):4203–4215, Dec 2005.
- [17] J.-P. Carrere, S. Place, J.-P. Oddou, D. Benoit, and F. Roy. CMOS image sensor: Process impact on dark current. In *Reliability Physics Symposium, 2014 IEEE International*, pages 3C–1. IEEE, 2014.
- [18] F. CattÃ©, P. Lions, J. Morel, and T. Coll. Image Selective Smoothing and Edge Detection by Nonlinear Diffusion. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1992.
- [19] A. Chambolle and P.-L. Lions. Image Recovery via Total Variation Minimization and Related Problems. *Numerische Mathematik*, 76(2):167–188, 1997.
- [20] G. H. Chapman, R. Thomas, I. Koren, and Z. Koren. Improved Image Accuracy in Hot Pixel Degraded Digital Cameras. In *Defect and Fault Tolerance in VLSI and Nanotechnology Systems (DFT), 2013 IEEE International Symposium on*, pages 172–177. IEEE, 2013.
- [21] G. H. Chapman, R. Thomas, R. Thomas, K. J. C. S. Meneses, T. Q. Yang, I. Koren, and Z. Koren. Single Event Upsets and Hot Pixels in Digital Imagers. In *Defect and Fault Tolerance in VLSI and Nanotechnology Systems (DFTS), 2015 IEEE International Symposium on*, pages 41–46. IEEE, 2015.

- [22] Z. Charbiwala, V. Karkare, S. Gibson, D. Markovic, and M. B. Srivastava. Compressive Sensing of Neural Action Potentials Using a Learned Union of Supports. In *Body Sensor Networks (BSN), 2011 International Conference on*, pages 53–58. IEEE, 2011.
- [23] F. Chen, A. Chandrakasan, and V. Stojanovic. Design and Analysis of a Hardware-Efficient Compressed Sensing Architecture for Data Compression in Wireless Sensors. *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, 47(3):744–756, Mar. 2012.
- [24] S. S. Chen, D. L. Donoho, and M. A. Saunders. Atomic Decomposition by Basis Pursuit. *SIAM JOURNAL ON SCIENTIFIC COMPUTING*, 20:33–61, 1998.
- [25] W. Cheney and D. Kincaid. *Numerical Mathematics and Computing*, Brooks. 1985.
- [26] Cisco Systems. Cisco Visual Networking Index: Global Mobile Data Traffic Forecast Update, 2016–2021, 2017. <https://www.cisco.com/>.
- [27] C. Cocosco, V. Kollokian, R.-S. Kwan, and A. Evans. BrainWeb: Simulated MRI Volumes for Normal Brain, 2016.
- [28] R. R. Coifman and D. L. Donoho. Translation-Invariant De-Noising. *Wavelets and statistics*, 103:125–150, 1995.
- [29] A. Criminisi, P. Perez, and K. Toyama. Object Removal by Exemplar-Based Inpainting. In *Computer Vision and Pattern Recognition, 2003. Proceedings. 2003 IEEE Computer Society Conference on*, volume 2, pages II–721–II–728 vol.2, June 2003.
- [30] D. Crisp, R. Atlas, F.-M. Breon, L. Brown, J. Burrows, P. Ciais, B. Connor, S. Doney, I. Fung, D. Jacob, et al. The Orbiting Carbon Observatory (OCO) Mission. *Advances in Space Research*, 34(4):700–709, 2004.
- [31] A. Danielyan, V. Katkovnik, and K. Egiazarian. BM3D Frames and Variational Image Deblurring. *IEEE Transactions on Image Processing*, 21(4):1715–1728, 2012.
- [32] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, 1992.
- [33] J. Detrey and F. de Dinechin. A VHDL Library of LNS Operators. In *Conference Record of the Thirty-Seventh Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, nov. 2003.
- [34] D. G. Disler, M. D SCOTT, and D. I. Rosenthal. Accuracy of Volume Measurements of Computed Tomography and Magnetic Resonance Imaging Phantoms by Three-Dimensional Reconstruction and Preliminary Clinical Application. *Investigative radiology*, 29(8):739–745, 1994.

- [35] D. Doering, J. Baudot, M. Deveaux, B. Linnik, M. Goffe, S. Senyukov, S. Strohauer, J. Stroth, and M. Winter. Noise performance and Ionizing Radiation Tolerance of CMOS Monolithic Active Pixel Sensors Using the 0.18  $\mu\text{m}$  CMOS Process. *Journal of Instrumentation*, 9(05):C05051, 2014.
- [36] D. Donoho, A. Maleki, and A. Montanari. Message Passing Algorithms for Compressed Sensing. *CoRR*, abs/0907.3574, 2009.
- [37] D. Donoho, Y. Tsaig, I. Drori, and J. Starck. Sparse Solution of Underdetermined Systems of Linear Equations by Stagewise Orthogonal Matching Pursuit. *Information Theory, IEEE Transactions on*, Feb 2012.
- [38] D. L. Donoho and M. Elad. Optimally Sparse Representation in General (Nonorthogonal) Dictionaries via  $\ell_1$  Minimization. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 100(5):2197–2202, 2003.
- [39] P. Drineas, M. W. Mahoney, and S. Muthukrishnan. Sampling Algorithms for  $\ell_2$  Regression and Applications. In *Proceedings of the seventeenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithm*, pages 1127–1136. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006.
- [40] P. Drineas, M. W. Mahoney, S. Muthukrishnan, and T. Sarlós. Faster Least Squares Approximation. *Numerische mathematik*, 117(2):219–249, 2011.
- [41] M. F. Duarte, M. A. Davenport, D. Takbar, J. N. Laska, T. Sun, K. F. Kelly, and R. G. Baraniuk. Single-Pixel Imaging via Compressive Sampling. *IEEE signal processing magazine*, 25(2):83–91, 2008.
- [42] E. M. Eksioğlu. Decoupled Algorithm for MRI Deconstruction Using Nonlocal Block Matching Model: BM3D-MRI. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 56(3):430–440, 2016.
- [43] M. Elbadri, R. Peterkin, V. Groza, D. Ionescu, and A. El Saddik. Hardware Support of JPEG. In *Electrical and Computer Engineering, 2005. Canadian Conference on*, pages 812–815. IEEE, 2005.
- [44] Ericsson. Ericsson Mobility Report: On the pulse of the networked society, 2016. <https://www.ericsson.com/>.
- [45] European Commission. Enter the Data Economy: EU Policies for a Thriving Data Ecosystem, 2017. <https://ec.europa.eu/epsc/>.
- [46] G. D. Forney. The Viterbi Algorithm. *Proceedings of the IEEE*, 61(3):268–278, 1973.

- [47] N. P. Galatsanos and A. K. Katsaggelos. Methods for Choosing the Regularization Parameter and Estimating the Noise Variance in Image Restoration and Their Relation. *IEEE Transactions on image processing*, 1(3):322–336, 1992.
- [48] G. H. Golub and C. F. Van Loan. *Matrix Computations*, volume 3. JHU Press, 2012.
- [49] R. Gonzalez, R. Woods, and S. Eddins. *Digital Image Processing Using MATLAB*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 2003.
- [50] R. M. Gower and P. Richtárik. Randomized Iterative Methods for Linear Systems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 36(4):1660–1690, 2015.
- [51] H. Hamer, G. Kreiselmeyer, and J. Lang. Data of the Epilepsy Centre of Erlangen (EZE) in Germany, 2013. <http://www.epilepsiezentrum.uk-erlangen.de/>.
- [52] R. E. Haring, R. Pollock, B. M. Sutin, R. Blakley, L. M. Scherr, and D. Crisp. Fabrication and Assembly Integration of the Orbiting Carbon Observatory Instrument. In *Proc. SPIE*, volume 7082, page 708213, 2008.
- [53] R. Harrison. The Design of Integrated Circuits to Observe Brain Activity. *Proceedings of the IEEE*, 96(7):1203–1216, 7 2008.
- [54] T. Hillebrand, N. Hellwege, N. Heidmann, S. Paul, and D. Peters-Drolshagen. Charge-Based Stochastic Aging Analysis of CMOS Circuits. In *2015 IEEE International Integrated Reliability Workshop (IIRW)*, pages 126–129. IEEE, 2015.
- [55] T. Hillebrand, S. Schmale, S. Paul, and D. Peters-Drolshagen. Online Surveillance Techniques for Reliable Active Pixel Sensor Systems. In *eingereicht bei der 2018 IEEE Nuclear and Space Radiation Effects Conference*, July 2018.
- [56] J. Holleman, F. Zhang, and B. Otis. *Ultra Low-Power Integrated Circuit Design for Wireless Neural Interfaces*. Springer, 2011.
- [57] H.-f. Hu, Y. Wang, H. Lan, X. Luo, and Y. Liu. High Performance SOI CMOS Pixel Sensor With Surrounding N+ Trench Electrode. *Microelectronics Reliability*, 55(1):42–47, 2015.
- [58] C. R. Inc. CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, Version 2.0 beta, 2012.
- [59] C. M. Jarque and A. K. Bera. Efficient Tests for Normality, Homoscedasticity and Serial Independence of Regression Residuals. *Economics letters*, 6(3):255–259, 1980.

- [60] Jet Propulsion Laboratory California Institute of Technology. NASA OCO-2-Daten. Website, 2017. Online erhaeltlich unter <https://co2.jpl.nasa.gov/#mission=OCO-2>; abgerufen am 29. Dezember 2017.
- [61] S. Kaisler, F. Armour, J. A. Espinosa, and W. Money. Big data: Issues and challenges moving forward. In *System Sciences (HICSS), 2013 46th Hawaii International Conference on*, pages 995–1004. IEEE, 2013.
- [62] W. A. Kalender. *Computertomographie: Grundlagen, Gerätetechnologie, Bildqualität, Anwendungen;[mit Mehrschicht-Spiral-CT]*. Publicis-MCD-Verlag, 2000.
- [63] K. D. Kammeyer. *Nachrichtenübertragung*, Teubner. 2004.
- [64] M. Kistler, S. Bonaretti, M. Pfahrer, R. Niklaus, and P. Büchler. The Virtual Skeleton Database: An Open Access Repository for Biomedical Research and Collaboration. *Journal of medical Internet research*, 15(11), 2013.
- [65] S. Kupke. Deterministische und stochastische Interpolationsverfahren. 2002.
- [66] S.-k. Kwon, A. Tamhankar, and K. Rao. Overview of H. 264/MPEG-4 Part 10. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 17(2):186–216, 2006.
- [67] P. Lauterbur. Image Formation by Induced Local Interactions: Examples Employing Nuclear Magnetic Resonance. 1973.
- [68] D. T. Lee. JPEG 2000: Retrospective and New Developments. *Proceedings of the IEEE*, 93(1):32–41, Jan 2005.
- [69] F. Li and T. Zeng. A New Algorithm Framework for Image Inpainting in Transform Domain. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 9(1):24–51, 2016.
- [70] S. Lloyd. Least Squares Quantization in PCM. *IEEE transactions on information theory*, 28(2):129–137, 1982.
- [71] M. Lustig. *Compressed Sensing MRI Resources*, 2016 (Accessed: 2017-11-18). <https://people.eecs.berkeley.edu/~mlustig/CS.html>.
- [72] M. Lustig, D. Donoho, and J. M. Pauly. Sparse MRI: The Application of Compressed Sensing for Rapid MR Imaging. *Magnetic resonance in medicine*, 58(6):1182–1195, 2007.
- [73] M. Lustig, D. L. Donoho, J. M. Santos, and J. M. Pauly. Compressed Sensing MRI. *IEEE signal processing magazine*, 25(2):72–82, 2008.
- [74] Y. Ma, H. Wu, L. Wang, B. Huang, R. Ranjan, A. Zomaya, and W. Jie. Remote Sensing Big Data Computing: Challenges and Opportunities. *Future Generation Computer Systems*, 51:47–60, 2015.

- [75] M. Maggioni, V. Katkovnik, K. Egiazarian, and A. Foi. Nonlocal Transform-Domain Filter for Volumetric Data Denoising and Reconstruction. *IEEE transactions on image processing*, 22(1):119–133, 2013.
- [76] J. Mairal, M. Elad, and G. Sapiro. Sparse Representation for Color Image Restoration. *IEEE Transactions on image processing*, 17(1):53–69, 2008.
- [77] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing: The Sparse Way*. Academic press, 2008.
- [78] S. G. Mallat. A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 11(7):674–693, 1989.
- [79] R. Meier, H. Dittrich, A. Schulze-Bonhage, and A. Aertsen. Detecting Epileptic Seizures in Long-term Human EEG: A New Approach to Automatic Online and Real-Time Detection and Classification of Polymorphic Seizure Patterns. *Journal of Clinical Neurophysiology*, 25(3), 2008.
- [80] J. N. Mitchell. Computer Multiplication and Division Using Binary Logarithms. *IRE Transactions on Electronic Computers*, Aug. 1962.
- [81] J.-M. Muller. *Elementary functions : Algorithms and Implementation*. Birkhaeuser Boston, 2nd edition, 2006.
- [82] National Aeronautics and Space Administration (NASA). Mapping Pluto’s ‘Broken Heart’, PIA20037, 2015 (Accessed: 2017-11-21). <http://photojournal.jpl.nasa.gov/catalog/?IDNumber=PIA20037>.
- [83] D. Needell and J. A. Tropp. CoSaMP: Iterative Signal Recovery from Incomplete and Inaccurate Samples. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 26(3):301–321, 2009.
- [84] D. Needell and R. Vershynin. Signal Recovery From Incomplete and Inaccurate Measurements Via Regularized Orthogonal Matching Pursuit. *Selected Topics in Signal Processing, IEEE Journal of*, April 2010.
- [85] T. Parr. Enforcing Strict Model-view Separation in Template Engines. In *Proceedings of the 13th International Conference on World Wide Web*, New York, NY, USA, 2004.
- [86] P. Perona and J. Malik. Scale-Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 12(7):629–639, Jul 1990.
- [87] M. Prantl. Image Compression Overview. *arXiv preprint arXiv:1410.2259*, 2014.

- [88] I. Ram, I. Cohen, and M. Elad. Patch-Ordering-Based Wavelet Frame and Its Use in Inverse Problems. *IEEE Transactions on Image Processing*, 23(7):2779–2792, 2014.
- [89] I. Ram, M. Elad, and I. Cohen. Image Processing using Smooth Ordering of its Patches. *CoRR*, abs/1210.3832, 2012.
- [90] I. Ram, M. Elad, and I. Cohen. Redundant Wavelets on Graphs and High Dimensional Data Clouds. *IEEE Signal Processing Letters*, 19(5):291–294, 2012.
- [91] K. R. Rao and P. Yip. *Discrete Cosine Transform: Algorithms, Advantages, Applications*. Academic press, 2014.
- [92] T. Rault, A. Bouabdallah, Y. Challal, and F. Marin. A Survey of Energy-Efficient Context Recognition Systems Using Wearable Sensors for Healthcare Applications. *Pervasive and Mobile Computing*, 37:23 – 44, 2017.
- [93] P. Rayner and D. O’Brien. The Utility of Remotely Sensed CO<sub>2</sub> Concentration Data in Surface Source Inversions. *Geophysical research letters*, 28(1):175–178, 2001.
- [94] I. E. Richardson. *H. 264 and MPEG-4 Video Compression: Video Coding for Next-Generation Multimedia*. John Wiley & Sons, 2004.
- [95] A. Rosello. The Internet of Things, 3 Value Shifts Manufacturers Should Embrace, 2014. <http://blogs.ptc.com/>.
- [96] L. I. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi. Nonlinear Total Variation Based Noise Removal Algorithms. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 60(1-4):259–268, 1992.
- [97] J. Rust, F. Ludwig, and S. Paul. Low Complexity QR-Decomposition Architecture Using the Logarithmic Number System. In *Design, Automation and Test in Europe Conference and Exhibition (DATE)*, 2013.
- [98] SAS The Power to Know. Report for SAS: The Value of Big Data and the Internet of Things to the UK Economy, 2016. <https://www.sas.com>.
- [99] W. Sauer-Greff. *Vorlesungsskript Hochratige Datenübertragung der Technischen Universität Kaiserslautern - Lehrstuhl für Nachrichtentechnik*. 2009.
- [100] M. Schabel. 3D Shepp-Logan phantom, 2006.
- [101] S. Schmale, J. Hoeffmann, B. Knoop, G. Kreiselmeyer, H. Hamer, D. Peters-Drolshagen, and S. Paul. Exploiting Correlation in Neural Signals for Data Compression. In *Signal Processing Conference (EUSIPCO), 2014 Proceedings of the 22nd European*, pages 2080–2084, Sept 2014.

- [102] S. Schmale, H. Kesuma, H. Lange, J. Rust, B. Knoop, D. Peters-Drolshagen, and S. Paul. Hardware-Accelerated Reconstruction of Compressed Neural Signals Based on Inpainting. In *2016 MIXDES - 23rd International Conference Mixed Design of Integrated Circuits and Systems*, pages 399–404, June 2016.
- [103] S. Schmale, B. Knoop, J. Hoeffmann, D. Peters-Drolshagen, and S. Paul. Joint Compression of Neural Action Potentials and Local Field Potentials. In *Signals, Systems and Computers, 2013 Asilomar Conference on*, pages 1823–1827, Nov 2013.
- [104] S. Schmale, B. Knoop, D. Peters-Drolshagen, and S. Paul. Structure Reconstruction of Correlated Neural Signals Based on Inpainting for Brain Monitoring. In *Biomedical Circuits and Systems Conference (BioCAS), 2015 IEEE*, pages 1–4, Oct 2015.
- [105] S. Schmale, H. Lange, B. Knoop, D. Peters-Drolshagen, and S. Paul. Compression and Reconstruction Methodology for Neural Signals Based on Patch Ordering Inpainting for Brain Monitoring. In *2016 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pages 859–863, March 2016.
- [106] S. Schmale and S. Paul. Inpainting Makes Every Sample Count. In *Biomedical Circuits and Systems Conference (BioCAS), 2017 IEEE*, Oct 2017.
- [107] S. Schmale, J. Rust, N. Hülsmeyer, H. Lange, B. Knoop, and S. Paul. High Throughput Architecture for Inpainting-based Recovery of Correlated Neural Signals. In *2016 24th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, pages 1728–1732, Aug 2016.
- [108] S. Schmale, P. Seidel, H. Lange, B. Knoop, D. Peters-Drolshagen, and S. Paul. Efficient and Fast SOP-based Inpainting for Neurological Signals in Resource Limited Systems. In *2016 IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems (ICECS)*, pages 249–252, Dec 2016.
- [109] S. Schmale, P. Seidel, and S. Paul. Permuted Cubes Wavelet Thresholding for Mask-Sensed MRI. In *2017 22nd International Conference on Digital Signal Processing (DSP)*, pages 1–5, Aug 2017.
- [110] S. Schmale, P. Seidel, S. Thiermann, and S. Paul. Neurological Activity Monitoring Based on Video Inpainting. In *2017 39th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society (EMBC)*, pages 4297–4300, July 2017.
- [111] P. Shenoy, K. Miller, J. Ojemann, and R. Rao. Generalized Features for Electrocor-ticographic BCIs. *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, 55(1):273–280, Jan 2008.

- [112] M. J. Shensa. The Discrete Wavelet Transform: Wedding the a Trouns and Mallat Algorithms. *IEEE Transactions on signal processing*, 40(10):2464–2482, 1992.
- [113] T. Strutz. Bilddatenkompression. *Grundlagen, Codierung, Wavelets, JPEG, MPEG, H*, 264(3), 2005.
- [114] E. Süli and D. F. Mayers. *An Introduction to Numerical Analysis*. Cambridge university press, 2003.
- [115] R. Tibshirani. Regression Shrinkage and Selection Via the Lasso. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 58:267–288, 1994.
- [116] A. Tikhonov. Solution of Incorrectly Formulated Problems and the Regularization Method. *Soviet Meth. Dokl.*, 4:1035–1038, 1963.
- [117] J. Tropp and A. Gilbert. Signal Recovery From Random Measurements Via Orthogonal Matching Pursuit. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 53(12):4655–4666, Dec 2007.
- [118] G. Wallace. The JPEG Still Picture Compression Standard. *Consumer Electronics, IEEE Transactions on*, 38(1):xviii–xxxiv, Feb 1992.
- [119] R. Wang. *Introduction to Orthogonal Transforms: With Applications in Data Processing and Analysis*. Cambridge University Press, 2012.
- [120] Y.-W. Wen, M. K. Ng, and W.-K. Ching. Iterative Algorithms Based on Decoupling of Deblurring and Denoising for Image Restoration. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 30(5):2655–2674, 2008.
- [121] F. Woolfe, E. Liberty, V. Rokhlin, and M. Tygert. A Fast Randomized Algorithm for the Approximation of Matrices. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 25(3):335 – 366, 2008.
- [122] G. A. Wright. Signal Acquisition and Processing for Magnetic Resonance Imaging. In *Image Processing, 1994. Proceedings. ICIP-94., IEEE International Conference*, volume 3, pages 523–527. IEEE, 1994.