

**Fachbereich Wirtschaftswissenschaften**

Eignen sich agentenbasierte  
Simulationsmodelle zur Value-at-Risk  
Prognose an Finanzmärkten?

**Dissertation**

zur Erlangung der Doktorwürde  
durch den Promotionsausschuss Dr. rer. pol  
der Universität Bremen

vorgelegt von

**Tobias Tubbenhauer**

Ludwigsburg, den 28. März 2023

Datum des Kolloquiums: 25. März 2024

**Erstprüfer:** Prof. Dr. Thorsten Poddig

**Zweitprüfer:** Prof. Dr. Christian Fieberg



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Abstrakt . . . . .	1
1.2	Motivation . . . . .	2
1.3	Aufbau . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Agentenbasierte Modelle: Stand der Forschung</b>	<b>7</b>
2.1	Grundlagen . . . . .	7
2.2	Modellaufbau . . . . .	8
2.3	Eignung von einfachen Modellen zur Risikoprognose . . . . .	14
2.4	Kalibrierung von ABM . . . . .	17
2.5	Anwendungen von ABM . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Verwendete Agentenmodelle</b>	<b>23</b>
3.1	Modell von Franke und Westerhoff (2012, 2016) . . . . .	25
3.1.1	Basismodell . . . . .	25
3.1.2	Der Herdenansatz . . . . .	27
3.1.2.1	Modelldarstellung . . . . .	27
3.1.2.2	Zu erwartendes Systemverhalten . . . . .	35
3.1.3	Der Bias-Revisionsansatz . . . . .	37
3.1.3.1	Modelldarstellung . . . . .	37
3.1.3.2	Zu erwartendes Systemverhalten . . . . .	40
3.1.4	Der Gewinnansatz . . . . .	40
3.1.4.1	Modelldarstellung . . . . .	40
3.1.4.2	Zu erwartendes Systemverhalten . . . . .	49

3.1.5	Der Gewinn-Biasansatz . . . . .	51
3.1.5.1	Modelldarstellung . . . . .	51
3.1.5.2	Zu erwartendes Systemverhalten . . . . .	57
3.1.6	Der Gewinn-Herdenansatz . . . . .	58
3.1.6.1	Modelldarstellung . . . . .	58
3.1.6.2	Zu erwartendes Systemverhalten . . . . .	60
3.2	Das Modell von Brock und Hommes (1998) . . . . .	61
3.2.1	Modelldarstellung . . . . .	61
3.2.2	Zufallseinfluss . . . . .	70
3.2.3	Zu erwartendes Systemverhalten . . . . .	72
3.3	Das Modell von Lux et al. (2005) . . . . .	75
3.3.1	Modelldarstellung . . . . .	75
3.3.2	Zu erwartendes Systemverhalten . . . . .	91
3.4	Das Modell von Alfarano et al. (2008) . . . . .	93
3.4.1	Modelldarstellung . . . . .	93
3.4.2	Zu erwartendes Systemverhalten . . . . .	102
<b>4</b>	<b>Optimierungsmethoden</b>	<b>105</b>
4.1	Methode der simulierten Momente . . . . .	105
4.1.1	Wahl der Momente . . . . .	106
4.1.1.1	Volatilität . . . . .	106
4.1.1.2	Fat-Tails . . . . .	107
4.1.1.3	Unabhängigkeit der Rendite und Volatiliätsclustering	113
4.1.1.4	VaR bezogene Momente . . . . .	114
4.1.2	Überblick der verwendeten Momente . . . . .	116
4.1.3	Zielfunktion . . . . .	117
4.1.4	Bootstrapping . . . . .	119
4.1.4.1	Grundidee . . . . .	119
4.1.4.2	Moving Block Bootstrap . . . . .	119
4.2	Optimierung am aktuellen Zeitrand . . . . .	120
4.2.1	Maximum-Likelihood-Schätzung . . . . .	121

# INHALTSVERZEICHNIS

4.2.2	Sequenzielle-Monte-Carlo-Schätzung . . . . .	123
4.3	Optimierungsheuristiken . . . . .	127
4.3.1	Grundidee . . . . .	127
4.3.2	Partikelschwarm-Verfahren . . . . .	129
<b>5</b>	<b>Auswertungskriterien</b>	<b>135</b>
5.1	Modellkalibrierung . . . . .	135
5.2	Value-at-Risk Schätzung . . . . .	138
5.2.1	Standard Verfahren . . . . .	138
5.2.2	Erweiterte Verfahren . . . . .	142
<b>6</b>	<b>Benchmarkmodelle</b>	<b>143</b>
6.1	Grundidee . . . . .	143
6.2	GARCH-Modelle . . . . .	143
<b>7</b>	<b>Verwendete Daten und Simulationsaufbau</b>	<b>147</b>
7.1	Modellkalibrierung . . . . .	148
7.2	VaR-Schätzung . . . . .	151
<b>8</b>	<b>Auswertung MSM Kalibrierung</b>	<b>153</b>
8.1	Modell von Franke und Westerhoff (2016), der BHR- und BR-Ansatz	153
8.1.1	Endwert der Optimierung und Analyse der zugehörigen Parameter . . . . .	158
8.1.2	Güte der Abbildung der Momente . . . . .	162
8.1.3	Robustheit der MSM Schätzung . . . . .	163
8.1.4	Zusammenfassung der wichtigsten Optimierungsergebnisse . .	167
8.2	Modell von Franke und Westerhoff (2012), der Gewinnansatz . . . . .	167
8.2.1	Endwert der Optimierung und Analyse der zugehörigen Parameter . . . . .	170
8.2.2	Güte der Abbildung der Momente . . . . .	173
8.2.3	Zuverlässigkeit der MSM Schätzung . . . . .	174
8.2.4	Zusammenfassung der wichtigsten Optimierungsergebnisse . .	179

8.3	Modell von Brock und Hommes (1998) . . . . .	179
8.3.1	Endwert der Optimierung und Analyse der zugehörigen Parameter . . . . .	183
8.3.2	Güte der Abbildung der Momente . . . . .	185
8.3.3	Zuverlässigkeit der MSM Schätzung . . . . .	186
8.3.4	Zusammenfassung der wichtigsten Optimierungsergebnisse . .	189
8.4	Modell von Lux et al. (2005) . . . . .	190
8.4.1	Endwert der Optimierung und Analyse der zugehörigen Parameter . . . . .	194
8.4.2	Güte der Abbildung der Momente . . . . .	197
8.4.3	Zuverlässigkeit der MSM Schätzung . . . . .	198
8.4.4	Zusammenfassung der wichtigsten Optimierungsergebnisse . .	200
8.5	Modell von Alfarano et al. (2008) . . . . .	201
8.5.1	Endwert der Optimierung und Analyse der zugehörigen Parameter . . . . .	203
8.5.2	Güte der Abbildung der Momente . . . . .	205
8.5.3	Zuverlässigkeit der MSM Schätzung . . . . .	206
8.5.4	Zusammenfassung der wichtigsten Optimierungsergebnisse . .	208
8.6	Fazit . . . . .	208
<b>9</b>	<b>VaR-Prognose</b>	<b>209</b>
9.1	Modell von Franke und Westerhoff (2016), der BHR- und BR-Ansatz	210
9.2	Modell von Franke und Westerhoff (2012), der Gewinnansatz . . . . .	214
9.3	Modell von Brock und Hommes (1998) . . . . .	220
9.4	Modell von Lux et al. (2005) . . . . .	225
9.5	Modell von Alfarano et al. (2008) . . . . .	228
9.6	Ergebnisse der ABM VaR-Prognose . . . . .	231
9.7	Benchmarkvergleich . . . . .	232
9.8	Korrelation . . . . .	236
<b>10</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>241</b>

# Abbildungsverzeichnis

3.1	Abbildung des Phasenraum des Herdenmodells für die verschiedenen Systemausprägungen . . . . .	31
3.2	Abbildung der Nullkline des Herdenmodells für verschiedene Parameterkonstellationen von $\alpha_0$ , $\alpha_n$ und $\alpha_m$ . . . . .	33
3.3	Simulierte Rendite und Marktanteil des Herdenmodells für verschiedene Parameterkonstellationen von $\alpha_0$ , $\alpha_n$ und $\alpha_m$ . . . . .	34
3.4	Abbildung des Verlaufs der Nullkline des Bias-Reversions-Modells für verschiedene Parameterkonstellationen $\alpha_0$ und $\alpha_m$ . . . . .	38
3.5	Simulierte Rendite und Marktanteil des Bias-Reversions-Modells für verschiedene Parameterkonstellationen von $\alpha_0$ und $\alpha_m$ . . . . .	39
3.6	Feigenbaum-Diagramm des Gewinnmodells für den Fall 2 unter Variation des Parameters $\phi$ . . . . .	48
3.7	Feigenbaum-Diagramm des Gewinnmodells für den Fall 3 unter Variation des Parameters $\chi$ . . . . .	49
3.8	Vergleich der Renditen und Marktanteile des Gewinnansatzes für den Fall eines stabilen Fixpunktes . . . . .	51
3.9	Feigenbaum-Diagramm des Gewinn-Biasmodells für den Fall 2 unter Variation des Parameters $\phi$ . . . . .	55
3.10	Feigenbaum-Diagramm des Gewinn-Biasmodells für den Fall 3 unter Variation des Parameters $\chi$ . . . . .	56
3.11	Vergleich der Renditen und Marktanteile des Gewinn-Biasansatzes für den Fall eines stabilen Fixpunktes . . . . .	58
3.12	Vergleich der Renditen und Marktanteile des Gewinn-Herdenansatzes für den Fall eines stabilen Fixpunktes . . . . .	60

3.13	Feigenbaum-Diagramm des Modells von Brock und Hommes (1998) für den Fall 3 unter Variation des Parameters $c$ . . . . .	69
3.14	Vergleich der Renditen und Marktanteile des F-Modells für den Fall eines stabilen Fixpunktes . . . . .	73
3.15	Vergleich der Renditen und Marktanteile des T-Modells für den Fall eines stabilen Fixpunktes . . . . .	74
3.16	Vergleich der Renditen und Marktanteile des FT-Modells für den Fall eines stabilen Fixpunktes . . . . .	75
3.17	Vergleich der Marktanteilsverteilungen des Modells von Lux et al. (2005) für verschiedene Konstellationen der Parameter $\alpha_f$ und $\alpha_r$ . . .	85
3.18	Vergleich der Renditen und Marktanteile des Modells von Lux et al. (2005) für verschiedene Konstellationen der Parameter $\alpha_f$ und $\alpha_r$ . . .	86
3.19	Vergleich von Renditen bei verschiedenen Marktanteilsverläufen für das Modell von Lux et al. (2005) . . . . .	87
3.20	Vergleich der Standardabweichung der Änderung des Marktanteils des Modells von Lux et al. (2005) . . . . .	90
3.21	Vergleich der Renditen und Marktanteile des Modells von Lux et al. (2005) für verschiedene Konstellationen der Parameter $\alpha_{r,f}$ und $\delta$ . . .	91
3.22	Vergleich der Marktanteilsverteilungen des Modells von Alfarano et al. (2008) für verschiedene Konstellationen der Parameter $\lambda$ und $\delta$ . . . . .	98
3.23	Vergleich der Renditen und Marktstimmungen des Modells von Alfa- rano et al. (2008) für verschiedene Konstellationen der Parameter $\lambda$ und $\delta$ . . . . .	101
3.24	Vergleich der Renditen und Marktstimmungen des Modells von Alfa- rano et al. (2008) für kleinere Parameterwerte von $\lambda$ und $\delta$ . . . . .	102
3.25	Vergleich der Renditen und Marktstimmungen des Modells von Alfa- rano et al. (2008) für größere Parameterwerte von $\lambda$ und $\delta$ . . . . .	103
4.1	Grafische Darstellung der $l_{best}$ Topologie und $g_{best}$ Topologie . . . . .	131

## ABBILDUNGSVERZEICHNIS

7.1	Renditeverlauf des S&P 500 für den gesamten Datensatz vom 1. Januar 1950 bis 30. Juni 2020 . . . . .	148
7.2	Renditeverlauf des S&P 500 für die Modellkalibrierung . . . . .	149
7.3	Renditeverlauf des S&P 500 für den VaR-Prognosebereich . . . . .	152
8.1	Vergleich der empirischen und simulierten Rendite für das Herdenmodell . . . . .	155
8.2	Vergleich der empirischen und simulierten Rendite für das Bias-Reversionsmodell . . . . .	156
8.3	Lage der Nullklinen der verschiedenen Parameterkonstellationen für $\alpha_0, \alpha_n, \alpha_m$ im Marktanteil-Preis-Phasenraum für das Herdenmodell .	157
8.4	Lage der Nullkline im Marktanteil-Preis-Phasenraum für das Bias-Reversionsmodell . . . . .	158
8.5	MSM Zielfunktionsänderung des Herdenmodells. . . . .	164
8.6	MSM Zielfunktion des Bias-Reversionsmodells. . . . .	165
8.7	Vergleich der empirischen und simulierten Rendite des Gewinnmodells . . . . .	168
8.8	Vergleich der empirischen und simulierten Rendite des Gewinn-Biasmodells . . . . .	169
8.9	Vergleich der empirischen und simulierten Rendite des Gewinn-Herdenmodells . . . . .	170
8.10	MSM Zielfunktionsänderung des Gewinnmodells. . . . .	175
8.11	MSM Zielfunktion des Gewinn-Biasmodells. . . . .	176
8.12	MSM Zielfunktion des Gewinn-Herdenmodells. . . . .	177
8.13	Vergleich der empirischen und simulierten Rendite des Fraktionsmodells . . . . .	180
8.14	Vergleich der empirischen und simulierten Rendite des Turnovermodells . . . . .	181
8.15	Vergleich der empirischen und simulierten Rendite des Kombinationsmodells . . . . .	182
8.16	MSM Zielfunktionsänderung des Fraktionsmodells. . . . .	186

8.17	MSM Zielfunktion des Kombinationsmodells. . . . .	187
8.18	Vergleich der empirischen und simulierten Renditen für das Modell von Lux et al. (2005) mit binärer und gleichverteilter Zufallsgröße . .	191
8.19	Vergleich der empirischen und simulierten Renditen für das Modell von Lux et al. (2005) mit normalverteilter und t-verteilter Zufallsgröße . . . . .	192
8.20	Vergleich der Verteilungsfunktion des Marktanteils für das Modell von Lux et al. (2005) . . . . .	193
8.21	Vergleich der simulierten Preise des Modells von Lux et al. (2005) . .	194
8.22	MSM Zielfunktion des Modells von Lux et al. (2005) . . . . .	199
8.23	Vergleich der empirischen und simulierten Rendite für das von Modell Alfarano et al. (2008) . . . . .	202
8.24	Verteilungsfunktion der Marktstimmung für das Modell von Alfarano et al. (2008) . . . . .	203
8.25	MSM Zielfunktion des Modells von Alfarano et al. (2008) . . . . .	206
9.1	Vergleich der VaR-Prognosen der besten ABM Varianten . . . . .	233
9.2	Vergleich der VaR-Prognosen der Benchmarkmodelle . . . . .	233

# Tabellenverzeichnis

2.1	Von den Modellklassen abgebildete Stylized Facts. . . . .	15
4.1	Auflistung der verwendeten Momente und zugehöriger Stylized-Facts. . . . .	116
7.1	Auflistung der zur Modellkalibrierung verwendeten Momente. . . . .	150
8.1	Obere und untere Parametergrenzen des Herden- und Bias-Reversionsmodells . . . . .	154
8.2	Stationaritäts- und Ergodizitätstests für das Herden- und Bias-Reversionsmodell . . . . .	159
8.3	Deskriptive Statistiken der Zielfunktionswerte des Herden- und Bias-Reversionsmodells . . . . .	160
8.4	Deskriptive Statistiken der Parameter des Herden- und Bias-Reversionsmodells . . . . .	160
8.5	Güte der Momentabbildung für das Herden- und Bias-Reversionsmodell . . . . .	162
8.6	Vergleich der wahren und optimierten Parameter für das Herden- und Bias-Reversionsmodell . . . . .	166
8.7	Vergleich der wahren und optimierten Parameter für das Herden- und Bias-Reversionsmodell im Fall $\sigma_f > \sigma_c$ . . . . .	166
8.8	Obere und untere Parametergrenzen der Gewinnmodelle von Franke und Westerhoff (2012) . . . . .	168
8.9	Stationaritäts- und Ergodizitätstests für die Gewinnmodelle von Franke und Westerhoff (2012) . . . . .	171

8.10	Deskriptive Statistiken der Zielfunktionswerte der Gewinnmodelle von Franke und Westerhoff (2012) . . . . .	172
8.11	Deskriptive Statistiken der Parameter der Gewinnmodelle von Franke und Westerhoff (2012) . . . . .	172
8.12	Güte der Momentabbildung für die Gewinnmodelle von Franke und Westerhoff (2012) . . . . .	174
8.13	Vergleich der wahren und optimierten Parameter für die Gewinnmodelle von Franke und Westerhoff (2012) . . . . .	178
8.14	Vergleich der wahren und optimierten Parameter für die Gewinnmodelle von Franke und Westerhoff (2012) im Fall $\sigma_f > \sigma_c$ . . . . .	178
8.15	Obere und untere Parametergrenzen der Modelle von Brock und Hommes (1998) . . . . .	179
8.16	Stationaritäts- und Ergodizitätstests für die Modelle von Brock und Hommes (1998) . . . . .	183
8.17	Deskriptive Statistiken der Zielfunktionswerte der Modelle von Brock und Hommes (1998) . . . . .	184
8.18	Deskriptive Statistiken der Parameter der Modelle von Brock und Hommes (1998) . . . . .	184
8.19	Güte der Momentabbildung für die der Modelle von Brock und Hommes (1998) . . . . .	185
8.20	Vergleich der wahren und optimierten Parameter für das Fraktions- und Kombinationsmodell . . . . .	188
8.21	Vergleich der wahren und optimierten Parameter für das Fraktions- und Kombinationsmodell im Fall $\sigma_f > \sigma_c$ . . . . .	188
8.22	Obere und untere Parametergrenzen des Modells von Lux et al. (2005)	190
8.23	Stationaritäts- und Ergodizitätstests für das Modell von Lux et al. (2005) . . . . .	195
8.24	Deskriptive Statistiken der Zielfunktionswerte des Modells von Lux et al. (2005) . . . . .	196
8.25	Deskriptive Statistiken der Parameter des Modells von Lux et al. (2005) . . . . .	197

## TABELLENVERZEICHNIS

8.26	Güte der Momentabbildung für das Modell von Lux et al. (2005) . . .	197
8.27	Vergleich der wahren und optimierten Parameter für das Modell von Lux et al. (2005) . . . . .	200
8.28	Obere und untere Parametergrenzen des Modells von Alfarano et al. (2008) . . . . .	201
8.29	Stationaritäts- und Ergodizitätstests für das Modell von Alfarano et al. (2008) . . . . .	204
8.30	Deskriptive Statistiken der Zielfunktionswerte des Modells von Alfa- rano et al. (2008) . . . . .	204
8.31	Deskriptive Statistiken der Parameter des Modells von Alfarano et al. (2008) . . . . .	205
8.32	Güte der Momentabbildung für das Modell von Alfarano et al. (2008) . . . . .	205
8.33	Vergleich der wahren und optimierten Parameter für das Modell von Alfarano et al. (2008) . . . . .	207
9.1	Parameterschätzung im zweistufigen Ansatz für das Herden- und Bias- Reversionsmodell . . . . .	211
9.2	Deskriptive Statistiken der ML-Endwerte des Herden- und Bias- Reversionsmodells . . . . .	211
9.3	Christoffersen (1998)-Tests der VaR-Prognosen des Herden- und Bias- Reversionsmodells im Expansionszeitraum . . . . .	212
9.4	Christoffersen (1998)-Tests der VaR-Prognosen des Herden- und Bias- Reversionsmodells im Rezessionszeitraum . . . . .	213
9.5	Christoffersen (1998)-Tests der VaR-Prognosen des Herden- und Bias- Reversionsmodells im gesamten Prognosezeitraum . . . . .	214
9.6	Parameterschätzung im zweistufigen Ansatz für die Gewinnmodelle .	215
9.7	Deskriptive Statistiken der ML-Endwerte für die Gewinnmodelle . . .	216
9.8	Christoffersen (1998)-Tests der VaR-Prognosen der Gewinnmodelle im Expansionszeitraum . . . . .	217

9.9	Christoffersen (1998)-Tests der VaR-Prognosen der Gewinnmodelle im Rezessionszeitraum . . . . .	218
9.10	Christoffersen (1998)-Tests der VaR-Prognosen der Gewinnmodelle im gesamten Prognosezeitraum . . . . .	219
9.11	Parameterschätzung im zweistufigen Ansatzes für das Modell von Brock und Hommes (1998) . . . . .	220
9.12	Deskriptive Statistiken der ML-Endwerte für das Modell von Brock und Hommes (1998) . . . . .	221
9.13	Ergebnisse des Christoffersen (1998)-Tests für die VaR-Prognosen des Modells von Brock und Hommes (1998) im Expansionszeitraum . . . . .	222
9.14	Ergebnisse des Christoffersen (1998)-Tests für die VaR-Prognosen des Modells von Brock und Hommes (1998) im Rezessionszeitraum . . . . .	223
9.15	Ergebnisse des Christoffersen (1998)-Tests für die VaR-Prognosen des Modells von Brock und Hommes (1998) im gesamten Prognosezeitraum . . . . .	224
9.16	Parameterschätzung im zweistufigen Ansatzes für das Modell von Lux et al. (2005) . . . . .	226
9.17	Deskriptive Statistiken der ML-Endwerte für das Modell von Lux et al. (2005) . . . . .	226
9.18	Christoffersen (1998)-Tests der VaR-Prognosen des Modells von Lux et al. (2005) im Expansionszeitraum . . . . .	227
9.19	Christoffersen (1998)-Tests der VaR-Prognosen des Modells von Lux et al. (2005) im Rezessionszeitraum . . . . .	227
9.20	Christoffersen (1998)-Tests der VaR-Prognosen des Modells von Lux et al. (2005) im gesamten Prognosezeitraum . . . . .	228
9.21	Parameterschätzung im zweistufigen Ansatzes für die Modelle von Alfarano et al. (2008) . . . . .	229
9.22	Deskriptive Statistiken der ML-Endwerte für das Modell von Alfarano et al. (2008) . . . . .	229
9.23	Christoffersen (1998)-Tests der VaR-Prognosen des Modells von Alfarano et al. (2008) im Expansionszeitraum . . . . .	230

*TABELLENVERZEICHNIS*

9.24	Christoffersen (1998)-Tests der VaR-Prognosen des Modells von Alfarano et al. (2008) im Rezessionszeitraum . . . . .	230
9.25	Christoffersen (1998)-Tests der VaR-Prognosen des Modells von Alfarano et al. (2008) im gesamten Prognosezeitraum . . . . .	231
9.26	Vergleich der VaR-Prognosen der besten ABM mit den Benchmarkmodellen im Expansionszeitraum . . . . .	234
9.27	Vergleich der VaR-Prognosen der besten ABM mit den Benchmarkmodellen im Rezessionszeitraum . . . . .	235
9.28	Vergleich der VaR-Prognosen der besten ABM mit den Benchmarkmodellen im gesamten Prognosezeitraum . . . . .	235
9.29	Korrelationen zwischen den VaR-Werten und den Systemparametern der ABM mit der besten VaR-Performance . . . . .	237

*TABELLENVERZEICHNIS*

# Abkürzungsverzeichnis

**ABM** Agentenbasiertes Modell.

**BCBS** Basler Ausschuss für Bankenaufsicht.

**BHR-Modell** Bias-Herding-Reversions-Modell.

**BR-Modell** Bias-Reversions-Modell.

**CVaR** Conditional-Value-at-Risk.

**Ergo** Ergodizität.

**F-Modell** Fraktions-Modell.

**FT-Modell** Fraktions-Turnover-Modell.

**GB-Modell** Gewinn-Bias-Modell.

**GH-Modell** Gewinn-Herding-Modell.

**G-Modell** Gewinn-Modell.

**MD** Median.

**MKQ** Methode der kleinsten Quadrate.

**ML** Maximum-Likelihood.

**MSM** Methode der simulierten Momente.

**MW** Mittelwert.

**NBER** National Bureau of Economic Research.

**POF** Proportion of Failures.

**SD** Standardabweichung.

**SMC-Schätzung** Sequenzielle Monte-Carlo-Schätzung.

**Stat** Stationarität.

**T-Modell** Turnover-Modell.

**VaR** Value-at-Risk.

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Abstrakt

In dieser Thesis wird die Vorhersagekraft von Value-at-Risk-Prognosen (VaR-Prognosen) analysiert, welche von agentenbasierten Modellen (ABM) erstellt werden. Konkret werden Varianten der von Brock und Hommes (1998), Lux et al. (2005), Alfarano et al. (2008) und Franke und Westerhoff (2012, 2016) entwickelten ABM ausgewählt und anhand der Preis- und Renditereihen des S&P 500 mit Hilfe eines zweistufigen Schätzverfahrens kalibriert. Um eine allgemeine Approximation der Modellparameter zu erhalten, wird die erste Kalibrierung mit der Methode der simulierten Momente (MSM) durchgeführt. Für eine Abschätzung der ABM am aktuellen Zeitrand, wird anschließend eine Rolling-Window Maximum-Likelihood-Kalibrierung (ML-Kalibrierung) sowie eine Rolling-Window sequenzielle Monte-Carlo-Schätzung (SMC-Schätzung) angewandt. Die VaR-Prognosen werden dann durch eine weitere zeitliche Iteration der Modelle generiert. Die Ergebnisse zeigen, dass ABM nicht nur für VaR-Prognosen geeignet, sondern auch in der Lage sind, die Prognosegüte gängiger Benchmarkmodelle zu übertreffen. Insbesondere kann festgestellt werden, dass ABM in hochvolatilen Rezessionsphasen besser abschneiden als die in der Praxis dafür verwendeten GARCH-Modelle, wodurch ABM die beste Wahl für VaR-Prognosen in Zeiten mit hohem Verlustrisiko sind.

## 1.2 Motivation

Seit der Einführung des künstlichen Aktienmarktes von Arthur et al. (1997) sowie des einfachen und analytisch nachvollziehbaren Modells von Brock und Hommes (1998) ist die agentenbasierte Modellierung zu einem immer beliebteren Konzept in der Finanzwirtschaft geworden. Aufgrund des Erfolgs, den diese beiden Modelle bei der Erklärung einiger stylized Facts der Finanzmärkte erzielten, sind in den folgenden Jahren viele weitere ABM <sup>1</sup> publiziert worden.

Trotz dieses Erfolges gibt es im Bereich der Finanzwirtschaft bisher nur wenige empirische Anwendungen von ABM. Außerdem sind diese ersten Anwendungen von ABM meist darauf ausgelegt, allgemeine Beobachtungen und spezifische Ereignisse in Finanzzeitreihen zu erklären. Beispielsweise besteht das Ziel der ABM Anwendung in Boswijk et al. (2007) darin, zu bestimmen, welche der Agentenstrategien bestimmte Zeiträume des S&P 500 dominieren. Anwendungen im Bereich einer prädiktiven Output-Validierung werden nur von Recchioni et al. (2015), Ghonghadze und Lux (2016), Ji et al. (2019) und Tubbenhauer et al. (2021) durchgeführt. Recchioni et al. (2015) verwenden dabei das Modell von Brock und Hommes (1998), um Preis- und Richtungsprognosen zu erstellen, während Ghonghadze und Lux (2016), Ji et al. (2019) und Tubbenhauer et al. (2021) ABM zur Erstellung von Risikoprognosen verwenden.

Die geringe Anzahl empirischer Anwendungen ist auf das Fehlen eines strengen Kalibrierungsverfahrens zur Validierung von ABM zurückzuführen<sup>2</sup>. Der in dieser Arbeit verfolgte Ansatz kann leicht an andere ABM oder andere Anwendungen angepasst werden und wird anhand der bekannten ABM von Brock und Hommes (1998), Franke und Westerhoff (2012, 2016), Lux et al. (2005) und Alfarano et al. (2008) sowie einer VaR-Prognoseanwendung demonstriert. Es ist anzunehmen, dass ABM von Natur aus gut für Risikoprognosen geeignet sind, da sie in der Lage sind, spezifische

---

<sup>1</sup>Siehe z.B. Lux und Marchesi (1999, 2000); Cont und Bouchaud (2000); Raberto et al. (2001); Kirman und Gilles (2002); Iori (2002); Kirman und Gilles (2002); Raberto et al. (2003); Diks und van der Weide (2005); Lux et al. (2005); Alfarano et al. (2008); Gaunersdorfer et al. (2008); Chiarella et al. (2009); Tedeschi et al. (2012); Franke und Westerhoff (2012, 2016); Schmitt und Westerhoff (2017); Ji et al. (2019).

<sup>2</sup>Siehe Recchioni et al. (2015)

## 1.2. MOTIVATION

stylized Facts der Finanzmärkte wie Fat-Tails und Volatilitätscluster zu erklären. Im Bereich der Risikoprognose sind hierbei besonders VaR-Prognosen interessant, da sie ein wichtiger Indikator für die Messung des Verlustrisikos im Finanzrisikomanagement sind, seit der Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (BCBS) 1996 festgelegt hat, dass Finanzinstitute das Marktrisiko durch Eigenkapital abdecken müssen. Ein weiterer Grund, warum ABM im Allgemeinen gut für empirische Anwendungen wie die VaR-Prognose geeignet sind, ist ihre Fähigkeit, makrostrukturelle Beobachtungen wie Preise oder Renditen durch das mikrostrukturelle Verhalten interagierender Akteure zu erklären. Durch den Einsatz eines ABM können daher einzigartige Erkenntnisse über verhaltensbezogene Erklärungen hinter Volatilitätsmustern gewonnen werden, welche mit standardmäßigen ökonomischen Techniken nicht abzuleiten sind. Dies eröffnet die Möglichkeit, diese zusätzlichen Verhaltensinformationen zur Verbesserung von Risikovorhersagen zu nutzen, indem z.B. ein Frühwarnsystem für plötzliche Veränderungen der Marktvolatilität geschaffen wird.

Wie bereits angedeutet, wurden ABM aufgrund fehlender Schätzverfahren lange Zeit nicht an empirischen Daten kalibriert. Stattdessen wurden zur Abbildung der gewünschten stylized Facts die Systemparameter manuell durch Versuch und Irrtum ausgewählt<sup>3</sup>. Das Fehlen von Kalibrierungstechniken ist darauf zurückzuführen, dass ABM in der Regel eine Vielzahl von Parametern haben und mit ökonomischen Standardtechniken keine geschlossene Lösung gefunden werden kann. Für die sogenannten einfachen Modelle konnte das Kalibrierungsproblem in den letzten zwei Jahrzehnten einigermaßen gelöst werden, aber bis heute gibt es keine Methode, um die komplexeren Modelle zuverlässig zu kalibrieren.<sup>4</sup> Die Methode der simulierten Momente (MSM) wurde von Gilli und Winker (2003) eingeführt und später von Winker et al. (2007), Franke (2009) und Grazzini und Richiardi (2015) verfeinert. Es handelt sich um eine Abwandlung der Methode der Momente, aber anstatt ana-

---

<sup>3</sup>Dies gilt für die meisten der zuvor zitierten Modelle, siehe z.B. Arthur et al. (1997); Brock und Hommes (1998); Lux und Marchesi (1999, 2000); Cont und Bouchaud (2000); Raberto et al. (2001, 2003); Iori (2002); Kirman und Gilles (2002); Diks und van der Weide (2005); Gaunersdorfer et al. (2008); Chiarella et al. (2009); Tedeschi et al. (2012).

<sup>4</sup>Eine Definition, was ein einfaches oder komplexes Modell ist, findet sich in Chen et al. (2012). Für eine ausführlichere Erklärung der Struktur einfacher Modelle siehe Hommes (2006) und für die Struktur komplexer Modelle siehe LeBaron (2006).

lytische Ausdrücke abzuleiten, werden die Momente aus den simulierten Zeitreihen der ABM berechnet. Die Auswahl der Momente ist in gewissem Maße subjektiv, da es dem Forscher obliegt zu entscheiden, welche Momente in den Kalibrierungsprozess einbezogen werden sollen. Für eine Anwendung von ABM ist diese Subjektivität jedoch ein großer Vorteil, denn sie ermöglicht die Kalibrierung der ABM an die zu untersuchende Anwendung. Zwar wurden in letzter Zeit mehrere alternative Kalibrierungsmethoden entwickelt, wobei die bemerkenswertesten die auf dem Informationskriterium basierenden Methoden von Barde (2016, 2017) und Lamperti (2017) sowie die auf der Wahrscheinlichkeitsrechnung basierenden Methoden von Kukacka und Barunik (2017), Grazzini et al. (2017) und Lux (2018) sind, jedoch ist das MSM nach wie vor das Standardverfahren für die Kalibrierung von ABM<sup>5</sup>, da es einfach zu implementieren ist und nachweislich zuverlässige und genaue Schätzergebnisse liefert. Die MSM Kalibrierung liefert eine allgemeine Schätzung der Modellparameter, aber für die Durchführung von Zeitreihenprognosen ist es entscheidend, den Zustand der ABM am aktuellen Zeitrant zu bestimmen. Um dies zu erreichen, wird in einem zweiten Kalibrierungsschritt eine ML- sowie eine SMC-Schätzung nach Lux (2018) durchgeführt. Dieser Ansatz hat zwei Vorteile. Erstens ermöglichen die ML- und SCM-Kalibrierung die Schätzung von Parametern, die von aktuellen empirischen Beobachtungen abhängen, was die Anwendbarkeit der Methode erheblich erweitert. Zweitens ist für die Durchführung der ML- und SCM-Schätzung kein großer Datensatz erforderlich, was eine erneute Schätzung der Parameter mit viel aktuelleren Datenpunkten ermöglicht. Insgesamt ist dieser zweistufige Schätzansatz recht flexibel und kann daher auch für ABM Anwendungen verwendet werden, die über die in dieser Thesis demonstrierte VaR-Prognose hinausgehen.

---

<sup>5</sup>Für neuere Anwendungen der MSM siehe beispielsweise Franke und Westerhoff (2012, 2016); Jang (2015); Jang und Sacht (2016); Schmitt und Westerhoff (2017); Chen und Lux (2018); Ji et al. (2019); Tubbenhauer et al. (2021).

## 1.3 Aufbau

Für die empirische Analyse werden die Preise und Renditen des S&P 500 vom 01.01.1950 bis zum 30.06.2020 verwendet und die Kalibrierung in zwei Teile aufgeteilt. Im ersten Teil, der die Preise und Renditen vom 01.01.1950 bis zum 31.12.2006 umfasst, werden die allgemeinen Systemparameter der ABM unter Verwendung des MSM geschätzt. Danach wird ein rollierendes Fenster auf die verbleibenden Zeitreihe vom 01.01.2007 bis zum 30.06.2022 angewendet. Um den Zustand der ABM am aktuellen Zeitrant zu ermitteln, werden hier die Parameter mit einer ML- und SMC-Schätzung rekaliert. Für eine genauere Analyse der VaR-Prognosen wird darüber hinaus die aus der Stichprobe herausgenommenen Preis- und Renditereihen in einen Expansions- und einen Rezessionszeitraum unterteilt. Um die Güte der VaR-Prognosen zu quantifizieren, werden die Tests von Christoffersen (1998) verwendet. Zur Untersuchung von Verhaltensmuster wird anschließend die Korrelation zwischen den Parameterwerten und den VaR-Prognosen analysiert.

Der Rest der Thesis ist wie folgt aufgebaut. In Kapitel 2 wird der Stand der Forschung im Bereich der ABM vorgestellt und beschrieben. Kapitel 3 stellt die verwendeten ABM im Detail vor. In Kapitel 4 werden die angewandten Kalibrierungstechniken MSM, ML und SMC erörtert, die zur Anpassung der ABM an empirische Daten verwendet werden sowie die verwendete Optimierungsheuristik vorgestellt. In Kapitel 5 werden die verwendeten Auswertungsmethoden eingeführt. Kapitel 6 stellt die Benchmarkmodelle genauer vor. Kapitel 7 beschreibt die S&P 500-Daten und den Simulationsaufbau. In Kapitel 8 werden die Ergebnisse der MSM Kalibrierung präsentiert. Kapitel 9 präsentiert die Ergebnisse der VaR-Prognosen und untersucht das Verhalten der Agenten. Kapitel 10 schließt mit einem Fazit.



# Kapitel 2

## Agentenbasierte Modelle: Stand der Forschung

### 2.1 Grundlagen

ABM werden in der Finanzwirtschaft seit etwa drei Dekaden verwendet, wobei die Forschung in diesem Bereich vor allem in den letzten beiden Dekaden, bedingt durch erste Erfolge bei der Erklärung der Stylized Facts und der Kalibrierung von ABM, an Momentum gewonnen hat. Der Ansatz der agentenbasierten Simulation stellt einen Gegenentwurf zum traditionellen Top-down Ansatz dar, bei dem die Mikrostruktur durch einen repräsentativen Agenten dargestellt wird. Stattdessen beruhen ABM auf einem Bottom-up Ansatz, der versucht, die Mikrostruktur durch einzelne Agenten abzubilden. Grundlage von ABM ist außerdem das von Simon (1957, 1959) eingeführte Prinzip der begrenzten Rationalität. Nach Simon sind Individuen sowohl in ihrer Fähigkeit limitiert, Informationen zu beschaffen, als auch diese optimal auszuwerten<sup>1</sup>. Ein weiterer Punkt, der ABM von den klassischen Methoden unterscheidet, ist die Heterogenität der Agenten. Da die Agenten unterschiedliche Strategien zur Entwicklung ihrer zukünftigen Preiserwartungen verwenden, kommt es zu einer

---

<sup>1</sup>Diese These wird durch Experimente von Tversky und Kahneman (1973) und Tversky und Kahneman (1974) unterstützt.

ständigen Uneinigkeit bezüglich des Wertes der gehandelten Anlagen. Die Heterogenität der Agenten sorgt also für eine ständige Uneinigkeit am Markt und führt somit zu einem kontinuierlichen Handel. Die Grundlagen von ABM sind also einzelne Agenten, die nur begrenzt rational handeln, unterschiedliche Strategien verfolgen und heterogene Erwartungen über die Preisentwicklung der Anlagen entwickeln.

## 2.2 Modellaufbau

Die meisten ABM lassen sich, in Abhängigkeit ihrer Struktur, grob in zwei verschiedene Kategorien einordnen. Diese Kategorien werden durch die Komplexität der ABM festgelegt. Die Komplexität lässt sich dabei nach Chen et al. (2012) in die Teilbereiche Heterogenität, Lernen und Interaktion unterteilen<sup>2</sup>. In die erste Kategorie, die sogenannten einfachen ABM, fallen Modelle, welche in allen drei Teilbereichen einfache Ansätze verwenden. Die zweite Kategorie bilden die komplexen ABM, welche, wie der Name bereits beinhaltet, für mindestens einen der Teilbereiche Heterogenität, Lernen und Interaktion komplexe Ansätze verwenden. Im Weiteren wird eine Zusammenfassung der Modelle dieser beiden Kategorien gegeben, sich aber auf eine genaue Erläuterung der im Dissertationsvorhabens benutzten Modelle beschränkt. Die einfachen ABM zeichnen sich dadurch aus, dass möglichst wenig Details modelliert werden und mit analytischen oder statistischen Methoden zumindest teilweise eine Auswertung des Modellverhaltens möglich ist<sup>3</sup>. Eine Zusammenfassung dieser Modellkategorie und deren Funktionsweisen sowie einen Überblick über verschiedene Modelle wird bei Hommes (2006) gegeben. Nach Hommes (2006) und Chen et al. (2012) lassen sich die meisten dieser Modelle dabei weiter nach Anzahl der Strategien, Lernverhalten und Agenteninteraktion sowie Marktaufbau und verwendete Stra-

---

<sup>2</sup>Dies ist natürlich nicht die einzige Möglichkeit ABM zu kategorisieren, worauf auch in Chen et al. (2012) hingewiesen und auf Arbeiten von (Hommes (2006), LeBaron (2006) und Samanidou et al. (2007) verwiesen wird.

<sup>3</sup>Dies ist nach Hommes (2006) auch ein Unterscheidungskriterium zwischen einfachen und komplexen ABM. Im Gegensatz zu den einfachen Modellen lassen sich bei komplexen Modellen so gut wie keine Aussagen über das Modellverhalten durch die Anwendung von analytischen oder statistischen Methoden ziehen.

## 2.2. MODELBAU

tegien kategorisieren. Dabei sind die Anzahl der Strategien, das Lernverhalten und die Agenteninteraktion die spezifischen Ausprägungen der Heterogenität, des Lernens und der Interaktion, während Marktaufbau und verwendete Strategien als zusätzliche Unterscheidungskriterien noch hinzukommen. Die Anzahl der Strategien bestimmt die Ausprägung der Heterogenität der ABM. Nach Chen et al. (2012) kann hierbei zwischen zwei/drei Strategien und N-Strategien Modellen unterschieden werden. Bei einem zwei/drei Strategien Modell können die Agenten, wie der Name es schon impliziert, nur zwei bis drei unterschiedliche Strategien verfolgen. Dieser Ansatz wird vom Großteil der einfachen ABM verfolgt<sup>4</sup>. N-Strategien Modelle stellen eine Erweiterung bzw. Verallgemeinerung der zwei/drei Strategien Modelle dar und können ihrerseits wiederum in zwei verschiedene Kategorien unterteilt werden. In die erste Kategorie fallen Modelle mit  $N \in \mathbb{N}$  endlichen unterschiedlichen<sup>5</sup> Strategien<sup>6</sup>. Die zweite Kategorie ist schlicht eine Verallgemeinerung des N-Strategie Modellansatzes auf unendlich viele mögliche Strategien<sup>7</sup>. Das Lernverhalten beschreibt die Fähigkeit der Agenten zwischen den Strategien zu wechseln. Bei einfachen ABM findet der Wechsel nur zwischen vorher festgelegten Strategien statt, wobei zwischen allen Strategien ein Wechsel möglich sein kann<sup>8</sup>, nur zwischen einem Teil der Strategien gewechselt wird<sup>9</sup> oder überhaupt kein Wechsel stattfindet<sup>10</sup>. Zum eigentlichen Strategiewechsel werden nur einfache Gleichungen verwendet, wobei der Gibbs-Übergang aufgrund seiner

---

<sup>4</sup>Von den in Chen et al. (2012) präsentierten einfachen Modellen sind fallen etwa zwei Drittel in diese Kategorie. Häufig zitierte zwei/drei Strategien Modelle sind Kirman (1993), Brock und Hommes (1998), Lux und Marchesi (1999), Lux und Marchesi (2000), Kirman und Gilles (2002), Gilli und Winker (2003), Lux et al. (2005), Alfarano et al. (2008), Franke und Westerhoff (2012), Franke und Westerhoff (2016)

<sup>5</sup>Wobei diese Unterschiede z.B. aus verschiedenen Parametern oder Lag-Ordnungen bei ansonsten ähnlichen Strategien entstehen können. Dieser einfache Ansatz für mehr Heterogenität, wird bereits bei Brock und Hommes (1998) vorgeschlagen, vollkommen unterschiedliche Strategieansätze sind allerdings ebenso möglich.

<sup>6</sup>Bekannt Modelle dieser Kategorie sind Cont und Bouchaud (2000) und Iori (2002).

<sup>7</sup>Dieser Ansatz wird in der Literatur eher selten verwendet, ein Beispiel dafür findet sich bei Diks und van der Weide (2005).

<sup>8</sup>Dies ist der am häufigsten verfolgte Ansatz. Beispiele hierfür sind Brock und Hommes (1998), Lux und Marchesi (1999), Lux und Marchesi (2000), Alfarano et al. (2008), Franke und Westerhoff (2012), Franke und Westerhoff (2016).

<sup>9</sup>Siehe z.B. das Modell von Lux et al. (2005).

<sup>10</sup>Siehe z.B. das Modell von Manzan und Westerhoff (2007).

Flexibilität am häufigsten Verwendung findet<sup>11</sup>. Neben dem Gibbs-Übergang sind auch noch Markov-Übergangswahrscheinlichkeiten verbreitet<sup>12</sup>. Außerdem existieren ebenfalls dem jeweiligen Modell individuell angepasste Strategiewechselansätze. Beispiele dafür sind die Modelle von Lux und Marchesi (1999, 2000), bei denen ein Markov-Übergang mit einer Übergangswahrscheinlichkeitsfunktion kombiniert wird, die Modelle von Cont und Bouchaud (2000) und Iori (2002), die einen Ising-Ansatz verwenden und die Modelle von Lux et al. (2005) und Alfarano et al. (2008), bei denen die Markovübergangswahrscheinlichkeiten in eine Übergangsgleichung transformiert werden. Durch Interaktion wird die Wechselwirkung der Agenten untereinander modelliert. Direkte Agenteninteraktion ist bei den einfachen Modellen aber nur selten vorzufinden, die Auswirkungen der Interaktion wird stattdessen meist in Übergangsfunktionen oder Übergangswahrscheinlichkeiten ausgedrückt. Sollte direkte Interaktion vorkommen, wird das meist über Zufallstreffen<sup>13</sup> oder ein einfaches Nachbarschaftsgitter<sup>14</sup> realisiert. Allerdings gibt es auch Ansätze, wo sophisticatedere Interaktionsnetzwerke verwendet werden<sup>15</sup>, wobei diese Ansätze bereits einen Übergang zu den komplexen Modellen bilden und ebenso als solche kategorisiert werden können. Der Marktaufbau ist der Teil des Modells, welcher für die Preisbestimmung verantwortlich ist. Die Herangehensweise dabei ist, die komplexe Preisbestimmung realer Finanzmärkte möglichst einfach zu abstrahieren und in einer Systemgleichung zusammenzufassen. Dabei gibt es verschiedene generelle Ansätze, durch die der Preis in ABM bestimmt werden kann. Die erste Möglichkeit ist ein Market-Maker, welcher die Preise je nach Überhang auf der Nachfrage- bzw. Angebotsseite adjustiert. Liegt ein Angebotsüberschuss vor, so wird der Preis gesenkt, während bei einem Nachfrageüberschuss der Preis erhöht wird. Die ersten Modelle, welche diese Art der Preisfindung verwenden, sind die Modelle von Beja und Goldman (1980)

---

<sup>11</sup>Dieser Ansatz zum Strategiewechsel wird bei Brock und Hommes (1998) vorgeschlagen und erlaubt durch seine Flexibilität eine einfache Erweiterung auf N-Strategien Modelle.

<sup>12</sup>Diese werden dann verwendet, wenn das Modell auf einer Markov-Kette aufbaut, dies ist z.B. beim Modell von Kirman (1993) und Kirman und Gilles (2002) der Fall.

<sup>13</sup>Beispiele hierfür sind die Modelle von Kirman (1993); Kirman und Gilles (2002).

<sup>14</sup>Siehe z.B. Iori (2002).

<sup>15</sup>Siehe hierzu Alfarano und Milaković (2008) und Alfarano et al. (2009), welche das Modell von Kirman (1993) mit verschiedenen zugrunde liegenden Interaktionsnetzwerken untersuchen.

## 2.2. MODELLAUFBAU

und Day und Huang (1990)<sup>16</sup>. Die zweite Möglichkeit ist die Feststellung des Preises mittels eines Walras-Gleichgewichtes<sup>17</sup>. Im Walras-Gleichgewicht wird derjenige Preis ermittelt, für den Angebot und Nachfrage gleich sind. Alle Modelle, die den Ansatz von Brock und Hommes (1998) als Aufbaugrundlage verwenden, besitzen auch eine Preisbestimmung durch das Walras-Gleichgewicht<sup>18</sup>. Außerhalb des Ansatzes von Brock und Hommes (1998) existieren aber natürlich auch noch weitere Modelle, welche das Walras-Gleichgewicht zur Preisbestimmung verwenden<sup>19</sup>. Zuletzt unterscheiden sich die Modelle noch durch die von den Agenten verwendeten Strategien. Sowohl die zwei/drei Strategien Modelle als auch die N-Strategien Modelle haben als Grundlage dieselben generellen Strategien. Dabei finden vor allem Variationen der Fundamental- und Trendfolgestrategie Verwendung<sup>20</sup>, wobei ebenfalls, wenn auch seltener, die Random- und Trendumkehrstrategien<sup>21</sup> in ABM zum Einsatz kommen. Zusätzlich zu diesen in der Literatur verbreiteten Unterscheidungskriterien, kann auch noch der Einfluss des Zufalls auf das Modell als zusätzliche Kategorie hinzugezogen werden. Ein gewisser Zufallseinfluss ist zwar bei jedem ABM vorhanden, allerdings kann die Stärke dieses Einflusses und damit auch dessen Relevanz für das Systemverhalten variieren. Grob lässt sich diese Relevanz in drei verschiedene Stufen einteilen. Die geringste Stufe der Relevanz ist das einfache Hinzufügen des Zufallseinflusses zu einem ansonsten deterministischen System. Dies drückt sich durch eine einfache Addition einer normalverteilten Zufallsgröße in der Preisgleichung

---

<sup>16</sup>Weitere einfache Modelle mit dieser Preisbestimmung sind z.B. die Modelle von Lux und Marchesi (1999, 2000), das Modell von Manzan und Westerhoff (2007) sowie die Modelle von Franke und Westerhoff (2012, 2016).

<sup>17</sup>Diese Methode wurde ebenfalls durch die Arbeit von Brock und Hommes (1998) etabliert.

<sup>18</sup>In Brock und Hommes (1998) wird ein genereller Modellansatz eingeführt, der sich einfach erweitern und auf ein spezifisches Problem individualisieren lässt. Dies ist auch ein Grund dafür, warum der Modellansatz in der Literatur so weit verbreitet ist. Beispiele für Modelle basierend auf diesem Ansatz sind in den Arbeiten von Boswijk et al. (2007), Gaunersdorfer et al. (2008) und Recchioni et al. (2015) zu finden.

<sup>19</sup>Beispiele hierfür sind das z.B. Modell von Kirman und Gilles (2002) oder die Modelle von Lux et al. (2005) und Alfarano et al. (2008).

<sup>20</sup>Der Großteil der ABM verwendet sowohl eine Fundamental- als auch eine Trendfolgestrategie und so gut wie alle Modelle verwenden wenigstens eine der beiden Strategien.

<sup>21</sup>Random-Trading Strategien werden in den Modellen von Iori (2002), Lux et al. (2005) sowie Alfarano et al. (2008) verwendet, während Trendumkehrstrategien bei Brock und Hommes (1998) und Lux und Marchesi (1999, 2000) von den Agenten verfolgt werden.

chung aus. In diesem Fall wird das Systemverhalten größtenteils durch den deterministischen Kern des Modells bestimmt und der Zufallseinfluss ist nur ein Zusatz, der ein vollständig deterministisches System verhindern soll. Ein Beispiel für diesen Ansatz ist das Modell von Hommes (2006)<sup>22</sup>. Für die in dieser Thesis verfolgte Anwendung der Risikoprognose sind diese Modelle ungeeignet, da mit diesen keine variable Volatilität erzeugt werden kann und somit das prognostizierte Risiko konstant sein würde. Allerdings lässt sich der Zufallseinfluss dieser Modelle meist leicht in einen Zufallseinfluss der zweiten Stufe umwandeln. Bei der zweiten Stufe ist der Zufallseinfluss ein signifikanter Teil der Preisgleichung und wird durch den Anteil der unterschiedlichen Strategien des Systems beeinflusst<sup>23</sup>, was zu einem variablen Zufallseinfluss und damit zu einer variablen Volatilität des Systems führt. Neben dem Zufallseinfluss existiert aber ebenfalls ein deterministischer Kern der Modelle, welcher etwa gleichwertig für das Systemverhalten verantwortlich ist. Diesen Ansatz verfolgen z.B. die Modelle von Franke und Westerhoff (2012) und Franke und Westerhoff (2016). In die dritte Stufe fallen die Modelle, bei welchen das Systemverhalten fast ausschließlich vom Zufallseinfluss bestimmt wird. Bei diesen Modellen ist der Zufallseinfluss sowohl in der Preisgleichung als auch in der Strategiewahl vorhanden und der deterministische Kern hat, falls er überhaupt vorhanden ist, kaum Einfluss auf das Systemverhalten. Auch mit dieser Art von Modell kann somit eine variable Volatilität erzeugt werden. Beispiele für diese Art von Zufallseinfluss lassen sich bei den Modellen von Kirman und Gilles (2002), Lux et al. (2005) sowie Alfarano et al. (2008) finden, welche alle auf einem Ansatz zur Meinungsbildung von Kirman (1993) beruhen<sup>24</sup>. Im Gegensatz zu den einfachen Modellen ist eine Generalisierung des Modellaufbaus bei den komplexen Modellen schwieriger. Der Grund hierfür ist, dass sich die Ausprägungen von komplexer Heterogenität, komplexen Lernen und komplexer Interaktion deutlich voneinander unterscheiden können. Komplexe Heterogenität ist

---

<sup>22</sup>Auch Modelle, die auf dem Ansatz von Hommes (2006) basieren verwenden diese Definition des Zufallseinfluss. Für weitere Details, siehe wie z.B. Boswijk et al. (2007), Gaunersdorfer et al. (2008) und Recchioni et al. (2015).

<sup>23</sup>Dies impliziert gleichzeitig, dass bei diesen Modellen eine Möglichkeit des Strategiewechsels vorhanden sein muss.

<sup>24</sup>Auch Ising-Ansätze wie das Modell von Iori (2002) fallen in diese Kategorie.

## 2.2. MODELLEBAU

in so gut wie allen komplexen Modellen vorhanden und materialisiert sich meist in hoch individualisiertem Agentenverhalten. Komplexes Lernen oder komplexe Interaktionen ohne individualisiertes Agentenverhalten ist zwar durchaus möglich, aber in der Literatur nicht sehr verbreitet, da sowohl komplexes Lernen als auch komplexe Interaktionen häufig direkt individuelles Agentenverhalten induzieren. Ein Beispiel für komplexe Heterogenität ist das Modell von Chiarella et al. (2009). Hier verfolgen Agenten individuell zusammengesetzte Strategien und geben darauf aufbauend individuelle Bid-Ask-Order<sup>25</sup> an einem Doppelauktionsmarkt ab. Komplexes Lernen erlaubt es den Agenten eigene Strategien zu verfolgen und diese beständig weiter zu entwickeln. Dazu werden wie z.B. bei Arthur et al. (1997)<sup>26</sup> unterschiedliche Strategieansätze vorgegeben, aus denen sich die Agenten dann individuelle Strategien zusammensetzen können, wobei das Gütekriterium der Profit der jeweiligen Strategie ist. Weitere Möglichkeiten des komplexen Lernens sind evolutionäre Algorithmen<sup>27</sup> oder neuronale Netze<sup>28</sup>. Bei all diesen Beispielen existiert durch eine hohe Agentenanzahl zusammen mit den individuellen Strategien auch gleichzeitig eine komplexe Heterogenität<sup>29</sup>. Durch komplexe Interaktion werden die Interaktionen zwischen den Agenten genauer modelliert. In einfachen Modellen werden entweder keine Interaktionen, Zufallstreffen oder ein einfaches Nachbarschaftsgitter angewendet. Komplexe Interaktion hingegen erfolgt über Interaktionsnetzwerke, dies können z.B. feste Netzwerke<sup>30</sup> oder auch adaptive Netzwerke<sup>31</sup> sein. Da für komplexe Interaktionen eine gewisse Anzahl von Agenten erforderlich ist, kann dieser Ansatz ohne komplexe Heterogenität nur schwer angewandt werden. Alle diese komplexen Ansätze haben gemeinsam, dass durch die Erhöhung der Komplexität in einem oder mehreren Bereichen versucht wird, einen Erklärungsansatz für die Preis- bzw. Renditebildung

---

<sup>25</sup>Dies betrifft sowohl die Art, als auch den Preis und das Volumen der Order.

<sup>26</sup>Dieses Modell ist auch unter dem Namen Santa Fe Artificial Stockmarket bekannt und eines der einflussreichsten komplexen Modelle der finanzwirtschaftlichen ABM Literatur.

<sup>27</sup>Siehe hierzu z.B. Anufriev et al. (2013)

<sup>28</sup>Siehe hierzu z.B. Rekik et al. (2014).

<sup>29</sup>Möglich wäre es zwar auch ein zwei/drei Strategien Modell mit komplexem Lernen zu unterlegen, so ein Ansatz existiert aber nach Wissen des Autors bisher nicht.

<sup>30</sup>Siehe Alfarano und Milaković (2008) und Alfarano et al. (2009).

<sup>31</sup>Siehe Tedeschi et al. (2012), hier evaluieren Agenten ihre Interaktionspartner nach Erfolg und können dementsprechend ihre Partner auch wechseln.

und die dabei zu beobachtenden Stylized-Facts zu liefern. Für eine Erklärung von Phänomenen, die in der Mikrostruktur von Finanzmärkten existieren<sup>32</sup>, ist es sogar nötig, ein komplexes Modell zu verwenden, da zur Modellierung der Mikrostruktur eine größere Heterogenität vorhanden sein muss, als sie einfache Modelle aufweisen können. Nachdem der grundlegende Aufbau von ABM nun kategorisiert wurde, bleibt noch zu erörtern, welche dieser verschiedenen Designmöglichkeiten sich am besten für eine Anwendung in der Risikoprognose eignet. Dabei lassen sich zwei Modellvarianten von vorneherein ausschließen. Erstens muss ein einfaches Modell gewählt werden, da es für die komplexen Modelle schlicht noch keine Verfahren zur Kalibrierung existieren<sup>33</sup>. Zweitens muss das Modell in der Lage sein, eine variable Volatilität zu erzeugen. Modelle, mit einem Zufallseinfluss erster Stufe sind also nicht geeignet. Eine abschließende Antwort für die Auswirkung der weiteren Designmöglichkeiten auf die Güte der Risikoprognose kann a priori nicht getroffen werden, weswegen das weitere Vorgehen in dieser Thesis ist, eine möglichst breite Auswahl von bereits existierenden einfachen Modellen der agentenbasierten Literatur zu treffen und deren Anwendung zur Risikoprognose zu untersuchen.

## 2.3 Eignung von einfachen Modellen zur Risikoprognose

Es bleibt noch die Frage zu erörtern, ob für die in dieser Thesis versuchte Anwendung einfache Modelle überhaupt ausreichen oder ob diese den komplexen Modellen einfachen zu weit unterlegen sind. Zur Beantwortung dieser Frage, kann eine Zusammenfassung von Chen et al. (2012), über einige Stylized-Facts, welche von einfachen und komplexen Modellen abgebildet werden können, herangezogen werden.

---

<sup>32</sup>Beispiele hierfür wären die Stylized-Facts von Orderverteilung und Ordervolumen an Auktionsmärkten, welche z.B. bei Biais et al. (1995), Bouchaud et al. (2002) und Wyart et al. (2008) untersucht werden. Der Auktionsmarkt kann dabei eine klassische Auktion oder eine kontinuierliche Doppelauktion sein kann.

<sup>33</sup>Nach Grazzini und Richiardi (2015) ist dies direkt auf die inhärente Komplexität dieser Modellart zurückzuführen und kann somit nicht einfach gelöst werden, da eben genau die erhöhte Komplexität das wichtigste Merkmal dieser Modelle ist.

### 2.3. EIGNUNG VON EINFACHEN MODELLEN ZUR RISIKOPROGNOSE

Tabelle 2.1: Tabelle von Chen et al. (2012) zur Zusammenfassung der von den Modellklassen abgebildeten Stylized Facts.

- AA: Absence of Autocorrelation<sup>34</sup>
- AG: Aggregational Gaussianity<sup>35</sup>
- BC: Bubbles and Crashes<sup>36</sup>
- EEP: Equity Premium Puzzle<sup>37</sup>
- EV: Excess Volatility<sup>38</sup>
- FT: Fat-Tails<sup>39</sup>
- GLA: Gain/Loss Asymmetry<sup>40</sup>
- LM: Long Memory<sup>41</sup>
- PLBR: Power Law Behavior of Return<sup>42</sup>
- VC: Volatility Clustering<sup>43</sup>
- VLM: Long Memory of Volume<sup>44</sup>
- VVC: Volatility Volume Correlations<sup>45</sup>

Stylized-Facts	2-Strategien	3-Strategien	N-Strategien	Komplex	Studien
AA	11	2	9	5	27
AG	1	2	2	1	6
BC	3	2	2	2	9
EEQ	0	0	1	0	1
EV	2	0	3	0	5
FT	14	7	9	11	41
GLA	0	0	1	0	1
LM	7	2	5	6	20
PLBR	4	3	1	2	10
VC	14	6	9	8	37
VLM	0	0	0	3	3
VVC	0	1	4	1	6
Gesamt	8	8	11	9	

<sup>34</sup>Die Renditen weisen keine signifikante Autokorrelation auf.

<sup>35</sup>Mit zunehmender Zeitskala, über die Renditen berechnet werden, gleicht die Renditeverteilung immer mehr einer Normalverteilung.

<sup>36</sup>Die Preiszeitreihen bilden Blasen aus, welche irgendwann in einem Crash enden.

<sup>37</sup>Es existiert eine, nicht erklärbare, hohe Renditedifferenz zwischen risikoreichen und risikoarmen Wertpapieren.

<sup>38</sup>Die Preise schwanken viel stärker als die Informationen über ihren fundamentalen Wert.

<sup>39</sup>Die Extremwerte von Rendite sind pareto-verteilt.

<sup>40</sup>Die Renditen weisen höhere Verluste als Gewinne auf.

<sup>41</sup>Die Autokorrelationsfunktion absoluter Renditen fällt nur langsam mit höherer Lag-Ordnung ab.

<sup>42</sup>Die Renditen folgen einem Potenzgesetz.

Es fällt auf, dass mit komplexen Modellen kaum mehr Stylized-Facts abgebildet werden können als mit den einfachen ABM. Einschränkend muss aber angemerkt werden, dass die Tabelle 2.1 nur qualitative Aussagen über die Abbildung der Stylized-Facts macht<sup>46</sup>, so dass weiterhin die theoretische<sup>47</sup> Möglichkeit besteht, mit komplexen Modellen bessere quantitative Ergebnisse zu erzielen. Des Weiteren kommt noch hinzu, dass die Tabelle 2.1 nur Stylized-Facts der Makrogrößen der Finanzmärkte beinhaltet. Für das Abbilden von Markt mikrogrößen muss zwingend die Mikrostruktur von Finanzmärkten modelliert werden, was ein komplexes Modell voraussetzt. Schließlich muss noch angemerkt werden, dass die von Chen et al. (2012) untersuchten komplexen Modelle keineswegs einer repräsentativen Auswahl aller Designmöglichkeiten bei komplexen Modellen entsprechen und von daher auch komplexe Modelle existieren können, die in der Lage sind, deutlich mehr Stylized-Facts abzubilden. Trotz diesen drei Einschränkungen sind einfache ABM ausreichend gut für die meisten Makroanwendungen geeignet, da sie durchaus in der Lage sind, die wichtigsten Stylized-Facts darzustellen. Für die in dieser Thesis verfolgte Anwendung der Risikoprognose ist es nicht einmal nötig, dass ein Modell alle Stylized-Facts in Tabelle 2.1 wiedergeben kann, es genügen dafür bereits Volatilitätsclustering bzw. Langzeitkorrelation<sup>48</sup> und Fat-Tails bzw. Power-Law Verhalten der Rendite sowie mit geringerer Relevanz die statistische Unabhängigkeit der Rendite<sup>49</sup>. Diese können von den meisten untersuchten Modellen zumindest qualitativ repliziert werden, wie die Tabelle 2.1 zeigt. Zusammenfassend können aus den Ergebnissen der Tabelle 2.1 zwei Schlüsse für die Anwendung von ABM in der Risikoprognose gezogen werden. Erstens kann, bei der Replikation der für die Risikoprognose wichtigsten Stylized-Facts, keine signifikante Überlegenheit von komplexen Modellen gegenüber einfachen Modellen festgestellt

---

<sup>43</sup>Große Preisänderungen treten zeitlich gehäuft auf.

<sup>44</sup>Die Autokorrelationsfunktion des Handelsvolumens fällt nur langsam mit höherer Lag-Ordnung ab.

<sup>45</sup>Das Handelsvolumen ist mit der Volatilität von Renditen korreliert.

<sup>46</sup>So gut wie keines der Modelle war zu dem Zeitpunkt der Veröffentlichung einer Kalibrierung unterzogen worden.

<sup>47</sup>Wie bereits erwähnt, gibt es noch keine Verfahren zur Schätzung der Parameter eines komplexen Modells, was einen quantitativen Vergleich in der Praxis unmöglich macht.

<sup>48</sup>Dies entspricht dem Long Memory Effekt aus Tabelle 2.1.

<sup>49</sup>Der entsprechende Stylized-Fact dazu ist die Absence of Autocorrelation der Tabelle 2.1

## 2.4. KALIBRIERUNG VON ABM

werden, was die Wahl von einfachen Modellen für die Risikoprognose rechtfertigt<sup>50</sup>. Zweitens ist der Unterschied zwischen zwei/drei Strategien und N-Strategien Modellen ebenso nur gering. Von daher lässt sich die Modellauswahl auf zwei/drei Strategien Modelle beschränken.

## 2.4 Kalibrierung von ABM

Das Problem der Kalibrierung von ABM war für längere Zeit ein Hindernis, was die agentenbasierte Modellierung von empirischen Anwendungen an Finanzmärkten weitestgehend ausgeschlossen hat. Im Allgemeinen gilt, je komplexer ein Modell ist, desto schwieriger ist es zu kalibrieren, da höhere Komplexität häufig mit mehr zu kalibrierenden Systemparametern und stärkeren nicht linearen Interdependenzen einhergeht. Allerdings sind selbst die einfachen ABM mit den Standardmethoden der Ökonometrie, wie der Methode der kleinsten Quadrate (MKQ) oder dem ML-Verfahren, generell nicht kalibrierbar. In der Literatur gibt es zwar Modelle, die mit der MKQ oder dem ML-Verfahren kalibriert wurden, allerdings mussten die Modelle dazu vereinfacht werden oder es konnten nicht alle Parameter geschätzt werden. So wurden z.B. bei Boswijk et al. (2007) und Manzan und Westerhoff (2007) die Modelle mit der Methode der kleinsten Quadrate angepasst, wobei jedoch die Modelle linearisiert werden mussten, was deren Systemverhalten signifikant vereinfacht hat. Für die ML-Schätzung wiederum, mussten bei Lux et al. (2005) und Amilon (2008) Systemparameter von der Kalibrierung ausgenommen werden, da sich ansonsten die ML-Funktion nicht aufstellen ließ, was wiederum ebenfalls nur zu einer vereinfachten Abbildung des Systemverhaltens führte. Da es mit den Standardverfahren der Ökonometrie häufig nicht möglich ist, dass gesamte Systemverhalten eines Modells an Daten zu kalibrieren, mussten hierfür also alternative Verfahren gefunden werden. Ein Verfahren, was sich dabei über die letzten zwei Dekaden als Standard zur Kalibrierung von ABM etabliert hat, ist die Methode der simulierten Momente

---

<sup>50</sup>Wäre hier stattdessen eine deutliche Überlegenheit der komplexen Modelle festgestellt worden, so hätte sich die Frage gestellt, ob es für das weitere Vorgehen nicht besser gewesen wäre, komplexe Modelle als Grundlage zu wählen und nach Möglichkeiten zur Kalibrierung dieser zu suchen.

(MSM). Dieses Verfahren ist im Prinzip nur eine von McFadden (1989), Pakes und Pollard (1989), Lee und Ingram (1991) und Duffie und Singleton (1993) vorgeschlagene Abwandlung einer weiteren Standardmethode der Ökonometrie, der Methode der Momente<sup>51</sup>. Der Unterschied ist, dass bei der MSM, wie der Name es auch bereits impliziert, Modellsimulationen erstellt werden, aus denen sich dann die Momente bestimmen lassen<sup>52</sup>. Die erste Verwendung der MSM findet sich bei Gilli und Winker (2003), wobei hierzu noch angemerkt werden muss, dass dies eher einem ersten Anwendungsversuch gleicht, da die Methode noch nicht vollständig ausgearbeitet ist<sup>53</sup>. Eine Weiterentwicklung dieser Methode ist bei Winker et al. (2007) zu finden, aber auch hier ist die Methode noch merkbar in der Entwicklungsphase<sup>54</sup>. Die erste Anwendung der vollentwickelten MSM ist bei Franke (2009) anhand eines sehr einfachen Agentenmodells<sup>55</sup> zu finden. Hier wird dargelegt, dass als Moment nur statistische Größen genutzt werden können, die sich über Zeitmittelwerte bilden lassen. Des Weiteren wird auch dargelegt, dass die Anzahl der Momente die Anzahl der zu optimierenden Systemparameter übersteigen muss, um ein überparametrisiertes System zu gewährleisten, was unendlich viele Lösungen aufweist. Zu guter Letzt wird für die Momente noch eine optimale Gewichtsmatrix eingeführt<sup>56</sup>. Eine theoretische

---

<sup>51</sup>Eine Kalibrierung eines agentenbasiertes Modell mit der Methode der Momente wurde bei Ghonghadze und Lux (2016) durchgeführt. Dies ist allerdings nur spezifisch auf das dort verwendete ABM anwendbar, da bei anderen Modellen keine analytischen Ausdrücke für die Momente aufstellbar sind.

<sup>52</sup>Da die MSM auch in dieser Thesis zur Kalibrierung verwendet wird, erfolgt eine detaillierte Darstellung davon in einem separaten Kapitel.

<sup>53</sup>Es ist noch nicht vollständig definiert, was überhaupt als Moment verwendet werden kann und die Anzahl der Momente ist im Vergleich zur Anzahl der Systemparameter noch zu gering. Des Weiteren ist der Aufbau der letztendlichen Zielfunktion noch nicht vollständig formalisiert worden.

<sup>54</sup>Zwar ist die Anzahl der Momente nun höher als die Anzahl der Systemparameter und auch die Zielfunktion ist inzwischen besser formalisiert, allerdings werden immer noch statistische Größen als Momente verwendet, welche sich in späteren Veröffentlichungen als nicht dafür geeignet herausgestellt haben.

<sup>55</sup>Das dort verwendete ABM, welches von Manzan und Westerhoff (2007) entwickelt wurde, beruht auf zwei verschiedenen Volatilitätsphasen. Der Phasenwechsel findet dabei über einen Schwellenwert statt.

<sup>56</sup>Die dort vorgestellte Gewichtsmatrix wird aus der asymptotischen Kovarianzmatrix erstellt. Dies ist allerdings nicht die einzige anerkannte Methode, eine Gewichtsmatrix zu konstruieren. Bei Franke und Westerhoff (2016) z.B. wird die Kovarianzmatrix aus den empirischen Momenten mit Hilfe des Bootstrapverfahren erstellt.

## 2.4. KALIBRIERUNG VON ABM

Grundlage der MSM, was die benötigten Vorbedingungen, den Aufbau sowie die Durchführung der Simulation betrifft, wird schließlich bei Grazzini und Richiardi (2015) geliefert. Inzwischen hat sich die MSM als Standardmethode zur Kalibrierung etabliert, was sich auch in der Anzahl der damit kalibrierten Modelle wieder spiegelt<sup>57</sup>. Trotz des erreichten Erfolges gibt es in der agentenbasierten Literatur inzwischen immer mehr Arbeiten, welche die Schwächen der MSM aufzeigen<sup>58</sup>. Bereits Winker et al. (2007) fanden heraus, dass die Zielfunktion über große Parameterbereiche sehr flach verläuft, was das Auffinden von robusten (lokalen) Minima schwierig macht. Dies wird auch in einer neueren Arbeit an anderen Modellen bei Jang (2015) und Chen und Lux (2018) betätigt. Des Weiteren zeigen Jang (2015) und Chen und Lux (2018), dass die Zielfunktion zusätzlich noch viele lokale Minima aufweist. Beide Probleme treten auch bei Platt (2020)<sup>59</sup> auf, welcher die Methode auf künstlich erzeugten Daten testet. Ein weiteres Problem, welches schon von Anfang an bei der MSM vorlag<sup>60</sup>, ist die Wahl der Momente selbst, da unterschiedliche Momente in der Zielfunktion zu vollkommen unterschiedlichen Parametersätzen nach der Optimierung führen können. Tatsächlich gibt es bisher keinen Konsens<sup>61</sup>, welche Momente zur Kalibrierung am besten geeignet sind, sodass die gewählten Momente in der agentenbasierten Literatur häufig Unterschiede aufweisen. Insgesamt scheint die Optimierung mit Hilfe der MSM also zumindest teilweise instabil zu sein, weswegen in der Literatur inzwischen wieder nach alternativen Methoden gesucht wird<sup>62</sup>, welche

---

<sup>57</sup>Beispiele dafür finden sich z.B. bei Franke und Westerhoff (2012), Jang (2015), Jang und Sacht (2016), Franke und Westerhoff (2016), Schmitt und Westerhoff (2017) und Chen und Lux (2018).

<sup>58</sup>Eine Schwäche in der Literatur zur Kalibrierung von ABM mit der MSM war bis dahin, dass die genaue Messung der Güte der Kalibrierung lange Zeit vernachlässigt wurde.

<sup>59</sup>Wobei hierbei allerdings mit dem Modell von Hommes (2006) nur ein Modellansatz aus dem Bereich der Finanzwirtschaft untersucht wird. Die restlichen Modelle sind autoregressive Modelle und ein makroökonomisches Modell von Baptista et al. (2016).

<sup>60</sup>Auf dieses Problem wird bereits bei Franke (2009) hingewiesen und Grazzini und Richiardi (2015) stellen es ebenfalls in ihrer Arbeit heraus.

<sup>61</sup>Es gibt zwar einen Konsens, dass Momente gewählt werden sollten, welche die Gesamtvolatilität und die Stylized-Facts der Fat-Tails, der Langzeitkorrelation und des Volatilitätsclusterings abbilden, allerdings nicht darüber, welche Momente dafür genau gewählt werden sollen. Eine Inklusion eines Momentes, was die statistische Unabhängigkeit der Renditen beschreibt, wird z.B. auch nicht bei allen Modellen vorgenommen.

<sup>62</sup>Beispiele dafür sind zwei Verfahren aus der Informationstheorie von Barde (2016, 2017) und Lamperti (2017), ein simuliertes ML-Verfahren von Kukacka und Barunik (2017), ein bayesianisches

allerdings allesamt noch besser erforscht müssen, bevor sie sich wirklich zur Kalibrierung in agentenbasierten Literatur etablieren können. Bei einem Vergleich mehrerer Verfahren von Platt (2020)<sup>63</sup> schneidet das BI-Verfahren von Grazzini et al. (2017) am besten ab, wobei jedoch das simulierte ML-Verfahren von Kukacka und Barunik (2017) und das SMC-Verfahren von Lux (2018) nicht untersucht wurden<sup>64</sup>. Dennoch deuten die Ergebnisse bei Kukacka und Barunik (2017)<sup>65</sup>, Lux (2018) und Platt (2020) darauf hin, dass alternative Methoden eine bessere Kalibrierungsgüte liefern können, als das bisherige Standardverfahren der MSM<sup>66</sup>. Da vor einer Anwendung der Modelle zuerst einmal eine Schätzung der Systemparameter erfolgen muss, ist es nötig, eine Kalibrierung mit einem der hier vorgestellten Verfahren durchzuführen. Trotz der erwähnten Schwächen soll hierfür die MSM verwendet werden, da dies das bisher am besten etablierte Verfahren ist. Mit der MSM wurden bereits viele Modelle in der Literatur erfolgreich kalibriert, so dass davon ausgegangen werden kann, dass dieses Verfahren auch für die hier verwendete Modellauswahl<sup>67</sup> zu akzeptablen Ergebnissen führt.

---

Inferenz-Verfahren (BI) von Grazzini et al. (2017) und ein SMC-Verfahren von Lux (2018).

<sup>63</sup>Wie erwähnt ist hier nur ein Modell aus dem Bereich der Finanzwirtschaft untersucht worden, da allerdings dieselben Kalibrierungsprobleme bei den meisten untersuchten Modellen auftreten, ist das Ergebnis wohl auch auf andere agentenbasierte Modelle in der Finanzwirtschaft übertragbar.

<sup>64</sup>Anzumerken ist hierzu aber noch, dass für alle Verfahren eine ML-Funktion aufgestellt wird, wodurch sie durchaus vergleichbar sind. Beim simulierten ML-Verfahren und beim SMC-Verfahren wird allerdings eine zu optimierende Zielfunktion aufgestellt, während beim BI-Verfahren durch die Anwendung des Satzes von Bayes Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Modellparameter bestimmt werden.

<sup>65</sup>Die Optima der Zielfunktion sind für die meisten Parameter deutlich ausgeprägt und damit gut auffindbar, allerdings ist für einen der Parameter der Verlauf der Zielfunktion wieder sehr flach. Dies kann in diesem Fall aber auch am verwendeten Modell von Hommes (2006) liegen, da die gleichen Beobachtungen für diesen Parameter auch bei Hommes u. a. (2017) und Bolt et al. (2019) gemacht werden.

<sup>66</sup>Wobei die Verfahren von Barde (2016, 2017) und Lamperti (2017) bei der Studie von Platt (2020) ähnliche Probleme aufweisen wie die MSM und bei den untersuchten ABM dieser auch unterlegen sind.

<sup>67</sup>Einige der Modelle wurden bereits mit der Methode der simulierten Modelle erfolgreich kalibriert, so dass das Verfahren bei diesen mit Sicherheit angewendet werden kann.

## 2.5 Anwendungen von ABM

Bisher sind Anwendungen von ABM in der Literatur nicht sehr verbreitet. Die ersten Anwendungen sind dabei auch zur Erklärung von Phänomenen und nicht zur Prognose konzipiert. So wird bei Boswijk et al. (2007) das Modell von Hommes (2006) an jährlichen Daten S&P 500 im Zeitraum von 1871 bis 2003 kalibriert und damit untersucht, welche Strategie in welchen Marktphasen vorherrscht. Bei Manzan und Westerhoff (2007) wird nach der Kalibrierung an verschiedenen Wechselkursmärkten<sup>68</sup>, die Stärke der Preisextrapolation der Trendfolger im Zeitverlauf untersucht. Eine Anwendung des Modells von Hommes (2006) zur Durchführung von Punkt- und Trendprognosen anhand von Tagesdaten verschiedener Indices<sup>69</sup> wird bei Recchioni et al. (2015) vorgenommen. Punktprognosen liefern dabei keine guten Ergebnisse, die Trendprognosen jedoch schlagen die Benchmark für alle untersuchten Indices. Anwendungen in der Risikoprognose, wie sie auch in dieser Thesis vorgenommen werden sollen, sind in der Literatur ebenfalls kaum vorhanden. Die erste Anwendung dazu findet sich bei Ghonghadze und Lux (2016), welche das Modell von Alfarano et al. (2008) erst mit Hilfe der Methode der Momente an täglichen Daten verschiedener Anlageklassen<sup>70</sup> kalibrieren und anschließend Out-of-Sample Prognosen der quadrierten Renditen generieren. Die eigentliche Prognose wird dabei allerdings mit einem linearen Modell durchgeführt. Die nicht linearen Systemeigenschaften des Agentenmodells werden bei der Prognose damit nicht berücksichtigt. Dies ist eine Schwäche, die auch von den Autoren eingestanden wird. Eine weitere Anwendung zur Risikoprognose wird bei Ji et al. (2019) vorgenommen. Es wird ein extra für die Anwendung kreiertes Modell<sup>71</sup> mit Hilfe der MSM anhand von täglichen Daten kalibriert<sup>72</sup>.

---

<sup>68</sup>Die verwendeten Wechselkurspaare sind dabei DM/USD, JY/USD, CD/USD, FF/USD und BP/USD im Zeitraum von 1974 bis 1998 mit monatlicher Datenfrequenz.

<sup>69</sup>Die untersuchten Indices waren dabei der S&P 500, der Euro Stoxx 50, der Nikkei 225 und der CSI 300 im Zeitraum vom 25 Februar 2011 bis zum 23 Februar 2012.

<sup>70</sup>Dies sind die Indices Dax, S&P 500 sowie Nikkei, die Wechselkurspaare USD/EUR, JY/USD sowie USD/EUR und der Goldpreis im Zeitraum von 1980 bis 2004.

<sup>71</sup>Das Modell basiert, wie das Modell von Franke und Westerhoff (2012, 2016), auf zwei Strategien mit unterschiedlichem Zufallseinfluss und stellt eine vereinfachte Form davon dar. Allerdings wird hier für eine der beiden Strategien direkt eine Fat-Tail verteilte Zufallsgröße verwendet.

<sup>72</sup>Der verwendete Datensatz ist hier der CSI 300 im Zeitraum von 2010 bis 2016.

Nach der Kalibrierung wird eine tägliche Out-of-Sample VaR-Prognose erstellt, indem der aktuelle Systemzustand bestimmt wird. Die Schwäche dieser Anwendung ist, dass sich dieser Ansatz nicht ohne weiteres auf andere ABM übertragen lässt, da die Schätzung des aktuellen Systemzustands hier stark auf das verwendete Modell zugeschnitten ist<sup>73</sup>. In Tubbenhauer et al. (2021) wird ein zweistufiger Ansatz zur Erstellung von VaR-Prognosen verwendet<sup>74</sup>. Um eine erste Abschätzung zu erhalten, werden dazu zuerst mehrere Varianten der ABM von Brock und Hommes (1998) und Franke und Westerhoff (2012, 2016) mit der MSM kalibriert. Für eine Anpassung an den aktuellen Zeitrand wird dann im zweiten Schritt ein ML-Verfahren verwendet. Auf dieser Basis wird schließlich eine tägliche Out-of-Sample VaR-Prognose erstellt. Im Rahmen dieser Thesis wird der in Tubbenhauer et al. (2021) verwendete Ansatz erweitert und die Ergebnisse in Tubbenhauer et al. (2021) genauer untersucht. Insgesamt gibt es bei der Anwendung von ABM in der Risikoprognose im allgemeinen und der VaR-Prognose im speziellen noch wenige Untersuchungen. Vor allem, welche Modelle und Methoden zur Risikoprognose geeignet sind, ist ein Bereich, der bisher wenig erforscht ist. Genau an dieser Stelle liegt der Forschungsschwerpunkt dieser Arbeit. Einmal soll überprüft werden, welche Modelle bzw. Modelldesigns sich besonders zur Risikoprognose eignen. Ein weiterer Fokus liegt auf dem Entwickeln von Methoden zur Parameteroptimierung am aktuellen Zeitrand<sup>75</sup>, von deren Basis aus dann Risikoprognosen erfolgen sollen. Von der Parameteroptimierung am aktuellen Zeitrand werden sich dabei drei Vorteile erhofft. Erstens ist zu erwarten, dass sich durch die Anpassung an aktuelle Daten die Prognosegüte verbessern lässt, zweitens sollte dadurch eine Prognose mit mehr ABM als bisher möglich sein und drittens ließen sich durch Parameterdifferenzen in verschiedenen Finanzmarktphasen bessere Rückschlüsse auf das Agentenverhalten ziehen.

---

<sup>73</sup>Ein weiteres Problem ist, dass diese Methode nur eine Anfangspunktbestimmung zulässt. Modelle, welche noch weitere Parameterschätzungen zur Prognose benötigen, können somit also nicht verwendet werden.

<sup>74</sup>Der Datensatz umfasst hier tägliche Börsenkurse des S&P 500 im Zeitraum von 1950 bis 2020.

<sup>75</sup>Bei fast allen bisherigen Anwendungen von ABM zur Risikoprognose wird nicht versucht, einen Parametersatz für den aktuellen Prognoserand zu bestimmen.

# Kapitel 3

## Verwendete Agentenmodelle

Um zu evaluieren, welche Agentenmodelle Finanzmarktdaten am besten abbilden können, werden verschiedene einfache<sup>1</sup> ABM aus der Literatur mit der Methode der simulierten Momente an einem Testdatensatz des S&P500 kalibriert. Damit soll evaluiert werden, welche Modelle überhaupt geeignet sind, die speziellen statistischen Eigenschaften (Stylized-Facts) der Finanzmärkte zu reproduzieren. Eine Gemeinsamkeit der einfachen Modelle ist es, dass ihre Grundlage eine simple Preis- bzw. Renditegleichung ist, welche auf einem Angebots- bzw. Nachfrageüberhang beruht. Des Weiteren gibt es in den Modellen nur zwei einfache Strategien, welche sich meist in eine fundamentale und technische Anlagestrategie aufteilen. Fundamentalisten sind dabei jene Agenten, welche sich am wahren ökonomischen Wert einer Anlage orientieren. Sie gehen davon aus, dass sich der Preis in Zukunft wieder dem Fundamentalwert annähert. Techniker hingegen versuchen aus dem vergangenen Kursverlauf zukünftige Preise abzuleiten. In den Agentenmodellen sind diese Strategien sehr abstrahiert implementiert. Als allgemeine Regel lässt sich festhalten, dass Fundamentalisten kaufen, wenn der Preis unter dem Fundamentalwert liegt und verkaufen, wenn der Preis höher als der Fundamentalwert ist, während Techniker bei einem positiven Preistrend kaufen und bei einem negativen verkaufen. Die Höhe der jeweiligen Nachfrage bzw. des Angebots ist dabei proportional zur Diskrepanz zwi-

---

<sup>1</sup>Siehe Brock und Hommes (1998), Lux et al. (2005), Alfarano et al. (2008) und Franke und Westerhoff (2012, 2016) für eine genauere Beschreibung der Modelle.

schen Fundamentalwert und gegenwärtigem Preis bzw. zur Stärke des Preistrendes. Die genaue Implementierung dieser Strategien kann sich zwischen den einzelnen Modellen unterscheiden und wird im entsprechenden Unterkapitel ausführlich diskutiert. In der Wirklichkeit gibt es aber nun viele unterschiedliche Möglichkeiten, fundamentale oder technische Analyse zu betreiben, sodass sich die individuellen Strategien der Anleger stark unterscheiden können. Dies wird in den Modellen durch einen Zufallsfaktor bei der Preisfindung berücksichtigt. Die verschiedenen Implementierungen und Interpretationen dieses Zufallsanteils sind ein wichtiges Schlüsselement zur Funktionsweise des jeweiligen Modells und werden ebenfalls im zugehörigen Kapitel genauer beschrieben. Ein weiteres Schlüsselement ist die zeitliche Entwicklung des Marktanteils der beiden Strategien. Sei  $N$  die Anzahl aller Agenten am Markt,  $n^f$  die Anzahl der Fundamentalisten und  $n^c$  die Anzahl der Techniker<sup>2</sup>. Zweckmäßig ist es nun eine Variable  $m_t^{c,f}$  einzuführen, welche den Anteil der Fundamentalisten  $m_t^f = n^f/N$  bzw. Techniker  $m_t^c = n^c/N$  angibt. Diese Notation erlaubt es, sich das Systemverhalten unabhängig von der Gesamtzahl der Agenten  $N$  zu betrachten. Da bei allen betrachteten Modellen mit Fundamentalisten und Technikern nur zwei unterschiedliche Strategien benutzt werden, ist es praktisch die Notation der Marktanteile auf  $m_t = m_t^f$  und  $1 - m_t = m_t^c$  zu vereinfachen. Die Mechanismen zur zeitlichen Änderung der Marktanteile sowie ihre Auswirkungen auf das Systemverhalten werden in den entsprechenden Modellbeschreibungen näher erläutert. Außerdem werden verschiedene Änderungen und Erweiterungen der Modelle, die im Modelltest am besten abgeschnitten haben, besprochen. Im ersten Schritt wird geschaut, ob die veränderten Modelle im Modelltest signifikant besser abschneiden als das Originalmodell. Sollte dies der Fall sein, so werden diese Modelle auch zur VaR-Schätzung verwendet.

---

<sup>2</sup>Das c steht hierbei für den englischen Begriff Chartisten

## 3.1 Modell von Franke und Westerhoff (2012, 2016)

Bei diesem Modell ist das Hauptmerkmal der unterschiedliche Zufallseinfluss auf die Trend- und Fundamentalstrategie. Dies wird im Modell durch eine unterschiedliche Volatilität im Zufallsanteil der beiden Strategien beschrieben, wobei die Volatilität der Trendstrategie höher ist als die der Fundamentalstrategie. Die Idee dahinter ist, dass die Techniker mit ihrem Spekulationsverhalten eine größere Heterogenität aufweisen<sup>3</sup>.

### 3.1.1 Basismodell

Die vollständige zeitliche Entwicklung des Modells beruht insgesamt auf zwei einfachen Gleichungen. Die erste Gleichung beschreibt die Entwicklung des logarithmischen Preises  $p_t$ , dessen Änderung  $\Delta p = p_t - p_{t-1}$  durch die Nachfrage der Fundamentalisten  $n_f$  sowie der Techniker  $n_c$  bestimmt wird. Für die Rendite gilt damit  $r_t = \Delta p$ :

$$\begin{aligned} p_t &= p_{t-1} + \mu [m_{t-1} \cdot (n_f + \sigma_f \epsilon_f) + (1 - m_{t-1}) \cdot (n_c + \sigma_c \epsilon_c)] \\ n_f &= \phi(p_f - p_{t-1}) \quad n_c = \chi(p_{t-1} - p_{t-2}) \end{aligned} \tag{3.1}$$

- $m$ : Marktanteil der Fundamentalisten
- $n_f, n_c$ : Nachfrage der Fundamentalisten bzw. Techniker
- $\sigma_f, \sigma_c$ : Volatilität der Fundamental- bzw. Trendstrategie
- $\epsilon_f, \epsilon_c$ : Unabhängige, normalverteilte Zufallsvariablen mit  $\epsilon \in N(0, 1)$
- $p_f$ : Fundamentalwert
- $\phi, \chi$ : Aggressivität der Fundamentalisten bzw. Techniker
- $\mu$ : Skalierungsfaktor

Der Fundamentalwert  $p_f$  und der Skalierungsfaktor  $\mu > 0$  sind hierbei frei wählbar und haben keinen direkten Einfluss auf das Systemverhalten<sup>4</sup>. Die systemrelevanten

---

<sup>3</sup>Dies ist im Originalmodell nicht so strikt vorgegeben, dort wird lediglich von unterschiedlichem Zufallseinfluss ausgegangen. Der Grund für diese Annahme liegt in der Vereinfachung der Optimierung begründet.

<sup>4</sup>Der Skalierungsfaktor  $\mu$  hat allerdings Einfluss darauf, in welchem Bereich die Parameter  $\phi$  und  $\chi$  liegen können, ohne dass das System instabil wird.

freien Parameter sind die Aggressivität der Fundamentalisten  $\phi > 0$  bzw. Techniker  $\chi > 0$ <sup>5</sup>, sowie der unterschiedliche Zufallseinfluss  $\sigma_f > 0$ ,  $\sigma_c \geq \sigma_f$  auf beide Strategien. Diese Parameter haben dabei ganz verschiedene Einflüsse auf das Systemverhalten. So beeinflussen die Parameter  $\phi$  und  $\chi$  die Autokorrelation der simulierten Rendite. Die Aggressivität der Fundamentalisten  $\phi$  bestimmt die Stärke des Mean-Reversion-Effektes, führt also zu negativer Autokorrelation der Rendite. Das genaue Gegenteil bewirkt die Aggressivität der Techniker  $\chi$ , dieser Parameter verstärkt bestehende Trends und führt somit zu einer positiven Autokorrelation der Rendite. Insgesamt hängt die beobachtete Autokorrelation also vom Verhältnis der Parameter  $\phi$  und  $\chi$  ab. Bei dominierendem  $\phi$  ist das Systemverhalten Mean-Reverting, während es bei dominierendem  $\chi$  trendverstärkend ist. Da Renditen in der Wirklichkeit keine signifikante Autokorrelation aufweisen, sollten sich entweder Einflüsse der beiden Parameter neutralisieren oder beide Parameter so klein sein, dass der Zufallsanteil  $\sigma_f \epsilon_f$  bzw.  $\sigma_c \epsilon_c$  die Preisänderung dominiert. Die Parameter  $\sigma_f$  und  $\sigma_c$  sind für die Volatilität des Modells verantwortlich. Haben diese beiden Parameter etwa die gleiche Größe, so zeigt das Modell immer eine konstante Volatilität. Interessant wird das Systemverhalten bei unterschiedlichen Werten von  $\sigma_f$  und  $\sigma_c$ . Dann ist das Modell in der Lage, Volatilitätsclustering zu erzeugen. Ob Volatilitätsclustering tatsächlich erzeugt wird, hängt aber auch noch von der zeitlichen Entwicklung des Marktanteils  $m_t$  der Fundamentalisten<sup>6</sup> ab. Ist dieser z.B. zeitlich konstant, so ist die Standardabweichung des Zufallsanteils der Preisänderung in (3.1) ebenfalls konstant. Für die Gesamtvolatilität des Systems gilt also:

$$\sigma = \sqrt{m_t^2 \sigma_f^2 + (1 - m_t)^2 \sigma_c^2} \quad (3.2)$$

Als letztes muss noch der Marktanteil in (3.1) bestimmt werden. Für diesen gilt:

---

<sup>5</sup>Hinter dieser Begrenzung steht die Annahme, dass die Techniker an sich verstärkende Trends glauben. Theoretisch ist es aber auch die umgekehrte Annahme  $\chi < 0$  möglich, siehe Franke und Westerhoff (2012).

<sup>6</sup>Es gilt  $m_t \in [0, 1]$  und für  $m_t = 1$  sind alle Agenten Fundamentalisten, während für  $m_t = 0$  alle Agenten Techniker sind.

### 3.1. MODELL VON Franke und Westerhoff (2012, 2016)

$$m_t = \frac{\exp(a_{t-1}^f)}{\exp(a_{t-1}^f) + \exp(a_{t-1}^c)} = \frac{1}{1 + \exp(a_{t-1})} \quad (3.3)$$

- $a_t = a_t^c - a_t^f$ : Indikator der Attraktivität
- $a_t^f, a_t^c$ : Attraktivität für die Fundamental- bzw. Trendstrategie

Dabei kann der Indikator für die Attraktivität  $a_t$  mit verschiedenen Ansätzen gebildet werden, welche ein unterschiedliches Verhalten der Agenten voraussetzen und daher auch zu verschiedenen Interpretationen des Agentenverhaltens sowie der Modellparametrisierung führen. Im Folgenden werden die verschiedenen Ansätze zur Bestimmung der Attraktivität erläutert.

## 3.1.2 Der Herdenansatz

### 3.1.2.1 Modelldarstellung

Bei einem Herdenansatz wird die Veränderung der Marktstimmung vor allem durch ein Herdenverhalten der Agenten erklärt. Da dies allerdings nicht ausreicht, um ein interessantes Systemverhalten zu erzeugen, müssen noch weitere Parameter spezifiziert werden. Für den Indikator ergibt sich dann:

$$a_t = \alpha_0 + \alpha_n \cdot (1 - 2m_t) - \alpha_m \cdot (p_f - p_t)^2 \quad (3.4)$$

- $\alpha_0, \alpha_n, \alpha_m$ : Bias-, Herden- und Revisionsparameter

Hierbei ist  $\alpha_0$  ein Bias, der eine der beiden Strategien grundsätzlich bevorzugt<sup>7</sup>,  $\alpha_n > 0$ <sup>8</sup> bezieht die Stärke des Herdentriebes und  $\alpha_m > 0$ <sup>9</sup> ist ein Revisionsfaktor, der dafür sorgt, dass Agenten zu Fundamentalisten werden, falls sich der

---

<sup>7</sup>Anders als bei Franke und Westerhoff (2016) bedeutet ein positiver Bias eine Bevorzugung der Trendstrategie, während ein negativer Bias die Fundamentalstrategie bevorzugt.

<sup>8</sup>Dies ist eine logische Einschränkung, welche dazu dient Anti-Herdenverhalten  $\alpha_n < 0$  zu verhindern, siehe Franke und Westerhoff (2016).

<sup>9</sup>Auch hier ist es unsinnig, von einem Verhalten auszugehen, welches die Fundamentalstrategie unattraktiver macht, je profitabler sie ist, was dem Fall von  $\alpha_m < 0$  entsprechen würde, siehe Franke und Westerhoff (2016).

Preis zu weit vom Fundamentalwert entfernt. Im Weiteren wird eine theoretische Erklärung des Systemverhaltens anhand der in (3.4) beteiligten Parameter versucht. Dies erfolgt zum einen, da sich so aus den Parameterwerten Rückschlüsse auf das Agentenverhalten und damit auf den unterliegenden Markt ziehen lässt. Der zweite Grund ist, dass sich damit die Parameter für die Optimierung eingrenzen lassen. Um einen genaueren Einblick in die Auswirkungen der Parameter  $\alpha_0$ ,  $\alpha_n$  und  $\alpha_m$  zu erhalten, ist es opportun, sich die stationären Punkte<sup>10</sup>  $(p^*, m^*)$  des rein deterministischen Systems  $\Delta p = p_t - p_{t-1} = 0$  und  $\Delta m = m_t - m_{t-1} = 0$  anzusehen. Aus 3.1 wird ersichtlich, dass der stationäre Punkt des Preises bei  $p^* = p_f$  ist. Um den stationären Punkt des Marktanteils zu bestimmen, ist es erforderlich, den Indikator  $a_t$  in seinen Fundamentdal- und Technikeranteil zu separieren und eine neue Parametrisierung einzuführen. Durch einen einfachen Wechsel der Parametrisierung auf  $z_t = m_t^f - m_t^c = 2m_t - 1$  mit  $z_t \in [-1, 1]$  und  $a_t = a_t^c - a_t^f$  gilt, ergibt sich insgesamt:

$$\begin{aligned} a_t^f &= -\frac{\alpha_0}{2} + \frac{\alpha_n}{2} \cdot z_t + \frac{\alpha_m}{2} \cdot (p_f - p_t)(p_f - p_t) \\ a_t^c &= \frac{\alpha_0}{2} - \frac{\alpha_n}{2} \cdot z_t - \frac{\alpha_m}{2} \cdot (p_f - p_t)(p_f - p_t) \\ a_t &= \frac{\exp(a_{t-1}^f) - \exp(a_{t-1}^c)}{\exp(a_{t-1}^f) + \exp(a_{t-1}^c)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Da am stationären Punkt  $p_t = p^* = p_f$  und  $m_t = m^*$  bzw.  $z_t = z^* = 2m^* - 1$  sind, vereinfacht sich die Gl. 3.5 zu  $a_t^f = -\alpha_0/2 + \alpha_n/2 \cdot z^* = a^*$  und  $a_t^c = \alpha_0/2 - \alpha_n/2 \cdot z^* = -a^*$ . Damit ergibt sich für  $z^*$  unter Verwendung der Gleichungen von (3.5):

$$z^* = \frac{\exp(a^*) - \exp(-a^*)}{\exp(a^*) + \exp(-a^*)} = \tanh(a^*) \quad (3.6)$$

Durch Einsetzen und Umstellen von (3.6) ergibt sich folgende Gleichung für den Stationären Punkt<sup>11</sup>:

<sup>10</sup>Ein stationärer Punkt oder auch Fixpunkt eines dynamischen Systems ist der Punkt, an dem das System einen konstanten Wert annimmt. Für einen beliebigen Parametervektor  $x$  mit dem funktionalen Zusammenhang  $f(x)$ , gilt also  $x = f(x)$  bzw.  $f(x_t) - f(x_{t+1}) = 0$  für alle  $t \in \mathbb{N}$ .

<sup>11</sup>Vergleiche hierzu Franke und Westerhoff (2016) für eine detaillierte Herleitung und Erklärung der stationären Punkte. Auch wenn in dieser Version eine andere Funktion für die zeitliche Änderung des Marktanteils gewählt wurde, so gelten für sie die selben Schlussfolgerungen.

### 3.1. MODELL VON Franke und Westerhoff (2012, 2016)

$$f(z^*) = -\frac{\alpha_0}{2} + \frac{\alpha_n}{2} \cdot z^* - \operatorname{arctanh}(z^*) = 0 \quad (3.7)$$

Für die weitere Diskussion des Systems sind vier Fallunterscheidungen von Bedeutung:

1. Sollte  $0 < \alpha_n < 2$  sein, so existiert nur ein stabiler stationärer Punkt bei  $z^*$ , dessen Lage durch  $\alpha_0$  bestimmt wird ( $z^* = 0$  für  $\alpha_0 = 0$  und  $z^* < 0$  für  $\alpha_0 > 0$  bzw.  $z^* > 0$  für  $\alpha_0 < 0$ ).
2. Für  $\alpha_n > 2$  und  $\alpha_0^f < \alpha_0 < \alpha_0^c$  gibt es drei stationäre Punkte im System bei<sup>13</sup>  $z^c$ ,  $z^*$  und  $z^f$ . Davon ist  $z^*$  stabil und die anderen instabil<sup>14</sup>.
3. Für  $\alpha_n > 2$  und  $\alpha_0 < 0$  verschwinden die stationären Punkte  $z^c$ ,  $z^*$  ab einem bestimmten kritischen Wert  $\alpha_0^f$  und es bleibt nur der Punkt  $z^f$  übrig.
4. Analog verschwinden für  $\alpha_n > 2$  und  $\alpha_0 > 0$  ab einem bestimmten kritischen Wert  $\alpha_0^c$  die stationären Punkte  $z^f$ ,  $z^*$  und es bleibt nur der Punkt  $z^c$  übrig.

Von diesen vier verschieden möglichen Systemausprägungen sind allerdings nur Fall eins und vier wirklich relevant, da Fall zwei und drei zu einem Systemverhalten führt, was ökonomisch unsinnige Schlussfolgerungen nach sich zieht. Um dies genauer zu erläutern, ist es erforderlich, das Verhalten von  $z_t$  genauer zu betrachten. Um grundlegende Aussagen darüber ziehen zu können, ist es ausreichend, sich die Nullklinen<sup>15</sup>

---

<sup>12</sup>Dabei sind  $\alpha_0^f$  und  $\alpha_0^c$  kritische Schwellenwerte im Fundamental- bzw. Technikerbereich von  $z$ . Werden diese Werte über- bzw. unterschritten, so geht das Modell in einen neuen Systemzustand über.

<sup>13</sup>Dabei liegt  $z^c$  bzw.  $z^f$  immer im Bereich, in dem die Techniker bzw. Fundamentalisten dominieren. Des Weiteren gilt  $1 > z^f > z^* > 0$ .

<sup>14</sup>Ein stabiler stationärer Punkt  $x_S$  zeichnet sich dadurch aus, dass eine Abweichung vom stationären Punkt zu diesem hin korrigiert wird. Bei einem instabilen stationären Punkt dagegen vergrößern sich die Abweichungen. Daher kann ein dynamisches System nur in einen instabilen stationären Punkt geraten, wenn es genau dort startet.

<sup>15</sup>Eine Nullkline ist ein Spezialfall einer Isokline. Isoklinen im Allgemeinen werden als grafisches Hilfsmittel zur Lösung von Differentialgleichungen bzw. dynamischen Systemen verwendet. Sollte die exakte Lösung nicht oder nur sehr aufwändig bestimmbar sein, so können Isoklinen dazu benutzt werden, um einen Einblick in das Verhalten des Systems zu bekommen. Formal zeichnen sich

$\Delta z = z_{t+1} - z_t = 0$  im  $(z_t, p_t)$  Phasenraum<sup>16</sup> anzusehen<sup>17</sup>. Da die  $z$ -Nullkline die Punkte des Phasenraums beschreibt, an denen sich  $z$  nicht mehr ändert, lässt sich mit ihrer Hilfe der Phasenraum die Bereiche  $\Delta z > 0$  und  $\Delta z < 0$  aufteilen. Da sich der Marktanteil im Modell rein deterministisch verhält, wird eine Abweichung von der  $z$ -Nullkline immer wieder zu dieser hin korrigiert. Um dies zu verdeutlichen, sind in den folgenden Phasenraumgrafiken weitere Isoklinen eingezeichnet. Aus der Position dieser weiteren Isoklinen lässt sich auch eine Aussage über die Stärke der Änderungen ziehen. Je näher die Isoklinen zusammen liegen, desto stärker ist dort die Änderung von  $z$ . Im Weiteren wird sich zeigen, dass diese Separation des Phasenraums ausreicht, um das Systemverhalten hinreichend zu erklären. Aus (3.5) ergibt sich dann  $\Delta z = z_{t+1} - z_t = \tanh(a_t) - z_t = 0$ . Umstellen führt dann zu folgender Gleichung für die Nullkline<sup>18</sup>:

$$\Delta z = -\frac{\alpha_0}{2} + \frac{\alpha_n}{2}z_t + \frac{\alpha_m}{2}(p_f - p_t)^2 - \operatorname{arctanh}(z_t) = 0 \quad (3.8)$$

Aus der Formel (3.8) wird ersichtlich, dass für Preise  $p_t \gg p_f$  bzw.  $p_t \ll p_f$ , die sehr weit vom Fundamentalwert  $p_f$  entfernt liegen,  $z_t$  gegen Eins konvergieren muss<sup>19</sup>. Des Weiteren wird ersichtlich, dass das Minimum für  $z_t$  immer beim Wert  $p_t = 0$ , also am stationären Punkt, liegt<sup>20</sup>. Zur weiteren Kategorisierung des Systems ist es nützlich, sich die Lage der Nullkline im Phasenraum zu den vier verschiedenen Fallunterscheidungen anzusehen.

---

Isoklinen dadurch aus, dass sie Linien konstanter Änderung darstellen. Für einen beliebigen Parametervektor  $x$  mit dem funktionalen Zusammenhang  $f$  gilt also für seine Isoklinen  $f(x_{t+1}) - f(x_t) = C$  und für den Spezialfall der Nullkline  $f(x_{t+1}) - f(x_t) = 0$ .

<sup>16</sup>Der Phasenraum ist der Raum, der alle Zustände eines dynamischen Systems abbildet. Die Dimension des Phasenraums entspricht daher auch der Anzahl der Freiheitsgrade des Systems, also der Anzahl jeder unabhängigen Variable des Systems. Daher muss jeder Punkt im Phasenraum einer gemeinsamen Ausprägung der Variablen des Systems entsprechen.

<sup>17</sup>Vergleiche hierzu auch Franke und Westerhoff (2016).

<sup>18</sup>Dieser Zusammenhang findet sich auch bei Franke und Westerhoff (2016) und wird dort genauer erläutert.

<sup>19</sup>Da die Parameter  $\alpha_0$ ,  $\alpha_n$  und  $\alpha_m$  immer endlich und positiv sind sowie  $z \in [-1, 1]$  gilt, dominiert für  $|p_t| \rightarrow \infty$  der quadratische Revisionsterm den Parameterteil der Gleichung (3.8). Da dieser Ausdruck immer positiv ist, muss, damit die Beziehung  $\Delta z = 0$  erhalten bleibt,  $z_t \rightarrow 1$  gelten, da für  $\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{arctanh}(z_t) \rightarrow \infty$  gilt.

<sup>20</sup>Bei mehreren stationären Punkten liegt das Minimum am Punkt  $z^c$ .

3.1. MODELL VON Franke und Westerhoff (2012, 2016)

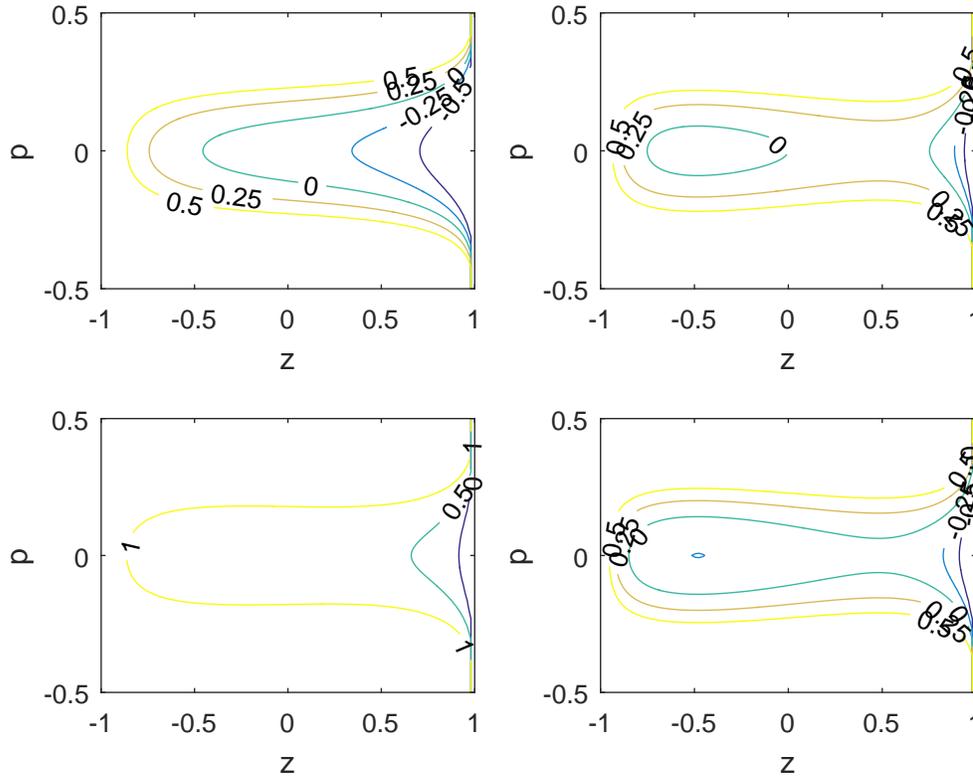


Abbildung 3.1: Abbildung des Phasenraum des Herdenmodells für  $\alpha_n < 2$  (Fall 1, links oben),  $\alpha_n > 2$  und  $\alpha_0 = 0$  (Fall 2, rechts oben),  $\alpha_n > 2$  und  $\alpha_0 < \alpha_0^f$  (Fall 3, links unten),  $\alpha_n > 2$  und  $\alpha_0 > \alpha_0^c$  (Fall 4, rechts unten).

Aus Abbildung 3.1 wird ersichtlich, warum die Fälle  $\alpha_n > 2$  und  $\alpha_0 \leq \alpha_0^f$  bzw.  $\alpha_0^f < \alpha_0 < \alpha_0^c$  ausgeschlossen werden sollten. Im Fall  $\alpha_n > 2$  und  $\alpha_0 \leq \alpha_0^f$  gibt es nur einen Fixpunkt bei  $z^f$  weit im Fundamentalregime und aus der Beschaffenheit der Nullkline ergibt sich also ein Systemverhalten, welches kaum eine Variation des Marktanteils zulässt und dementsprechend einem Random-Walk gleicht. Das Problem liegt hierbei bei der ökonomischen Interpretation des Marktanteils sowie der individuellen Systemparameter. Ersteres ist problematisch, da der konstant hohe Anteil an Fundamentalisten impliziert, dass Spekulation praktisch nicht vorkommt, der Markt also annähernd effizient ist. Das zweite Problem der Interpretation der Sy-

stemparameter liegt darin begründet, dass in den ausgeschlossenen Fällen ein Großteil der Parameter kaum Auswirkungen auf das Systemverhalten insgesamt zeigt. Die einzigen Parameter, welche einen wirklichen Effekt auf das Systemverhalten im Fall 3 aufweisen, sind die beiden Fundamentalparameter  $\phi$  und  $\sigma_f$ . Ähnlich verhält es sich im Fall 2. Zwar existieren hier drei Fixpunkte, allerdings wird das System für  $t \rightarrow \infty$  immer im Fixpunkt  $x^f$  landen. Erklären lässt sich dies mit der Lage der Nullklinen in Abbildung 3.1. Sobald sich der Preis im Technikerbereich ober- bzw. unterhalb der Nullkline befindet, wird der Marktanteil durch die Beschaffenheit des Phasenraums zur Nullkline im Fundamentalebereich konvergieren. Einmal dort angekommen, kann sich das System nur noch um diese Nullkline bewegen, was zu demselben Verhalten wie im Fall 3 führt. Das Ausschließen des Falles 3 lässt sich sehr einfach mit der Restriktion  $\alpha_0 > 0$  realisieren. Ohne jede weitere Einflussgröße ist es also für Agenten attraktiver, eine technische Strategie zu verfolgen<sup>21</sup>. Den Fall 2 auszuschließen ist etwas komplexer. Dafür darf die Gleichung (3.6) für den Bereich  $0 < z < 1$  keine Lösung mehr aufweisen. Aus (3.7) wird ersichtlich, dass dies von  $\alpha_0$  und  $\alpha_n$  abhängt. Wird  $\alpha_0$  bei konstantem  $\alpha_n$  immer weiter erhöht, so existiert ein Wert  $\alpha_0^c$ , für den kein stationärer Punkt im Bereich  $0 < z < 1$  mehr existiert<sup>22</sup>. Der Wert von  $\alpha_0^c$  muss dabei um so größer sein, desto größer  $\alpha_n$  ist.

Eine Lösung zur Bestimmung dieses  $\alpha_0^c$  lässt sich finden, indem das Maximum der Funktion  $f(z)$  gesucht wird. Durch Nullsetzen der ersten Ableitung von  $f(z)$  ergibt sich  $z_c = \sqrt{1 - 2/h}$  für die Lage des Maximums<sup>23</sup>. Durch Einsetzen von  $z_c$  in (3.7) kann der Wert berechnet werden, den  $\alpha_0$  maximal annehmen darf, damit sich im Bereich  $0 < z < 1$  noch ein stationärer Punkt befindet:

$$\alpha_0^z = \alpha_n \sqrt{1 - \frac{2}{\alpha_n}} - 2 \operatorname{arctanh} \left( \sqrt{1 - \frac{2}{\alpha_n}} \right) \quad (3.9)$$

Damit gilt für  $\alpha_0^z(\alpha_n)$  insgesamt die Fallunterscheidung:

---

<sup>21</sup>Dies ist eine realistische Annahme, da in der Realität die Fundamentalanalyse höhere Opportunitätskosten erfordert als eine technische Analyse.

<sup>22</sup>Siehe Franke und Westerhoff (2016) für mehr Details dazu.

<sup>23</sup>Durch ein Bilden der zweiten Ableitung lässt sich zeigen, dass dies immer das Maximum der Funktion  $f(z)$  für  $\alpha_n > 2$  ist.

3.1. MODELL VON Franke und Westerhoff (2012, 2016)

$$\alpha_0 > \begin{cases} 0 & \text{für } \alpha_n \leq 2 \\ \alpha_0^z & \text{für } \alpha_n > 2 \end{cases} \quad (3.10)$$

Zum besseren Verständnis des Systemverhaltens ist es nötig, sich noch den Einfluss der Parameter  $\alpha_0$ ,  $\alpha_n$  und  $\alpha_m$  anzusehen. Dazu ist es wieder vorteilhaft, sich den Einfluss der verschiedenen Parameter für die beiden erlaubten Fälle in (3.8) zu visualisieren:

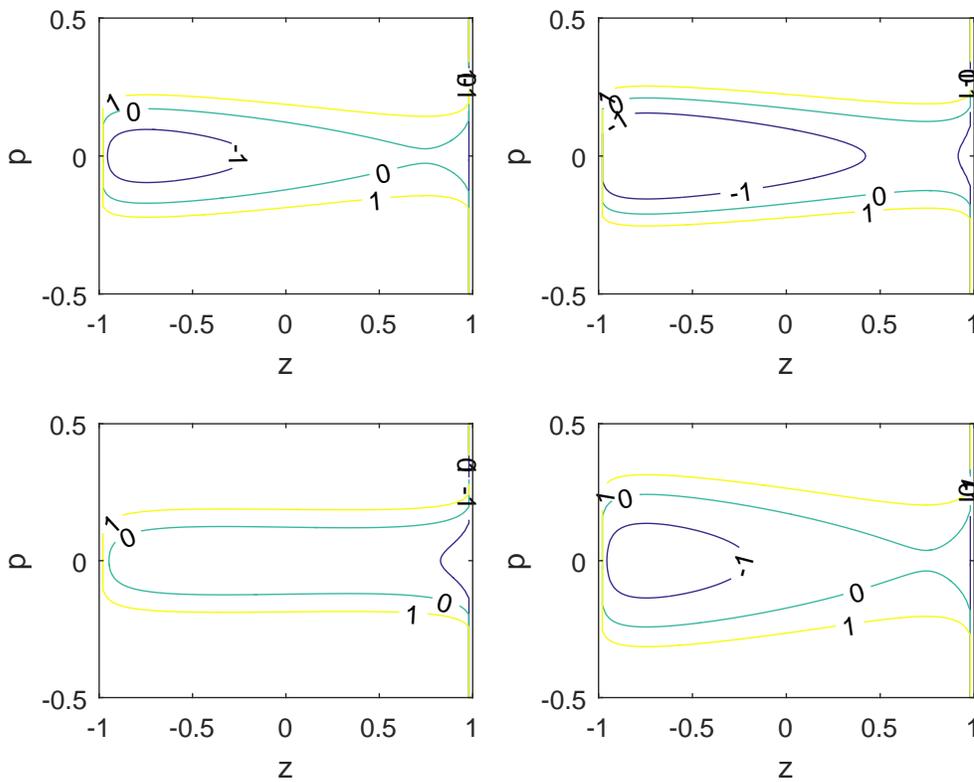


Abbildung 3.2: Abbildung der Nullkline des Herdenmodells in (3.8) für  $\alpha_0 = 1.5$ ,  $\alpha_n = 4.5$ ,  $\alpha_m = 100$  (links oben),  $\alpha_0 = 3.0$ ,  $\alpha_n = 4.5$ ,  $\alpha_m = 100$  (rechts oben),  $\alpha_0 = 1.5$ ,  $\alpha_n = 2.25$ ,  $\alpha_m = 100$  (links unten),  $\alpha_0 = 1.5$ ,  $\alpha_n = 4.5$ ,  $\alpha_m = 50$  (rechts unten).

## KAPITEL 3. VERWENDETE AGENTENMODELLE

Vergleich der simulierten Rendite- und Marktanteilszeitreihen unter Variation der Parameter  $\alpha_0$ ,  $\alpha_n$  und  $\alpha_m$

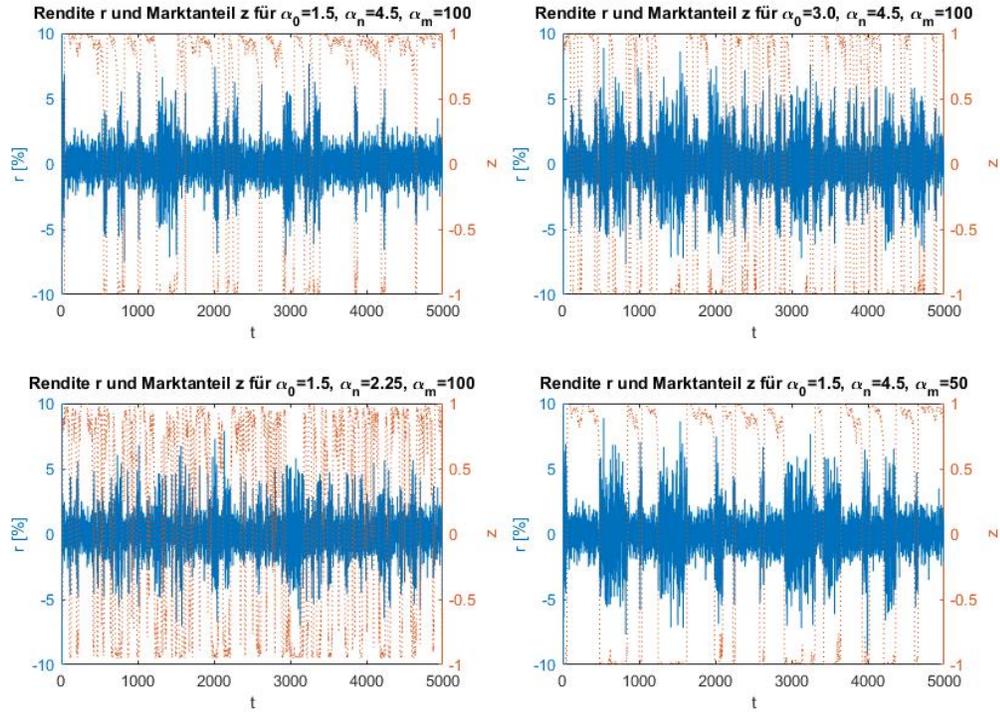


Abbildung 3.3: Simulierte Rendite und Marktanteil des Herdenmodells für verschiedene Parameterkonstellationen von  $\alpha_0$ ,  $\alpha_n$  und  $\alpha_m$ . Die übrigen Parameter wurden dabei mit  $p_f = 0$ ,  $\alpha = 0.01$ ,  $\phi = 1$ ,  $\chi = 1$ ,  $\sigma_f = 1$ ,  $\sigma_f = 2.5$  gewählt. Insgesamt führen größere Werte für  $\alpha_0$  und  $\alpha_n$  zu einem stärkeren Volatilitätsclustering und kleinere Werte führen eher zu einer normalverteilten Rendite, während höhere Werte für  $\alpha_m$  genau das Gegenteil bewirken.

Abbildung 3.2 und Abbildung 3.3 zeigen, wie sich das zu erwartende Systemverhalten unter Variation der verschiedenen Parameter ändert. Eine Erhöhung von  $\alpha_0$  führt zur Vergrößerung der Nullkline, was wiederum dazu führt, dass das System selbst für größere Abweichungen vom Fundamentalwert  $p_f$  noch von Technikern dominiert wird, während umgekehrt die Phase, in der die Fundamentalisten dominieren, schnell wieder verlassen wird. Dem entgegen führt eine Erhöhung des Parameters  $\alpha_m$  zur Verkleinerung der Nullkline, was wiederum die Phase der Dominanz der Funda-

### 3.1. MODELL VON Franke und Westerhoff (2012, 2016)

mentalisten gegenüber den Technikern erhöht. Der Parameter  $\alpha_n$  wiederum bewirkt eine Vergrößerung der Nullkline im Bereich der von Technikern dominierten Phase, während gleichzeitig die Nullkline im von Fundamentalisten dominiertem Bereich verkleinert wird. Ein größerer Wert des Parameters  $\alpha_n$  bewirkt insgesamt also eine höhere Verweildauer in beiden Bereichen des Phasenraums. Damit ist das System in der Lage, sowohl stabil in beiden Marktphasen zu verbleiben, als auch plötzliche Änderungen des Marktanteils zu erzeugen, was zusammen mit unterschiedlichen Volatilitäten  $\sigma_f$  und  $\sigma_c$  zu Volatilitätsclustering führt.

#### 3.1.2.2 Zu erwartendes Systemverhalten

Es bleibt noch zu diskutieren, wie das erwartbare Verhalten des Modells für Krisen und normale Zeiten aussieht. Da Krisen durch eine insgesamt höhere Volatilität und starkes Volatilitätsclustering gekennzeichnet sind, muss das Modell zur Replikation dieser Features in der Lage sein, einen sich schnell wechselnden Marktanteil zu induzieren und dazu gleichzeitig dafür zu sorgen, dass das System eine längere Zeit in einer der beiden Phasen verbleibt. Unter welchen Voraussetzungen dies erreicht werden kann, wurde ausführlich in der theoretischen Abhandlung des Modells untersucht, von daher sollten solche Zeiten entweder durch einen hohen Herdenparameter  $\alpha_n$  oder einen hohen Parameter  $\alpha_0$  gekennzeichnet sein, da sich die Nullkline um den stationären Punkt vergrößern muss, um die hohe Volatilität in der von Technikern dominierten Phase<sup>24</sup> zu kompensieren<sup>25</sup>. Mit steigendem  $\alpha_0$  bzw.  $\alpha_n$  ist allerdings auch zu erwarten, dass der Parameter  $\alpha_m$  ebenfalls größer wird, da ansonsten kein Phasenwechsel stattfinden kann. Des Weiteren ist anzunehmen, dass  $\phi$  und  $\chi$  klein genug gegenüber  $\sigma_f$  und  $\sigma_c$  sein müssen, um eine zu starke Autokorrelation der Rendite zu verhindern, da die von  $\phi$  und  $\chi$  ausgelösten gegenteiligen Autokorrelationen sich dann nicht einfach kompensieren können. Problematischer ist eine eindeutige Defini-

---

<sup>24</sup>Natürlich muss dafür auch  $\sigma_c > \sigma_f$  gelten, da ansonsten kein Unterschied zwischen den Phasen besteht.

<sup>25</sup>Eine höhere Volatilität führt dazu, dass sich die Aufenthaltszeit des Systems in der jeweiligen Phase verringert, da große Preissprünge, welche einen Phasenwechsel herbeiführen können, tendenziell häufiger auftreten. Um ein längeres Verbleiben in der Phase zu ermöglichen, muss sich die Nullkline in dem Bereich also vergrößern.

tion des Normalfalles. Hier gibt es mehrere Lösungen, die zu einer normalverteilten Rendite führen. Eine Möglichkeit ist die durchgehende Dominanz von Fundamentalisten bzw. Technikern<sup>26</sup>. Eine weitere Möglichkeit ist ein variierender Marktanteil bei ähnlichem  $\sigma_f$  und  $\sigma_c$ . Dabei sind sowohl plötzliche als auch langsame Änderungen möglich. Rein von der Interpretation des Systemverhaltens wäre hierbei natürlich eine langsame Änderung wünschenswert, da sich so Krisenzeiten deutlich in einer Änderung des Systemverhaltens ausdrücken würden. Im Weiteren wird nur die allgemeine Voraussetzung  $\alpha_0 > 0$  genauer untersucht und auf ihre Aussagekraft, sowie Prognosefähigkeit überprüft. Der Grund hierfür ist, dass die beiden anderen Fälle  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_n > 2$  unter der Berücksichtigung von (3.10) sowie  $\alpha_0 > 0$  und  $\alpha_n < 2$  bereits im Fall  $\alpha_0 > 0$  enthalten sind<sup>27</sup>. Ziel dabei ist es, ein möglichst konsistentes Verhalten des Systems für normale und Krisenzeiten mit einem eindeutigen Übergang zwischen beiden Phasen zu erhalten. Allerdings haben Untersuchungen von anderen Agentenmodellen gezeigt<sup>28</sup>, dass die Zielfunktion teilweise sehr flache Oberflächen bildet, was dazu führt, dass viele Parametersätze ein sehr ähnliches Endergebnis erzeugen. Dies führt dazu, dass es fast unmöglich ist, das globale Minimum zu finden und es von daher sehr wahrscheinlich ist, dass nur ein lokales Optimum Ergebnis einer Optimierung wird. Da die untersuchten Modelle allesamt weniger freie Parameter als der hier verwendete Herdenansatz besitzen, ist nicht davon auszugehen, dass bei der Optimierung dieses Modells das Auffinden des globalen Optimums keine realistische Option ist<sup>29</sup>.

---

<sup>26</sup>Warum dies ein suboptimales Ergebnis darstellt, wurde bereits für den von Fundamentalisten dominierten Fall erläutert und gilt äquivalent für die Dominanz der Techniker.

<sup>27</sup>Zusätzlich gilt für den Fall  $\alpha_0 > 0$  und  $\alpha_n < 2$ , dass der Herdenparameter  $\alpha_n$  hier zu klein ist, um eine wirkliche Auswirkung auf das Systemverhalten zu haben. Daher kann  $\alpha_n$  auch vollständig weggelassen werden, was zu einem System führt, das nur noch vom Bias  $\alpha_0$  und dem Revisionsparameter  $\alpha_m$  abhängig ist. Das Verhalten dieses reduzierten Modells wird in einem eigenen Kapitel genauer untersucht.

<sup>28</sup>Wie bereits erwähnt finden sich weitere Details dazu bei Winker et al. (2007); Jang (2015); Chen und Lux (2018); Platt (2020)

<sup>29</sup>Wobei zusätzlich bei diesem Modell noch hinzukommt, dass die Parameter  $\alpha_0$ ,  $\alpha_n$  und  $\alpha_m$  sich teilweise gegensätzlich auf das Systemverhalten auswirken, was das Auffinden des globalen Optimums zusätzlich erschwert.

### 3.1.3 Der Bias-Revisionsansatz

#### 3.1.3.1 Modelldarstellung

Aus der Untersuchung des Herdenansatzes wurde ersichtlich, dass das System für den Fall eines niedrigen Herdenparameters  $\alpha_n$  ein anderes Systemverhalten zeigt als für  $\alpha_n > 2$ . Da der Herdenparameter  $\alpha_n$  in diesem Spezialfall zu klein und zu wenig variabel ist, um einen großen Einfluss auf das Verhalten des Systems zu entwickeln, muss sich das beobachtbare Systemverhalten also mit Hilfe der übrigen Parameter  $\alpha_0$  und  $\alpha_m$  erklären lassen. Unter dieser Prämisse ist es also möglich, das Systemverhalten zu vereinfachen, indem der Herdenparameter  $\alpha_n$  aus dem Modell entfernt wird. Übrig bleibt ein Modell, in dem die Änderung des Marktanteils nur durch den Biasparameter  $\alpha_0$  und den Revisionsparameter  $\alpha_m$  beschrieben wird. Damit ergibt sich für den Indikator der Marktstimmung in (3.4):

$$a_t = \alpha_0 - \alpha_m \cdot (p_f - p_t)^2 \quad (3.11)$$

- $\alpha_0, \alpha_m$ : Bias- und Revisionsparameter
- $p_t, p_f$ : Aktueller Preis bzw. Fundamentalwert

Um das Systemverhalten nun genauer zu beschreiben, ist es wieder zweckmäßig, sich die stationären Punkte  $(p^*, z^*)$  anzusehen. Für den stationären Punkt des Preises gilt hier ebenfalls  $p_t = p^* = p_f$  und für den stationären Punkt von  $z_t$  ergibt sich nach (3.7) nun:

$$z^* = \tanh(a^*) = \tanh\left(-\frac{\alpha_0}{2}\right) \quad (3.12)$$

Nach (3.12) gibt es also nur einen stationären Punkt für  $z^*$ , der sich im Bereich  $z^* \in (-1, 0)$  für  $0 < \alpha_0 < \infty$ ,  $z^* = 0$  für  $\alpha_0 = 0$  und  $z^* \in (0, 1)$  für  $-\infty < \alpha_0 < 0$  befindet<sup>30</sup>. Dieser stationäre Punkt ist für alle Werte von  $\alpha_0$  stabil<sup>31</sup>. Auch die Gleichung für die Nullkline  $\Delta z = z_{t+1} - z_t = 0$  in (3.8) lässt sich ohne den Parameter  $\alpha_n$  noch einmal vereinfachen:

<sup>30</sup>Vergleiche dazu auch Fall 1 beim Herdenansatz.

<sup>31</sup>Das Argument hierfür ist dasselbe wie im Fall 1 des Herdenmodells. Für eine genauere Beschreibung dazu siehe Franke und Westerhoff (2016).

$$\Delta z = -\frac{\alpha_0}{2} + \frac{\alpha_m}{2}(p_f - p_t)^2 - \operatorname{arctanh}(z_t) = 0 \quad (3.13)$$

Wird der Parameters  $\alpha_0$  nicht auf den Bereich  $\alpha_0 > 0$  eingeschränkt, tritt auch beim reduzierten Modell dasselbe Problem wie im Fall 3 des Herdenmodells auf<sup>32</sup>.

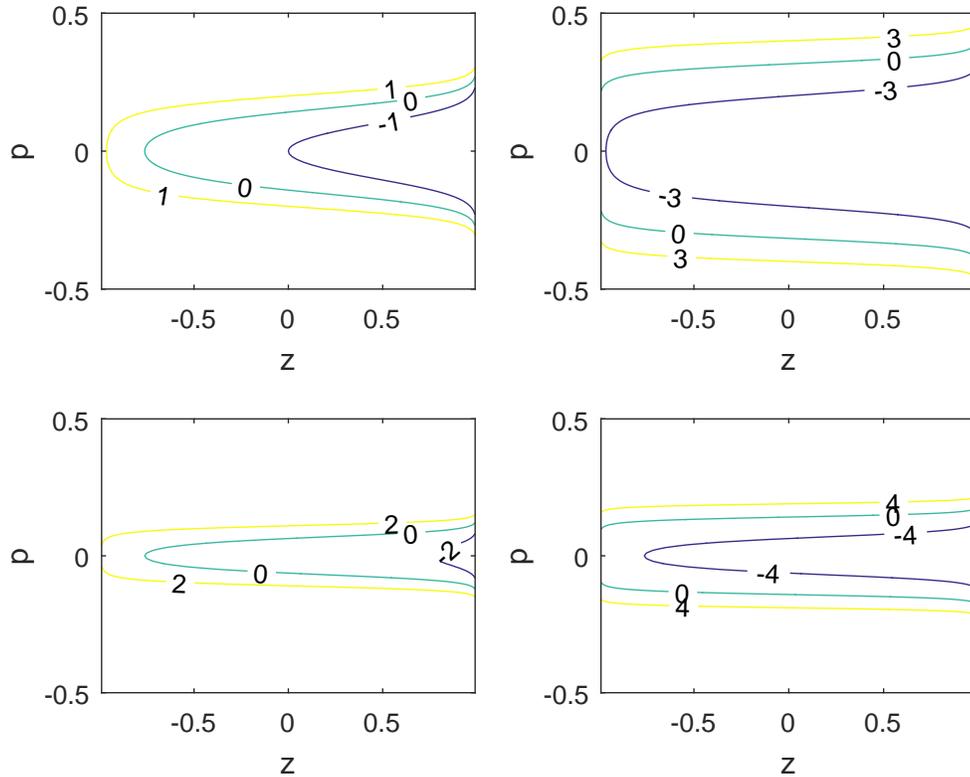


Abbildung 3.4: Abbildung des Verlaufs der Nullkline des Bias-Reversions-Modells in (3.8) für  $\alpha_0 = 2$ ,  $\alpha_m = 100$  (links oben),  $\alpha_0 = 10$ ,  $\alpha_m = 100$  (rechts oben),  $\alpha_0 = 2$ ,  $\alpha_m = 500$  (links unten),  $\alpha_0 = 10$ ,  $\alpha_m = 500$  (rechts unten).

Um genauere Aussagen über das Systemverhalten ziehen zu können, muss nun noch betrachtet werden, wie sich die Nullkline und daraus resultierend die Rendite für

<sup>32</sup>Es existiert also nur ein stationärer Punkt, der sich weit im von Fundamentalisten dominierten Bereich der Variable  $z$  befindet. Dies führt wiederum zu denselben ökonomisch und Parameter bezogenen, problematischen Schlussfolgerungen wie im Fall des Herdenmodells.

### 3.1. MODELL VON Franke und Westerhoff (2012, 2016)

verschiedene Parameterkonstellationen von  $\alpha_0$  und  $\alpha_m$  verhält.

Vergleich der simulierten Rendite- und Marktanteilszeitreihen unter Variation der Parameter  $\alpha_0$  und  $\alpha_m$

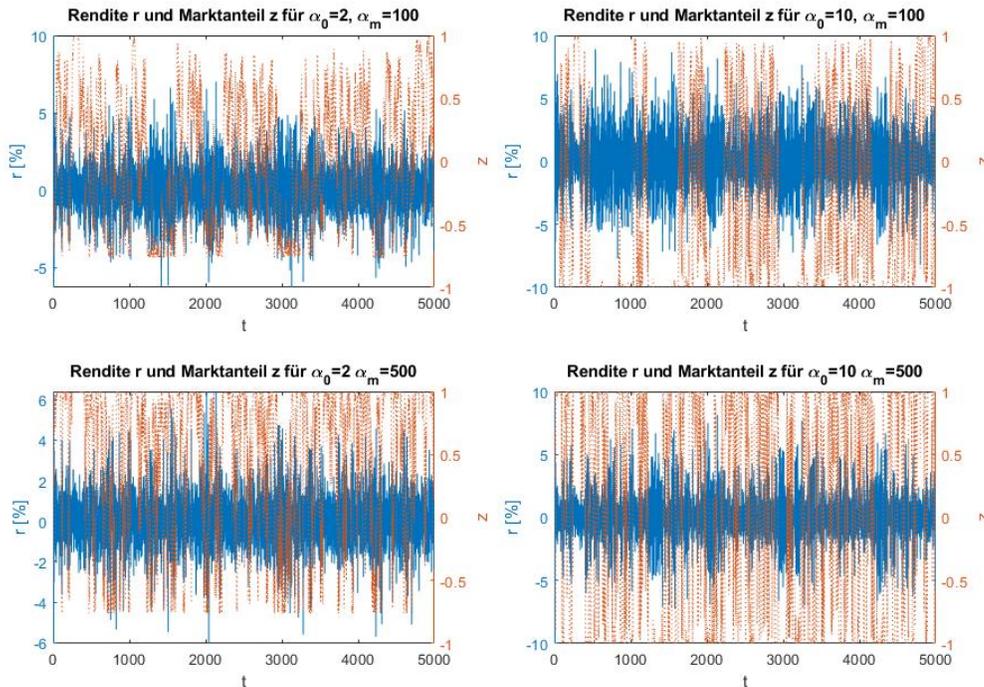


Abbildung 3.5: Simulierte Rendite und Marktanteil des Bias-Reversions-Modells für verschiedene Parameterkonstellationen von  $\alpha_0$  und  $\alpha_m$ . Die übrigen Parameter wurden dabei mit  $p_f = 0$ ,  $\alpha = 0.01$ ,  $\phi = 1$ ,  $\chi = 1$ ,  $\sigma_f = 1$ ,  $\sigma_f = 3$  gewählt. Insgesamt führen größere Werte für  $\alpha_0$  zu einem stärkeren Volatilitätsclustering und kleinere Werte führen eher zu einer normalverteilten Rendite, während höhere Werte für  $\alpha_m$  genau das Gegenteil bewirken.

Sind gleichzeitig die Parameter  $\alpha_0$  und  $\alpha_m$  nicht allzu groß, so findet hier eine langsame Änderung des Marktanteils entlang der Nullkline statt, wie auch unter anderem in Abbildung 3.4 und Abbildung 3.5 gezeigt wird. Für größere Werte von  $\alpha_0$  und  $\alpha_m$  wird die Nullkline so weit zusammengedrückt, dass plötzliche Änderungen des Marktanteils bei entsprechend höher Volatilität auftreten. Im Gegensatz zum Fall 4 ist hier allerdings die potenzielle Aufenthaltszeit im Fundamentalregime geringer, da

ein Einknicken der Nullkline im Bereich  $0 < z < 1$  nicht existiert.

### 3.1.3.2 Zu erwartendes Systemverhalten

Es bleibt noch, das Systemverhalten des Modells in Krisen und normalen Zeiten zu diskutieren. In diesem Modell ist die Definition des Krisen- und Normalfalls etwas einfacher. Im Fall von Krisen muss das Modell höhere Werte für  $\alpha_0$  und  $\alpha_m$  sowie größere Volatilität in der Techniker Phase aufweisen. Des Weiteren ist zu erwarten, dass die Parameter  $\phi$  und  $\chi$  wie beim Herdenmodell wieder relativ klein gegenüber den Zufallsparametern  $\sigma_f$  und  $\sigma_c$  sind. Für den Normalfall gibt es drei mögliche Systemeinstellungen. Erstens die Möglichkeit eines variierenden Marktanteils bei ähnlicher Volatilität der beiden Strategien. Die Variation kann dabei entweder als plötzliche oder langsame Änderung stattfinden. Zweitens würde ein erhöhter Wert von  $\alpha_0$  gegenüber  $\alpha_m$  dazu führen, dass das System am Fixpunkt feststeckt, was keinen Phasenwechsel und damit auch keine Änderung der Volatilität zulässt. Und drittens besteht die Möglichkeit  $\alpha_m$  deutlich gegenüber  $\alpha_0$  zu erhöhen, was die Nullkline um  $p = 0$  sehr stark zusammendrückt und somit die Aufenthaltsdauer in der Technikerphase zu kurz wird, um Volatilitätsclustering zu generieren<sup>33</sup>. Im ersteren Fall würden sich Krisenzeiten nur durch die höhere Volatilität im von Technikern dominierten Markt unterscheiden, während im zweiten und dritten Fall die Unterscheidung durch die Parameter  $\alpha_0$  und  $\alpha_m$  erfolgen würde. Obwohl dieses Modell über einen freien Parameter weniger verfügt als das Herdenmodell, besteht hier dasselbe Problem beim Auffinden des globalen Optimums.

## 3.1.4 Der Gewinnansatz

### 3.1.4.1 Modelldarstellung

Eine weitere Möglichkeit, mit der sich ein variierender Marktanteil beschreiben lässt, ist ein gewinnorientierter Ansatz. Hierbei wird der erzielte Gewinn beider Strategien bestimmt und miteinander verglichen. Die Agenten sind dann bestrebt, möglichst zu

---

<sup>33</sup>Zwei Phasen wird es für diesen Fall immer geben, da das Minimum des Fixpunktes bei  $z^* = 0$  liegt.

### 3.1. MODELL VON Franke und Westerhoff (2012, 2016)

der Strategie mit der besseren Gewinnperformance zu wechseln. Je stärker diese voneinander abweicht, desto mehr Agenten verfolgen die besser performende Strategie. Formal lässt sich ein solcher Ansatz wie folgt beschreiben. Sei  $G_t^{f,c}$  der erzielte Gewinn der Fundamental- bzw. Technikerstrategie zum Zeitpunkt  $t$  und  $\alpha_w$  ein Parameter, der den Einfluss des Gewinns auf die Entscheidung der Agenten zum Strategiewechsel bestimmt. Für den Indikator der Marktstimmung ergibt sich dann:

$$a_t = \alpha_w \cdot (G_t^c - G_t^f) \quad (3.14)$$

- $\alpha_w$ : Einflussparameter des Gewinns/Verlusts auf die Strategie
- $G_t^f, G_t^c$ : Gewinn der Fundamental- bzw. Technikerstrategie

Der Parameter  $\alpha_w$  in (3.14) kann dabei als ein Indikator für die Rationalität der Agenten angesehen werden. Für den Fall  $\alpha_w = 0$  ist die Wahl der Strategien rein zufällig, während für  $\alpha_w \rightarrow \infty$  immer die Strategie mit der besten Performance verfolgt wird<sup>34</sup>. Es bleibt noch zu spezifizieren, wie der Gewinn bzw. Verlust der beiden Strategien genau in die Entscheidung miteinbezogen wird. Genauer gesagt geht es darum, inwiefern in der Vergangenheit liegende Gewinne bzw. Verluste sich auf die gegenwärtige Strategie auswirken. Sei  $\eta$  ein Parameter, welcher den Einfluss vergangener Gewinne auf die Entscheidung beschreibt. In der Literatur gibt es nun zwei Möglichkeiten, diesen zu implementieren<sup>35</sup>:

$$\begin{aligned} G_t^{f,c} &= \eta \cdot G_{t-1}^{f,c} + [\exp(p_t) - \exp(p_{t-1})] \cdot d_{t-2}^{f,c} \\ G_t^{f,c} &= \eta \cdot G_{t-1}^{f,c} + (1 - \eta)[\exp(p_t) - \exp(p_{t-1})] \cdot d_{t-2}^{f,c} \end{aligned} \quad (3.15)$$

- $\eta$ : Einflussparameter vergangener Gewinne/Verluste
- $p_t$ : Aktueller Preis
- $\exp(p_t) - \exp(p_{t-1})$ : Beobachtete Preisdifferenz

---

<sup>34</sup>Im Modell wäre also der Marktanteil der Strategien im ersten Fall  $m_f = m_c = 0.5$  bzw.  $z = 0$ , während im zweiten Fall  $m_{f,c} \in \{0, 1\}$  bzw.  $z \in \{-1, 1\}$ , je nachdem, welche der beiden Strategien zurzeit die bessere Performance aufweist.

<sup>35</sup>Die meisten profitbasierten Agentenmodelle in der Literatur nutzen jedoch nach dem Ansatz von Brock und Hommes (1998) die erste Implementation, welcher den Parameter  $\eta$  allein auf den zurückliegenden Gewinn bzw. Verlust anwendet. Eine zweite Implementation des Parameters  $\eta$  folgt dabei dem Vorschlag von Franke und Westerhoff (2012).

- $d_{t-2}^{f,c}$ : Letzte umgesetzte Allokation der Fundamental- bzw. Technikerstrategie

Nach (3.15) ist der für die Strategieentscheidung relevante Gewinn also zu berechnen aus dem bisher erreichten und neu realisierten Gewinn bzw. Verlust<sup>36</sup>. Zwar ist die Implementierung des Parameters  $\eta$  in beiden Fällen sehr ähnlich, die Interpretation allerdings unterscheidet sich. Im ersten Fall stellt  $\eta$  einen Faktor für das Gedächtnis<sup>37</sup> der Agenten bezüglich ihrer in der Vergangenheit erzielten Profite dar, während im zweiten Fall  $\eta$  einen Diskontfaktor zurückliegender Gewinne bzw. den exponentiell geglätteten Gewinn darstellt<sup>38</sup>. Der neu realisierte Gewinn bzw. Verlust bildet sich dabei neben der zuletzt beobachteten Preisdifferenz auch aus der Nachfrage  $d_{t-2} > 0$  bzw. dem Angebot  $d_{t-2} < 0$  der jeweiligen Strategie, welche bzw. welches beim Preis  $p_{t-1}$  am Markt vorhanden war<sup>39</sup>. Das Angebot bzw. die Nachfrage der beiden Strategien wird nach (3.1) mit Verzögerung von zwei Zeitticks gebildet<sup>40</sup>:

$$\begin{aligned} d_{t-2}^f &= \phi \cdot (p_f - p_{t-2}) + \sigma_f \epsilon_f \\ d_{t-2}^c &= \chi \cdot (p_{t-2} - p_{t-3}) + \sigma_c \epsilon_c \end{aligned} \tag{3.16}$$

- $\phi, \chi$ : Aggressivität der Fundamentalisten bzw. Techniker
- $\sigma_f, \sigma_c$ : Volatilität der Fundamental- bzw. Trendstrategie
- $\epsilon_f, \epsilon_c$ : Unabhängige, normalverteilte Zufallsvariablen mit  $\epsilon \in N(0, 1)$
- $p_f$ : Fundamentalwert

Insgesamt lässt sich der Parameter  $\eta$  also als Gedächtnis bzw. Planungshorizont der Agenten auffassen. Als Einschränkung gilt dabei  $\eta \in [0, 1)$  für beide Möglichkeiten in (3.15). Für  $\eta = 0$  beachten die Agenten bei ihrer Strategiewahl nur den neu

<sup>36</sup>Da das Modell auf der Basis von logarithmischen Preisen beruht, muss zur Berechnung des Gewinns die Differenz der Exponentialfunktionen von  $p_t$  und  $p_{t-1}$  genommen werden.

<sup>37</sup>Siehe dazu Brock/Hommes (1998).

<sup>38</sup>In dem Fall ist der Ausdruck in (3.15) äquivalent zur unendlichen Summe  $G_t^{f,c} = (1-\eta) \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k [\exp(p_{t-k}) - \exp(p_{t-k-1})] \cdot d_{t-k-2}^{f,c}$  und entspricht damit den um  $\eta$  diskontierten Gewinn skaliert mit  $(1-\eta)$ . Siehe hierzu Franke und Westerhoff (2012) und Chiarella et al. (2006)

<sup>39</sup>Nach Franke und Westerhoff (2012) lässt sich dies als durchschnittlicher Gewinn bzw. Verlust der jeweiligen Strategie interpretieren.

<sup>40</sup>Die Nachfrage entsteht aus den beobachteten Preisen zum Zeitpunkt  $t - 2$  und wird zum Zeitpunkt  $t - 1$  am Markt umgesetzt, während der letztendliche Gewinn (oder Verlust) dann am Zeitpunkt  $t$  realisiert wird.

### 3.1. MODELL VON Franke und Westerhoff (2012, 2016)

realisierten Gewinn bzw. Verlust, während für  $\eta \rightarrow 1$  auf die gesamte Historie aller erzielten Gewinne bzw. Verluste zurückgegriffen wird. Im zweiten Fall in (3.15) ist  $\eta = 1$  dadurch ausgeschlossen, da damit der erzielte Gewinn immer mit einer Gewichtung von null in den Gesamtgewinn eingehen würde und somit beide Strategien immer einen Marktanteil von  $m_t = 1 - m_t = 0.5$  aufweisen würden. Das Ausschließen von  $\eta = 1$  im ersten Fall von (3.15) ist etwas komplexer motiviert. Erstens ist ein unendliches Gedächtnis<sup>41</sup> eine unrealistische Annahme für begrenzt rationale Agenten und zweitens kann gezeigt werden, dass unter dieser Annahme alle nicht vollständig rationalen Marktteilnehmer aus dem Markt gedrängt werden<sup>42</sup>, was sich allerdings nicht in echten Märkten beobachten lässt<sup>43</sup>. Im Weiteren soll nur der erste Fall in (3.15) weiter ausgeführt werden, da dessen Auswirkungen auf das Systemverhalten vorteilhafter für die Anwendung in der Thesis ist. Wie beim vorherigen Modell ist es zielführend für Aussagen über das Systemverhalten sowie den Einfluss der verschiedenen Parameter die Fixpunkte des Systems zu bestimmen. Da sich an der Gleichung für den Marktpreis in (3.1) nichts verändert hat, gilt für den Fixpunkt des Preises wieder  $p^* = p_f$ . Zur Bestimmung und Analyse des Fixpunktes des Marktanteils  $m$  ist es zielführend, wieder einen Wechsel der Parametrisierung auf  $z_t = 2m_t - 1$  vorzunehmen. Die genau Lage des Fixpunktes  $z^*$  hängt vom Parameter  $\eta$  ab. Da sich am Fixpunkt der Preis nicht mehr ändert, fällt der neu erhaltene Gewinn in (3.15) heraus und der Fixpunkt hängt nur vom bisher erhaltenen Gewinn ab. Da dieser für  $\eta = 0$  immer ebenfalls herausfällt, gilt hier  $m^* = 0.5$  bzw.  $z^* = 0$ . Aber auch für den Fall  $0 < \eta < 1$  muss der Fixpunkt bei  $m^* = 0.5$  bzw.  $z^* = 0$  sein, da hierfür der Gewinn beider Strategien  $G^{f,c}$  konstant sein muss. Dies kann aber nach (3.15) nur dann der Fall sein, wenn  $G^{f,c} = 0$  gilt<sup>44</sup>. Um im Weiteren genauere Einsichten in das Verhalten des Systems zu erhalten, muss eine Stabilitätsanalyse der Fixpunkte durchgeführt werden<sup>45</sup>. Da sich das System vollständig durch die Gleichungen für

---

<sup>41</sup>Dies wäre genau im Fall von  $\eta = 1$  vorhanden.

<sup>42</sup>Siehe hierzu z.B. Brock und Hommes (1998).

<sup>43</sup>Siehe dazu z.B. Thaler (1994).

<sup>44</sup>Für den ausgeschlossenen Fall  $\eta = 1$  wäre allerdings nach (3.15) jede Ausprägung des Gewinns  $G^{f,c}$  zum Punkt  $p_t = p^* = p_f$  ein Fixpunkt

<sup>45</sup>Dies ist prinzipiell auch für den Herden- bzw. Bias-Revisionsansatz möglich. Allerdings lässt sich das Systemverhalten dort auch einfacher mithilfe einer grafischen Analyse der Nullkline beschreiben.

den Preis in (3.1) und den Marktanteil in (3.3) unter der Berücksichtigung der Ausdrücke in (3.14) und (3.15) sowie  $\tilde{G}_t^{f,c} = G_{t-1}^{f,c}$ <sup>46</sup> beschreiben lässt, ergibt sich für das rein deterministische System im ersten Fall in (3.15)<sup>47</sup>

$$\begin{aligned} p_t &= p_{t-1} + \mu \left[ \frac{1 + z_{t-1}}{2} \cdot \phi(p_f - p_{t-1}) + \frac{1 - z_{t-1}}{2} \cdot \chi(p_{t-1} - p_{t-2}) \right] \\ \tilde{G}_t^f &= \eta \tilde{G}_{t-1}^f + [\exp(p_{t-1}) - \exp(p_{t-2})] \cdot \phi(p_f - p_{t-3}) \\ \tilde{G}_t^c &= \eta \tilde{G}_{t-1}^c + [\exp(p_{t-1}) - \exp(p_{t-2})] \cdot \chi(p_{t-3} - p_{t-4}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

mit

$$z_t = \tanh \left( \alpha_w [\tilde{G}_t^f - \tilde{G}_t^c] \right)$$

- $\mu$ : Skalierungsfaktor
- $z_t$ : Aktueller reskaliertes Marktanteil

Wie dem Gleichungssystem in (3.17) zu entnehmen ist, hängen  $p_t, \tilde{G}_t^f, \tilde{G}_t^c$  von  $p_{t-1}, p_{t-2}, \tilde{G}_{t-1}^f, \tilde{G}_{t-1}^c$  bzw.  $p_{t-1}, p_{t-2}, p_{t-3}, \tilde{G}_{t-1}^f$  und  $p_{t-1}, p_{t-2}, p_{t-3}, p_{t-4}, \tilde{G}_{t-1}^c$  ab. Es liegt also ein dynamisches System 6-ter Ordnung vor. Zur Lösung dieses Problems kann man sich zunutze machen, dass sich ein dynamisches System  $n$ -ter Ordnung in ein  $n$ -dimensionales System erster Ordnung transferieren lässt<sup>48</sup>. Dazu führt man die Variablen  $u_t = p_{t-1}, v_t = u_{t-1} = p_{t-2}, w_t = v_{t-1} = p_{t-3}$  ein. Durch eine weitere Variablentransformation  $p_i(t) = p_{t-i}, g_i^{f,c}(t) = \tilde{G}_{t-i}^{f,c}$  ergibt sich der Variablenvektor  $x_{t-1} = (p_{t-1}, u_{t-1}, v_{t-1}, w_{t-1}, \tilde{G}_{t-1}^f, \tilde{G}_{t-1}^c) = (p_1, p_2, p_3, p_4, g_1^f, g_1^c)$ <sup>49</sup>, welcher durch die Transformation  $x_t = \Lambda x_{t-1}$  mit der Übergangsmatrix  $\Lambda$ <sup>50</sup> vollständig die Dynamik des Systems beschreibt. Für das 6-dim Gleichungssystem ergibt sich dann:

<sup>46</sup>Da der aktuelle Marktanteil  $z_t$  von  $G_{t-1}^{f,c}$  abhängt, muss die um einen Zeitschritt in die Vergangenheit versetzte Gewinnleichung in (3.15) verwendet werden.

<sup>47</sup>Der zweite Fall in (3.15) kann äquivalent betrachtet werden.

<sup>48</sup>für weitere Anwendungen dieser Technik auf agentenbasierte Modelle siehe z.B. Brock und Hommes (1998), Chiarella et al. (2006), Gaunersdorfer et al. (2008).

<sup>49</sup>Vergleiche Gaunersdorfer et al. (2008).

<sup>50</sup>Die genaue Form der Übergangsmatrix  $\Lambda$  wird hier nicht genauer ausgeführt, da diese implizit bereits im Gleichungssystem in (3.18) enthalten ist. Dies wird bei allen weiteren ABM, bei denen dieser Ansatz angewandt wird, ebenso gehandhabt.

### 3.1. MODELL VON Franke und Westerhoff (2012, 2016)

$$\begin{pmatrix} p_t \\ u_t \\ v_t \\ w_t \\ \tilde{G}_t^f \\ \tilde{G}_t^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + \frac{\mu}{2} [(1+z) \cdot \phi(p_f - p_1) + (1-z) \cdot \chi(p_1 - p_2)] \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \eta g_1^f + [\exp(p_1) - \exp(p_2)] \cdot \phi(p_f - p_3) \\ \eta g_1^c + [\exp(p_1) - \exp(p_2)] \cdot \chi(p_3 - p_4) \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

mit

$$z = \tanh\left(\frac{\alpha_w}{2}[g_1^f - g_1^c]\right)$$

Zur Stabilitätsanalyse der Fixpunkte müssen nun Eigenwerte der Jacobi-Matrix von (3.18) am Fixpunkt bestimmt werden, woraus sich dann Rückschlüsse über die Stabilität des Fixpunktes ziehen lassen<sup>51</sup>. Für die Eigenwerte  $\lambda$  von (3.18) ergibt sich dann folgendes charakteristisches Polynom<sup>52</sup>:

$$\lambda^2 \cdot (\eta - \lambda)^2 \cdot \left( \lambda^2 - \lambda \left[ 1 + \frac{\mu}{2}(\chi - \phi) \right] + \frac{\mu}{2}\chi \right) = 0 \quad (3.19)$$

Aus (3.19) ist ersichtlich, dass die ersten vier Eigenwerte  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = \lambda_4 = \eta$  sind. Da der Betrag all dieser Eigenwerte kleiner als eins ist, muss die Stabilität des Systems von den verbleibenden Eigenwerten  $\lambda_{5,6}$  abhängen<sup>53</sup>. Für die beiden

---

<sup>51</sup>Dies ist äquivalent zur Entwicklung einer kleinen Abweichung um den Fixpunkt herum. Die einzelnen Eigenwerte beschreiben dabei die Entwicklungen der Abweichung in der jeweiligen Systemdimension.

<sup>52</sup>Dadurch dass der stationäre Punkt bei  $p^* = p_f$  und  $g^{f,c*} = 0$  liegt, vereinfacht sich das Problem erheblich, da viele Einträge der Jacobi-Matrix Null ergeben.

<sup>53</sup>Ein stationärer Punkt ist nur dann asymptotisch stabil, wenn eine kleine Abweichung für alle Dimensionen zum stationären Punkt korrigiert wird. Ist das nur für eine Dimension nicht der Fall, so vergrößert sich Entfernung der Abweichung asymptotisch und der stationäre Punkt ist instabil. Das formale Kriterium für die Stabilität des Fixpunktes ist, dass alle zugehörigen Eigenwerte die Beziehung  $|\lambda| < 1$  erfüllen. Dies lässt sich leicht herleiten. Ein diskretes dynamisches System lässt sich als kontinuierliche Anwendung einer Matrix  $M$  auf einen Ausgangsvektor  $v_0$  auffassen. Für den Variablenvektor zum Zeitpunkt  $t$  muss also  $v_t = M^t v_0$  gelten. Da sich  $v_t$  und  $v_0$  als Linearkombination der Eigenvektoren der Matrix  $M$  darstellen lassen, gilt ebenfalls  $v_t = \lambda^t v_0$ . Angenommen  $v^*$  ist ein stationärer Punkt, dann muss  $v^* = \lambda^t v^*$  gelten. Wird nun eine Störung des Fixpunktes  $\delta$  eingeführt, ergibt sich  $v^* = \lambda^t v^* + \lambda^t \delta$ . Offensichtlich gilt dann  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda^t \delta = 0$  nur für Eigenwerte  $|\lambda| < 1$ .

letzten Eigenwerte ergibt sich schließlich aus dem charakteristischen Polynom in (3.19) folgende Beziehung<sup>54</sup>:

$$\lambda_5 + \lambda_6 = 1 + \frac{\mu}{2}(\chi - \phi) \quad \lambda_5 \cdot \lambda_6 = \frac{\mu}{2}\chi \quad (3.20)$$

Um zu untersuchen, bei welcher Parameterkonstellation das System nun instabil wird, muss eine Fallunterscheidung von (3.20) gemacht werden.

1. Einer der beiden Eigenwerte ist gleich 1. Durch Setzen von  $\lambda_6 = 1$ <sup>55</sup> und verwenden der Ausdrücke in (3.20) ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\phi = 0 \quad (3.21)$$

2. Einer der beiden Eigenwerte ist gleich -1. Analog zum ersten Fall ergibt sich durch Setzen von  $\lambda_6 = -1$  und verwenden der Ausdrücke in (3.20) folgender Zusammenhang:

$$\phi = 2 \left( \frac{2}{\mu} + \chi \right) \quad (3.22)$$

3. Komplexe konjugierte Eigenwerte mit Betrag 1. Diese Voraussetzung ist für  $\lambda_5 \cdot \lambda_6 = 1$  und  $|\lambda_5 + \lambda_6| < 2$  erfüllt. Anwenden dieser Definition und Einsetzen in (3.20) ergibt die Bedingung:

$$\chi = \frac{2}{\mu} \quad \left| 2 - \frac{\phi}{\chi} \right| < 2 \quad (3.23)$$

Da die Voraussetzung für Fall 1 in (3.21) bereits per Definition ausgeschlossen ist<sup>56</sup> sind in der weiteren Betrachtung nur die Fälle 2 und 3 von Bedeutung. Das Eintreten von Fall 2 führt zu einem instabilen stationären Punkt mit wechselndem Vorzeichen der Trajektorie. Sobald der Parameter  $\phi$  den Schwellenwert in (3.22) erreicht, wird

<sup>54</sup>für eine genauere Beschreibung dieser Methode siehe Gaunersdorfer et al. (2008).

<sup>55</sup>Das Setzen von  $\lambda_5 = 1$  führt zu einem äquivalenten Ergebnis.

<sup>56</sup>Dieser Fall führt zu einem instabilen stationären Punkt für  $\phi < 0$ , da jede Abweichung vom Fixpunkt für  $t \rightarrow \infty$  ebenfalls je nach Startpunkt gegen unendlich bzw. minus unendlich gehen muss.

### 3.1. MODELL VON Franke und Westerhoff (2012, 2016)

eine Abweichung vom stationären Punkt zu stark korrigiert, sodass diese nicht mehr in den Fixpunkt hineinläuft, sondern unter wechselndem Vorzeichen bestehen bleibt. Für die Form der Trajektorie gibt es nun zwei Möglichkeiten, entweder sie strebt, unter ständigem Wechsel des Vorzeichens, gegen unendlich für  $t \rightarrow \infty$  oder sie läuft auf einen stabilen Grenzyklus hinaus, welcher ebenfalls einen ständigen Vorzeichenwechsel aufweist. Letzteres ist in der Literatur auch als Flip-Bifurkation bekannt und ein Kennzeichen für deterministisches Chaos. Das Feigenbaum-Diagramm in Abbildung 3.6 zeigt, dass das System unter bestimmten Parameterkonstellationen tatsächlich eine Flip-Bifurkation ausbildet. Durch weiteres Erhöhen von  $\phi$  findet eine ständige Verdopplung der Periode des Grenzyklus statt, was irgendwann zu chaotischem Verhalten führt. Fall 3 tritt ein, sobald der Parameter  $\chi$  den Schwellenwert in (3.23) erreicht und der Parameter  $\phi$  sich im Bereich  $0 < \phi < 4\chi$  befindet. Dies ist ein Bereich, indem  $\chi$  groß genug ist, um den stabilisierenden Einfluss von  $\phi$  zu kompensieren und  $\phi$  gleichzeitig klein genug ist, dass eine Abweichung vom Fixpunkt nicht überkompensiert wird. Die komplexen Eigenwerte führen dann dazu, dass sich die Trajektorie auf einer spiralförmigen Bahn um den Fixpunkt bewegt<sup>57</sup>. Das Feigenbaum-Diagramm in Abbildung 3.7 zeigt, dass das System unter bestimmten Parameterkonstellationen tatsächlich eine Hopf-Bifurkation ausbildet, die bei weiterer Erhöhung des Parameters  $\chi$  zu chaotischem Verhalten führt.

Zusammenfassend gibt es theoretisch vier mögliche Systemzustände, in denen sich das Modell befinden kann. Der Fall  $\phi < 0$  ist allerdings ohnehin aus ökonomischen Gründen bereits ausgeschlossen worden. Aber auch die Fälle (3.22, 3.23) weisen Probleme auf, die einen praktischen Einsatz dieser Modellvarianten verhindern. In beiden Fällen sind die Schwellenwerte der deterministischen Parameter  $\phi$ ,  $\chi$  vom Skalierungsfaktor  $\mu$  abhängig und da dieser normalerweise als sehr klein angenommen wird<sup>58</sup>, sind die Schwellenwerte dementsprechend sehr groß. Dies ist deshalb ein Problem, da bei großen Werten für  $\phi$  bzw.  $\chi$  die Renditen starke negative bzw. positive Korrelation aufweisen. Des Weiteren sind Stationarität und Ergodizität Vorausset-

---

<sup>57</sup>Dies ist in der Literatur als Hopf-Bifurkation bekannt.

<sup>58</sup>Bei Franke und Westerhoff (2012, 2016) ist für den Skalierungsfaktor der Wert  $\mu = 0.01$  gewählt worden.

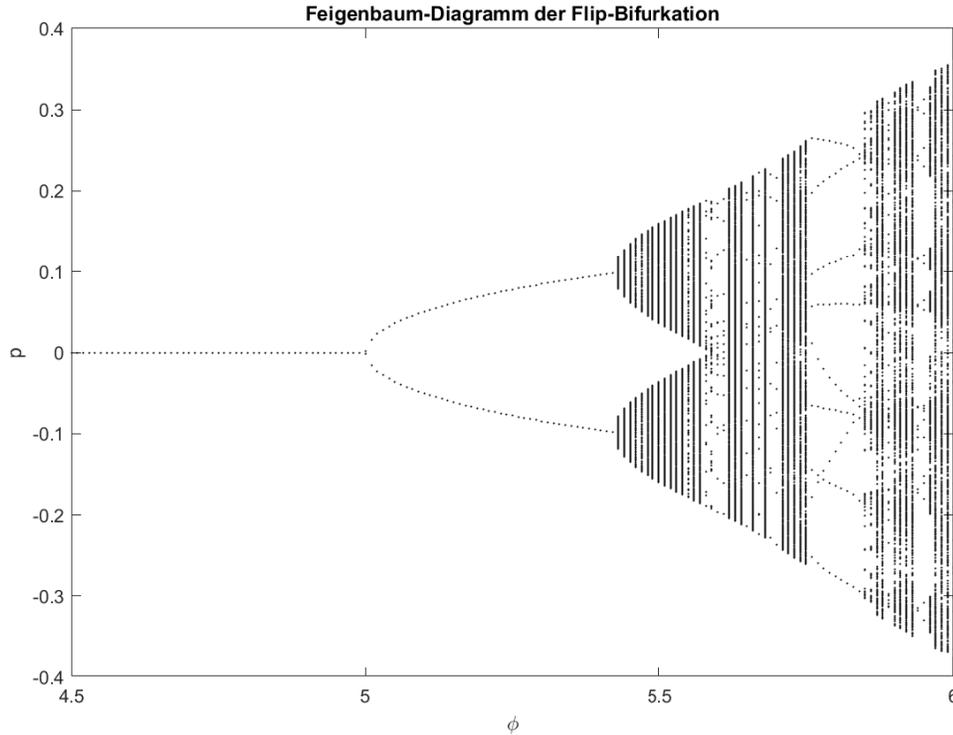


Abbildung 3.6: Feigenbaum-Diagramm des Gewinnmodells für den Fall 2 unter Variation des Parameters  $\phi$ . Die anderen Parameter sind dabei  $\mu = 1$ ,  $\chi = 0.5$ ,  $\eta = 0.05$ ,  $\alpha_w = 1$ . Wie zu erkennen, wird der stabile Fixpunkt, wie in (3.22) vorhergesagt, bei  $\phi = 5$  instabil und geht zuerst in einen Grenzzyklus mit Periode zwei über. Wird der Parameter  $\phi$  weiter erhöht, verdoppelt sich die Periode des Grenzzyklus, bis das System schließlich chaotisches Verhalten ausbildet. Des Weiteren kann auch beobachtet werden, dass die Phasen chaotischen Verhalten scheinbar von Phasen periodischer Grenzzyklen unterbrochen werden. Eine weitere Erhöhung des Parameters  $\phi$  führt irgendwann dazu, dass das System vollständig instabil wird und die Trajektorie für  $t \rightarrow \infty$  gegen unendlich läuft.

zung für die Anwendung des MSM Verfahrens und diese beiden Eigenschaften sind in einem instabilen System in der Regel nicht vorhanden. Im Endeffekt ist also nur der stabile Fall des Modells für die weiteren Anwendungen der Thesis von Bedeutung.

### 3.1. MODELL VON Franke und Westerhoff (2012, 2016)

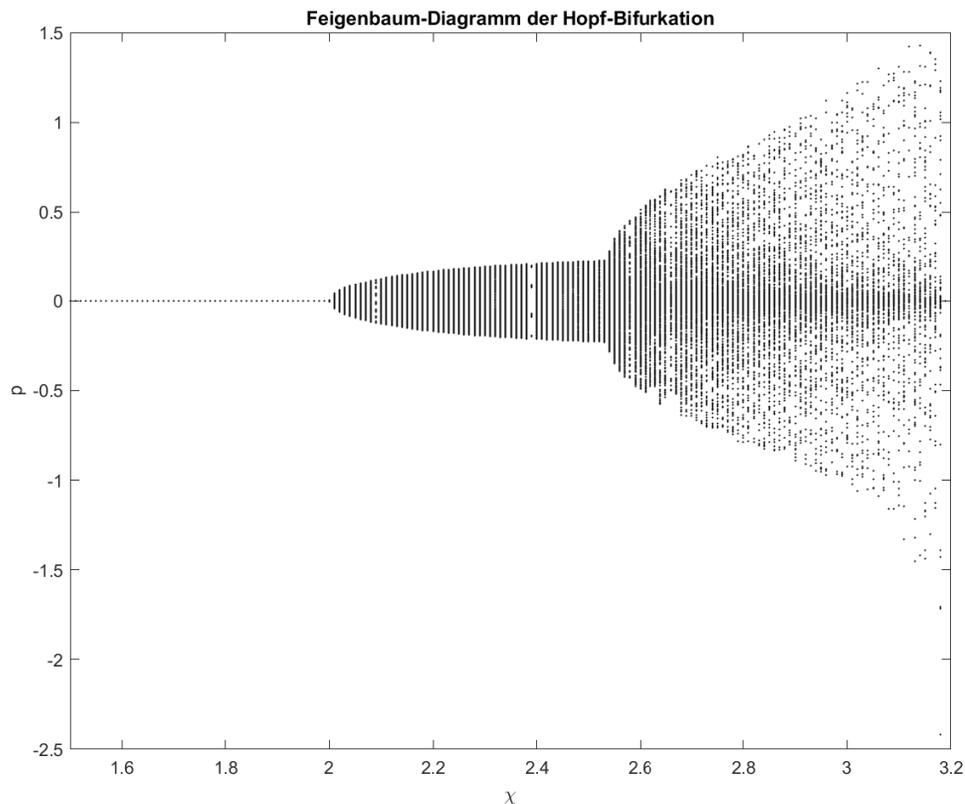


Abbildung 3.7: Feigenbaum-Diagramm des Gewinnmodells für den Fall 3 unter Variation des Parameters  $\chi$ . Die anderen Parameter sind dabei  $\mu = 1$ ,  $\phi = 1$ ,  $\eta = 0.95$ ,  $\alpha_w = 1$ . Wie zu erkennen wird der stabile Fixpunkt wie in (3.23) vorhergesagt bei  $\chi = 2$  instabil und geht zuerst in einen periodischen Grenzzyklus über. Wird der Parameter  $\chi$  weiter erhöht, so vergrößert sich der Grenzzyklus. Von da aus führt ein kontinuierlicher Anstieg von  $\chi$  schließlich irgendwann zur Ausbildung von chaotischem Verhalten. Ähnlich wie bei der Flip-Bifurkation wird das System bei einer immer weiteren Erhöhung des Parameters  $\chi$  ebenfalls vollständig instabil.

#### 3.1.4.2 Zu erwartendes Systemverhalten

Es bleibt noch die Frage zu klären, welches Verhalten vom System in normalen und Krisenzeiten zu erwarten ist. Da das System in beiden Fällen einen stabilen Fixpunkt aufweisen muss, ist das Systemverhalten praktisch nur durch den zufälligen Anteil der

beiden Strategien geprägt. In normalen Zeiten ist zu erwarten, dass der Marktanteil entweder relativ konstant bleiben sollte oder falls Phasenwechsel doch stattfinden, muss der Zufallsanteil der Strategien annähernd gleich sein<sup>59</sup>. Eine Möglichkeit wie dies erreicht werden kann, ist ein kleiner Wert von  $\alpha_w$ . Dies führt dazu, dass der Gewinn kaum Einfluss auf die Anteile der Strategien am Markt hat. Langfristig gesehen sollte sich so also ein Gleichgewicht bilden. Der Einfluss des Parameters  $\eta$  auf das Systemverhalten nimmt zwar mit sinkendem  $\alpha_w$  ab, allerdings verhindert ein hoher Wert von  $\eta \approx 1$  kurzfristige Änderungen des Marktanteils aufgrund von aktuellen Gewinnschwankungen, von daher ist hier ein eher hoher Wert zu erwarten. Für den Fall des ständig wechselnden Marktanteils muss für die Zufallsanteile in (3.2)  $\sigma_f \approx \sigma_c$  gelten, dann ist ebenfalls die Gesamtvarianz des Systems konstant. Die genauen Ausprägungen der Parameter  $\alpha_w$  und  $\eta$  sind in diesem Fall nicht relevant. Für den Krisenfall, muss das System einen wechselnden Marktanteil aufweisen und somit die Beziehung  $\sigma_f < \sigma_c$  gelten. Voraussetzung dafür, dass eine Änderung des Marktanteils überhaupt eintreten kann, ist ein relativ großes  $\alpha_w$ , damit Änderungen des Gewinns merkbare Auswirkungen auf den Marktanteil haben, sowie ein nicht allzu kleines  $\eta$ , da für niedrige Werte von  $\eta$  der Einfluss des gerade erzielten Gewinns zu stark ist, was dazu führt, dass der Marktanteil ständig wechseln würde und sich kein Volatilitätsclustering bilden könnte. Abbildung 3.8 zeigt nochmal beispielhaft die Auswirkungen der Parameter  $\alpha_w$  und  $\eta$  auf das Systemverhalten.

Für die beiden übrigen Parameter  $\phi$  und  $\chi$  gilt dasselbe wie für die anderen Modelle, da sowohl für normale als auch Krisenzeiten keine signifikante Autokorrelation der Rendite existiert, sind große Änderungen hier unwahrscheinlich. Wie bei den vorherigen Modellen ist auch hier das Auffinden eines globalen Minimums nicht zu erwarten.

---

<sup>59</sup>Dies gilt nach (3.2) analog zu den vorher diskutierten Modellen.

### 3.1. MODELL VON Franke und Westerhoff (2012, 2016)

Vergleich der simulierten Rendite- und Marktanteilszeitreihen unter Variation der Parameter  $\alpha_w$  und  $\eta$

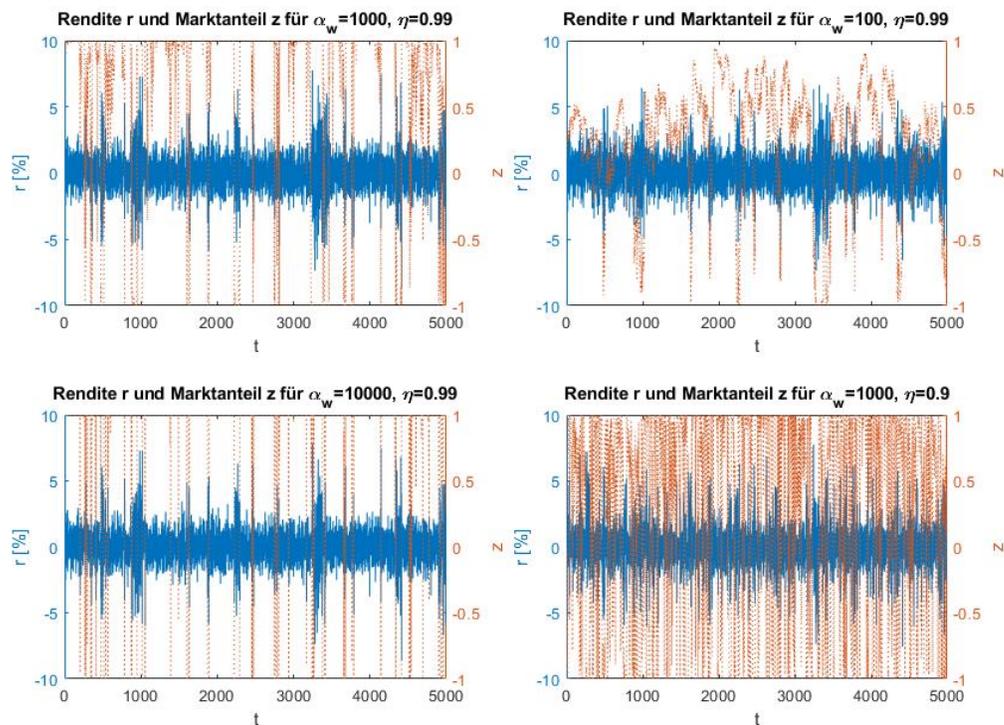


Abbildung 3.8: Vergleich der Renditen und Marktanteile des Gewinnansatzes für den Fall eines stabilen Fixpunktes. Dabei wurden für die restlichen Parameter die Werte  $\mu = 0.01$ ,  $\phi = 0.1$ ,  $\chi = 10$ ,  $\sigma_f = 1.0$  und  $\sigma_c = 2.5$  gewählt. Insgesamt bedeuten größere Werte für  $\alpha_w$  und  $\eta$  stärkeres Volatilitätsclustering und kleinere Werte führen eher zu einer normalverteilten Rendite, was mit dem prognostizierten Systemverhalten für den stabilen Fall übereinstimmt.

## 3.1.5 Der Gewinn-Biasansatz

### 3.1.5.1 Modelldarstellung

Eine Möglichkeit, den Gewinnansatz zu erweitern, ist das Hinzufügen eines Bias. Der Biasfaktor bewirkt, dass eine der Strategien grundsätzlich von den Agenten bevorzugt

wird<sup>60</sup>. Sei  $\alpha_0 \in \mathbb{R}$  ein Bias zur Strategiewahl, dann gilt für den Indikator der Marktstimmung in (3.14) folgende Beziehung:

$$a_t = \alpha_w \cdot (G_t^c - G_t^f) + \alpha_0 \quad (3.24)$$

- $\alpha_w$ : Einflussparameter des Gewinns/Verlusts auf die Strategie
- $G_t^f, G_t^c$ : Gewinn der Fundamental- bzw. Technikerstrategie
- $\alpha_0$ : Bias

Mit der Definition in (3.24) bewirkt ein positiver Bias eine Bevorzugung der Technikerstrategie während ein negativer Bias die Fundamentalstrategie bevorteilt. Um die Auswirkungen des Bias auf das Systemverhalten besser zu verstehen, ist es wieder zielführend, den Fixpunkt und die Stabilität des Systems zu untersuchen. Der Fixpunkt des Preises liegt weiter bei  $p^* = p_f$ , allerdings ist die Position des Marktanteilsfixpunktes nun abhängig vom Biasparameter  $\alpha_0$ . Für  $\alpha_0 < 0$  befindet sich der Fixpunkt im Techniker dominierten Bereich des Phasenraums ( $z^* < 0$ ), während er für  $\alpha_0 > 0$  im Fundamentalebereich ( $z^* > 0$ ) liegt. Da das Gewinn-Bias-Modell für  $\alpha_0 = 0$  äquivalent zum Gewinnmodell ist, befindet sich der Fixpunkt hier ebenfalls bei  $z^* = 0$ . Insgesamt gilt, je größer bzw. kleiner der Bias ist, desto stärker ist der Fixpunkt im jeweiligen Phasenraumbereich lokalisiert. Da der Bias nur in der Marktstimmungsgleichung vorkommt und in keiner direkten Beziehung zu den anderen Systemvariablen hat, sind die Änderungen im Vergleich mit dem 6-dim Gleichungssystem in (3.25) gering:

---

<sup>60</sup>Die Einführung eines Bias ist äquivalent zur Berücksichtigung eines Strategiekostenfaktors, dessen Einfluss z.B. im Modell von Brock und Hommes (1998) untersucht wird.

3.1. MODELL VON Franke und Westerhoff (2012, 2016)

$$\begin{pmatrix} p_t \\ u_t \\ v_t \\ w_t \\ \tilde{G}_t^f \\ \tilde{G}_t^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + \frac{\mu}{2} [(1+z) \cdot \phi(p_f - p_1) + (1-z) \cdot \chi(p_1 - p_2)] \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \eta g_1^f + [\exp(p_1) - \exp(p_2)] \cdot \phi(p_f - p_3) \\ \eta g_1^c + [\exp(p_1) - \exp(p_2)] \cdot \chi(p_3 - p_4) \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

mit

$$z = \tanh\left(\frac{\alpha_w}{2} [g_1^f - g_1^c] - \frac{\alpha_0}{2}\right)$$

$$\lambda^2 \cdot (\eta - \lambda)^2 \cdot \left( \lambda^2 - \lambda \left[ 1 + \frac{\mu}{2} ([1 - z^*]\chi - [1 + z^*]\phi) \right] + \frac{\mu}{2} (1 - z^*)\chi \right) = 0 \quad (3.26)$$

$$\lambda_5 + \lambda_6 = 1 + \frac{\mu}{2} ([1 - z^*]\chi - [1 + z^*]\phi) \quad \lambda_5 \cdot \lambda_6 = \frac{\mu}{2} (1 - z^*)\chi \quad (3.27)$$

Wie aus (3.26) und (3.27) hervorgeht, ist der einzige Unterschied zum rein gewinnorientierten Ansatz, dass die Lage des Fixpunktes sich auf die Stabilität des Systems auswirkt. Um die Stabilität genauer zu untersuchen, ist wieder eine Fallunterscheidung von (3.27) nötig. Da die ersten vier Eigenwerte hier ebenfalls  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = \lambda_4 = \eta$  sind und somit der Betrag all dieser Eigenwerte kleiner als eins ist, muss die Stabilität des Systems wieder von den verbleibenden Eigenwerten  $\lambda_{5,6}$  abhängen.

1. Einer der beiden Eigenwerte ist gleich 1. Durch Setzen von  $\lambda_5 = 1$  oder  $\lambda_6 = 1$  und verwenden der Ausdrücke in (3.27) ergibt sich folgende Bedingung:

$$\phi = 0 \quad \text{oder} \quad z^* = -1 \quad (3.28)$$

2. Einer der beiden Eigenwerte ist gleich -1. Analog zum ersten Fall ergibt sich durch Setzen von  $\lambda_5 = -1$  oder  $\lambda_6 = -1$  und verwenden der Ausdrücke in

(3.27) folgender Zusammenhang:

$$\phi = \frac{2[2 + \mu(1 - z^*)\chi]}{\mu(1 + z^*)} \quad (3.29)$$

3. Komplexe konjugierte Eigenwerte mit Betrag 1. Diese Voraussetzung ist für  $\lambda_5 \cdot \lambda_6 = 1$  und  $|\lambda_5 + \lambda_6| < 2$  erfüllt. Anwenden dieser Definition und Einsetzen in (3.27) ergibt die Bedingung:

$$\chi = \frac{2}{\mu(1 - z^*)} \quad \left| 2 - \frac{(1 + z^*)\phi}{(1 - z^*)\chi} \right| < 2 \quad (3.30)$$

Aus (3.28) bis (3.30) geht hervor, dass die Stabilitätsbedingungen dem des rein gewinnorientierten Ansatzes sehr ähnlich sind. Da der Fall 1 in (3.28) entweder bereits per Definition ausgeschlossen ( $\phi = 0$ ) oder nur für  $\alpha_0 \rightarrow -\infty$  zu realisierbar ist, sind hier ebenfalls nur die Fälle 2 und 3 von Bedeutung. Für das Eintreten des Falles 2 muss der Parameter  $\phi$  den Schwellenwert in (3.22) erreichen. Wie beim rein gewinnorientierten Modell führt dies zu einem instabilen stationären Punkt mit wechselndem Vorzeichen der Trajektorie, wobei die Trajektorie entweder für  $t \rightarrow \infty$  gegen unendlich strebt oder eine Flip-Bifurkation aufweist und auf einen stabilen Grenzyklus hinausläuft. Im Unterschied zum rein gewinnorientierten Ansatz ist die Schwelle für  $\phi$  hier abhängig von der Lage des stationären Punktes  $z^*$ . Je weiter der Fixpunkt im Fundamental- ( $\alpha_0 < 0, 0 < z^* < 1$ ) bzw. Technikerbereich ( $\alpha_0 > 0, -1 < z^* < 0$ ) liegt, desto einfacher bzw. schwieriger kann der Schwellenwert erreicht werden<sup>61</sup>. Das Feigenbaum-Diagramm in Abbildung 3.9 zeigt, dass das System unter bestimmten Parameterkonstellationen tatsächlich eine Flip-Bifurkation ausbildet. Durch weiteres Erhöhen von  $\phi$  findet eine ständige Verdopplung der Periode des Grenzyklus statt, was irgendwann zu chaotischem Verhalten führt. Fall 3 tritt ein, sobald der Parameter  $\chi$  den Schwellenwert in (3.23) erreicht und die zusätzliche Bedingung in (3.23) eingehalten wird. Für den Schwellenwert in (3.23) gilt dabei, dass er höher

<sup>61</sup>für sehr große Biaswerte ( $\alpha_0 \rightarrow \infty, z^* \rightarrow -1$ ) ist es unmöglich, den Schwellenwert zu erreichen ( $\phi \rightarrow \infty$ ).

### 3.1. MODELL VON Franke und Westerhoff (2012, 2016)

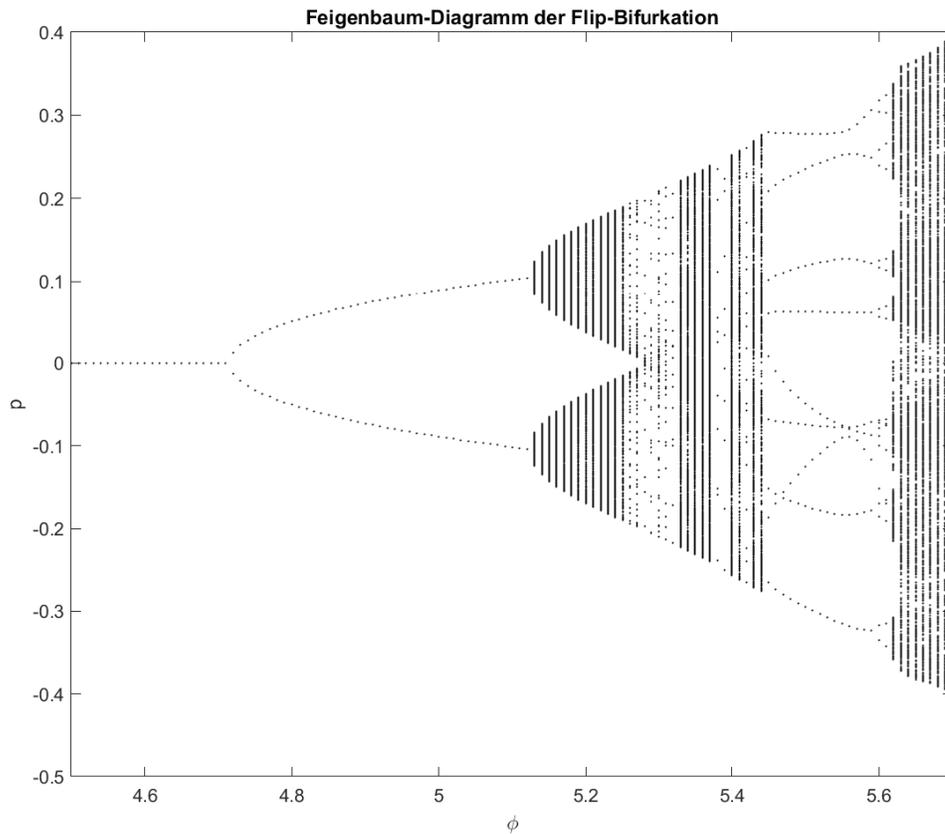


Abbildung 3.9: Feigenbaum-Diagramm des Gewinn-Biasmodells für den Fall 2 unter Variation des Parameters  $\phi$ . Die anderen Parameter sind dabei  $\mu = 1$ ,  $\chi = 0.5$ ,  $\eta = 0.05$ ,  $\alpha_w = 1$ ,  $\alpha_0 = -0.1$ . Wie zu erkennen, wird der stabile Fixpunkt, wie in (3.22) vorhergesagt nun abhängig vom stationären Punkt des Marktanteils für  $\phi < 5$  instabil und geht zuerst in einen Grenzzyklus mit Periode zwei über. Wird der Parameter  $\phi$  weiter erhöht, verdoppelt sich die Periode des Grenzzyklus, bis das System schließlich chaotisches Verhalten ausbildet. Des Weiteren kann auch beobachtet werden, dass die Phasen chaotischen Verhaltens scheinbar von Phasen periodischer Grenzzyklen unterbrochen werden. Eine weitere Erhöhung des Parameters  $\phi$  führt irgendwann dazu, dass das System vollständig instabil wird und die Trajektorie für  $t \rightarrow \infty$  gegen unendlich läuft.

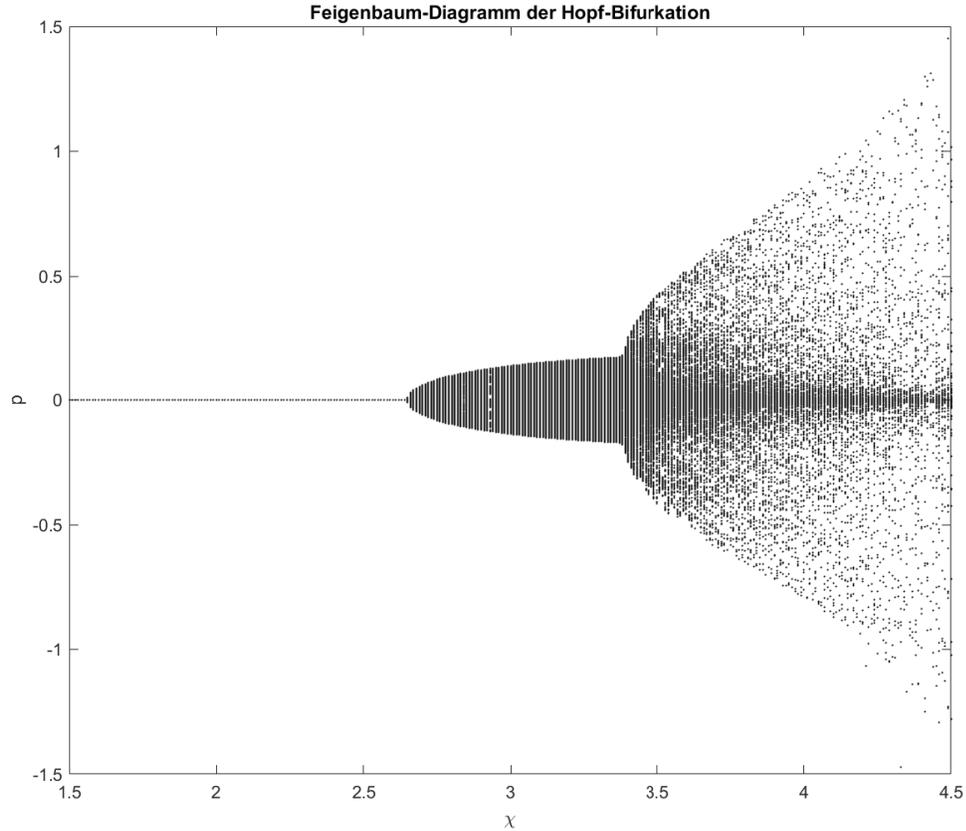


Abbildung 3.10: Feigenbaum-Diagramm des Gewinn-Biasmodells für den Fall 3 unter Variation des Parameters  $\chi$ . Die anderen Parameter sind dabei  $\mu = 1$ ,  $\phi = 1$ ,  $\eta = 0.95$ ,  $\alpha_w = 1$ ,  $\alpha_0 = -0.5$ . Wie zu erkennen, wird der stabile Fixpunkt, wie in (3.23) vorhergesagt, nun abhängig vom stationären Punkt des Marktanteils, für  $\chi > 2$  instabil und geht zuerst in einen periodischen Grenzzyklus über. Wird der Parameter  $\chi$  weiter erhöht, so vergrößert sich der Grenzzyklus. Von da aus führt ein kontinuierlicher Anstieg von  $\chi$  schließlich irgendwann zur Ausbildung von chaotischem Verhalten. Ähnlich wie bei der Flip-Bifurkation wird das System bei einer immer weiteren Erhöhung des Parameters  $\chi$  ebenfalls vollständig instabil.

bzw. niedriger wird, je weiter der Fixpunkt im Fundamental- ( $\alpha_0 < 0, 0 < z^* < 1$ )

### 3.1. MODELL VON Franke und Westerhoff (2012, 2016)

bzw. Technikerbereich ( $\alpha_0 > 0, -1 < z^* < 0$ ) liegt<sup>62</sup>. Auf die Nebenbedingung wirkt sich eine Lage des Fixpunktes im Fundamental- ( $\alpha_0 < 0, 0 < z^* < 1$ ) negativ aus, da hierdurch die zulässigen Werte für  $\phi$  verringert werden. Liegt der Fixpunkt hingegen im Technikerbereich ( $\alpha_0 > 0, -1 < z^* < 0$ ), so erhöht sich die Anzahl an möglichen Werten für  $\phi$ . Wie beim rein gewinnorientierten Modell führen die komplexen Eigenwerte dazu, dass sich eine Hopf-Bifurkation mit einer spiralförmigen Trajektorie bildet. Die Lage des Fixpunktes hat auch in diesem Fall keine Auswirkungen auf die generelle Stabilität des Systems. Das Feigenbaum-Diagramm in Abbildung 3.10 zeigt, dass das System unter bestimmten Parameterkonstellationen tatsächlich eine Hopf-Bifurkation ausbildet, die bei weiterer Erhöhung des Parameters  $\chi$  zu chaotischem Verhalten führt. Wie schon beim Gewinnmodell verhindert der gewählte Wert des Skalierungsfaktor  $\mu = 0.01$  das Auftreten von chaotischem Verhalten bei der Optimierung des Gewinn-Biasmodells.

#### 3.1.5.2 Zu erwartendes Systemverhalten

Es ist zu erwarten, dass sich das Systemverhalten im Vergleich zum rein gewinnorientierten Ansatz nur geringfügig ändert. Für normale Zeiten ist wieder eine Gleichheit des Zufalls- oder des Marktanteils Voraussetzung. Wobei letzteres neben niedrigem  $\alpha_w$  und hohem  $\eta$  nun zusätzlich auch durch sehr hohe bzw. sehr niedrige Werte des Bias  $\alpha_0$  eintreten kann, da dies dazu führt, dass nur die durch den Bias bevorzugte Strategie auch von den Agenten verfolgt wird, was wiederum einen konstanten Marktanteil zu Folge hat. Für den Krisenfall muss das System einen wechselnden Marktanteil aufweisen und somit die Beziehung  $\sigma_f < \sigma_c$  gelten. Ein relativ großes  $\alpha_w$  und nicht allzu kleines  $\eta$  sind wieder die Voraussetzung dafür. Der Bias  $\alpha_0$  zeigt vor allem Auswirkungen auf das Volatilitätsclustering. Ein hoher bzw. niedriger Bias stärkt dabei das Clustering in der Techniker- bzw. Fundamentalphase. Insgesamt sollte der Bias  $\alpha_0$  die Flexibilität des Modells erhöhen. Abbildung 3.11 zeigt nochmal beispielhaft die Auswirkungen des Parameters  $\alpha_0$  auf das Systemverhalten.

---

<sup>62</sup>Analog zum Fall 2 ist es für sehr kleine Biaswerte ( $\alpha_0 \rightarrow -\infty, z^* \rightarrow 1$ ) unmöglich, den Schwellenwert zu erreichen ( $\chi \rightarrow \infty$ ).

Vergleich der simulierten Rendite- und Marktanteilszeitreihen unter Variation des Parameters  $\alpha_0$

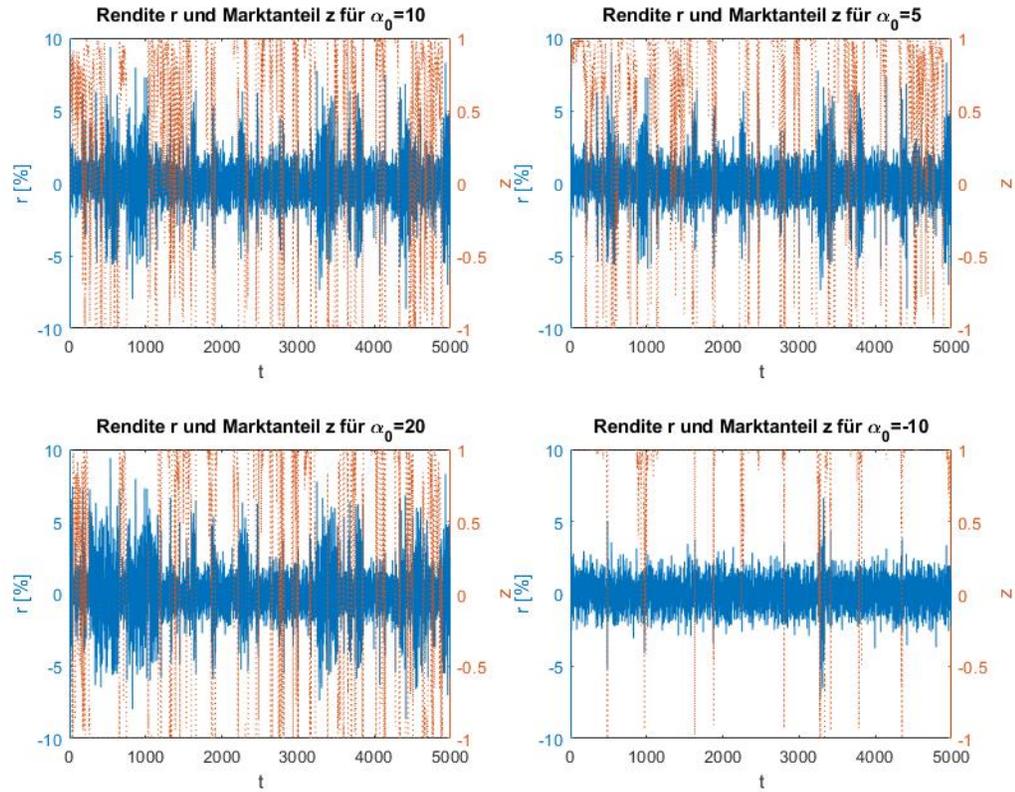


Abbildung 3.11: Vergleich der Renditen und Marktanteile des Gewinn-Biasansatzes für den Fall eines stabilen Fixpunktes. Dabei wurden für die restlichen Parameter die Werte  $\mu = 0.01$ ,  $\phi = 0.1$ ,  $\chi = 10$ ,  $\sigma_f = 1.0$ ,  $\sigma_c = 2.5$ ,  $\alpha_w = 1000$  und  $\eta = 0.99$  gewählt. Insgesamt bewirken größere, moderat positive Werte für  $\alpha_0$  stärkeres Volatilitätsclustering und negative Werte führen eher zu einer normalverteilten Rendite.

### 3.1.6 Der Gewinn-Herdenansatz

#### 3.1.6.1 Modelldarstellung

Der Gewinnansatz lässt sich ebenfalls durch Herdenverhalten erweitern. Ein Herdentriebsfaktor sorgt dafür, dass die Strategie der Majorität von den Agenten mit geringerer Wahrscheinlichkeit verlassen wird. Sei  $\alpha_n \in \mathbb{R}^+$  ein Bias zur Strategieaus-

### 3.1. MODELL VON Franke und Westerhoff (2012, 2016)

wahl, dann gilt für den Indikator der Marktstimmung in (3.14) folgende Beziehung:

$$a_t = \alpha_w \cdot (G_t^c - G_t^f) + \alpha_n(n_t^c - n_t^f) \quad (3.31)$$

- $\alpha_w$ : Einflussparameter des Gewinns/Verlusts auf die Strategie
- $G_t^f, G_t^c$ : Gewinn der Fundamental- bzw. Technikerstrategie
- $n_t^f, n_t^c$ : Marktanteil der Fundamental- bzw. Technikerstrategie
- $\alpha_n$ : Herdentriebsfaktor

Insgesamt gilt, je größer der Herdenfaktor  $\alpha_n$  ist, desto höher muss die Gewinndifferenz werden, um einen Strategiewechsel der Agenten hervorzurufen. Wird die Gewinndifferenz allerdings so groß, dass immer mehr Agenten zur alternativen Strategie wechseln, beschleunigt der Herdenfaktor den Wechselprozess. Um die Auswirkungen des Herdenfaktors in (3.31) auf das Systemverhalten besser zu verstehen, ist es wieder zielführend, den Fixpunkt und die Stabilität des Systems zu untersuchen. Der Fixpunkt des Preises ist wieder äquivalent zum reinen Gewinnmodell ( $p^* = p_f$ ). Da durch den Herdenfaktor nun auch der Marktanteil Einfluss auf die Marktstimmung nimmt, muss das Gleichungssystem um eine Variable erweitert werden, womit sich folgendes 7-dim Gleichungssystem ergibt:

$$\begin{pmatrix} p_t \\ u_t \\ v_t \\ w_t \\ \tilde{G}_t^f \\ \tilde{G}_t^c \\ z_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + \frac{\mu}{2} [(1+z) \cdot \phi(p_f - p_1) + (1-z) \cdot \chi(p_1 - p_2)] \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \eta g_1^f + [\exp(p_1) - \exp(p_2)] \cdot \phi(p_f - p_3) \\ \eta g_1^c + [\exp(p_1) - \exp(p_2)] \cdot \chi(p_3 - p_4) \\ \tanh(\frac{\alpha_w}{2} [g_1^f - g_1^c] + \frac{h}{2} z) \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

$$\lambda^2 \cdot (\eta - \lambda)^2 \left( \frac{\mu}{2} - \lambda \right) \cdot \left( \lambda^2 - \lambda \left[ 1 + \frac{\mu}{2} (\chi - \phi) \right] + \frac{\mu}{2} \chi \right) = 0 \quad (3.33)$$

Nach (3.33) sind die Eigenwertbedingungen für  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$  äquivalent zum reinen Gewinnmodell, womit für  $\lambda_5$  und  $\lambda_6$  dieselben Bedingungen für das Entstehen einer Flip- bzw. Hopfbifurkation gelten. Des Weiteren gilt für den Eigenwert  $\lambda_7$  folgende Instabilitätsbedingung:

$$\lambda_7 = \frac{\mu}{2} \tag{3.34}$$

Für den hier gewählten Wert von  $\mu = 0.01$  ist also auch das Gewinn-Herdenmodell immer stabil.

### 3.1.6.2 Zu erwartendes Systemverhalten

Vergleich der simulierten Rendite- und Marktanteilszeitreihen unter Variation des Parameters  $\alpha_n$

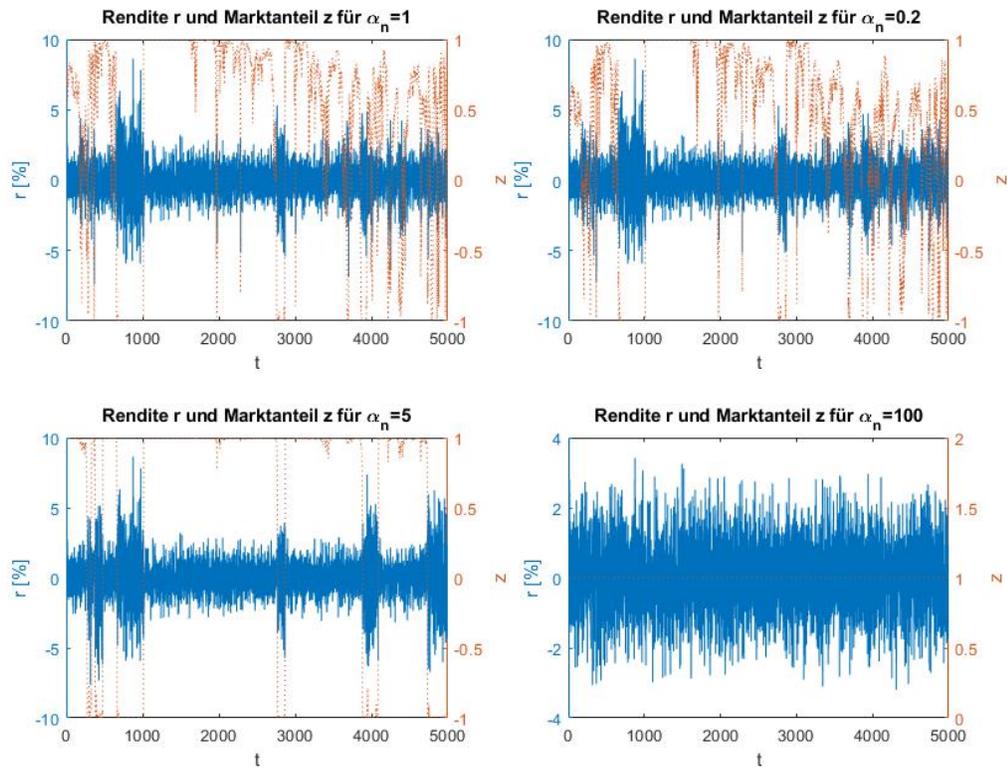


Abbildung 3.12: Vergleich der Renditen und Marktanteile des Gewinn-Herdenansatzes für den Fall eines stabilen Fixpunktes. Dabei wurden für die restlichen Parameter die Werte  $\mu = 0.01$ ,  $\phi = 0.1$ ,  $\chi = 10$ ,  $\sigma_f = 1.0$ ,  $\sigma_c = 2.5$ ,  $\alpha_w = 1000$  und  $\eta = 0.99$  gewählt. Insgesamt bedeuten größere Werte für  $\alpha_n$  schwächeres Volatilitätsclustering und sehr große Werte führen zu einer normalverteilten Rendite.

### 3.2. DAS MODELL VON Brock und Hommes (1998)

Auch für diese Modellvariation ändert sich das Systemverhalten im Vergleich zum rein gewinnorientierten Ansatz nur geringfügig. Für normale Zeiten ist wieder eine Gleichheit des Zufalls- oder des Marktanteils Voraussetzung. Wobei Letzteres neben niedrigem  $\alpha_w$  und hohem  $\eta$  nun zusätzlich auch durch hohe Werte des Herdenfaktors  $\alpha_n$  eintreten kann, da dies bewirkt, dass die Agenten die Majoritätsstrategie nicht mehr verlassen und der Marktanteil somit konstant bleibt. Für den Krisenfall muss das System einen wechselnden Marktanteil aufweisen und somit die Beziehung  $\sigma_f < \sigma_c$  gelten. Ein relativ großes  $\alpha_w$  und nicht allzu kleines  $\eta$  sind wieder die Voraussetzung dafür. Der Herdenfaktor  $\alpha_n$  zeigt vor allem Auswirkungen auf das Volatilitätsclustering. Ein hoher Herdenfaktor bewirkt, dass eine größere Gewinndifferenz zum Verlassen der dominanten Strategie nötig ist. Somit sollte eine moderate Erhöhung des Herdenfaktors ein stärkeres Clustering nach sich ziehen. Insgesamt ist es erwartbar, dass sich durch den Herdenfaktor  $\alpha_n$  die Flexibilität des Clusterings erhöht. Abbildung 3.12 zeigt nochmal beispielhaft die Auswirkungen des Parameters  $\alpha_n$  auf das Systemverhalten.

Zum Zwecke der Vereinfachung werden im weiteren Verlauf der Thesis die Akronyme B (Bias), H (Herding), R (Revision), und G (Gewinn) für die einzelnen Varianten des Modells von Franke und Westerhoff (2012, 2016) verwendet werden.

## 3.2 Das Modell von Brock und Hommes (1998)

### 3.2.1 Modelldarstellung

Das Modell von Brock und Hommes (1998) ist wohl das bekannteste und weitverbreitetste ABM in der Finanzwirtschaft. Ein Grund dafür ist eine Adaptabilität des Modellaufbaus, der eine einfache Anpassung des Modells an eine spezifische Forschungsfrage erlaubt. Die generelle Idee hinter dem Modell ist, dass Agenten Erwartungswert-Varianz-Maximierer ihres Vermögens sind. Neben einer risikoreichen Anlage mit Dividende  $y_t$  steht den Agenten auch eine risikolose Investitionsmöglichkeit mit einer sicheren Gewinnrate  $R > 1$ <sup>63</sup> zur Verfügung. Insgesamt führt dies zu folgendem Mo-

---

<sup>63</sup>Es gilt  $R = 1 + r$  für eine risikolose Anlage mit einer sicheren Rendite von  $r > 0$ .

dellansatz:

$$W_{t+1} = (p_{t+1} + y_{t+1} - Rp_t)z_t + RW_t \quad (3.35)$$

$$\max_{z_t} = \left\{ E_t(W_{t+1}) - \frac{a}{2} V_t(W_{t+1}) \right\} \quad (3.36)$$

$$z_t = \frac{E_t(p_{t+1} + y_{t+1} - Rp_t)}{aV_t(p_{t+1} + y_{t+1} - Rp_t)} \quad (3.37)$$

- $W$ : Vermögen der Agenten
- $p$ : Preis
- $y$ : Dividende
- $z$ : Nachfrage nach der risikoreichen Anlage
- $E$ : Erwartete Wertentwicklung
- $V$ : Erwartete Volatilität
- $a$ : Risikoaversion

Nach (3.35-3.37) ergibt sich die Nachfrage nach der risikoreichen Anlage also aus der erwarteten Entwicklung des zukünftigen Preises  $p_{t+1}$  und der zukünftigen Dividende  $y_{t+1}$ , sowie deren erwarteter Volatilität. Die Ausdrücke in (3.35-3.37) beschreiben allerdings nur die Nachfrage eines Händlertyps. Nun treten am Markt aber viele Händlertypen auf, die alle eine individuelle Gewinn-  $E_t^h(W_{t+1})$  und Volatilitätserwartungen  $V_t^h(W_{t+1})$  besitzen und somit auch eine individuelle Nachfrage  $z_{h,t}$  bezüglich der risikoreichen Anlage entwickeln. Wird nun zur Preisfindung das Gesetz von Walras angewandt ergibt, sich für die Summe der Einzelnachfragen:

$$\sum_{h=1}^H n_t^h \frac{E_t^h(p_{t+1} + y_{t+1} - Rp_t)}{aV_t^h(p_{t+1} + y_{t+1} - Rp_t)} = \sum_{h=1}^H n_t^h \frac{E_t^h(p_{t+1} + y_{t+1}) - Rp_t}{a\sigma^2} = 0 \quad (3.38)$$

- $H$ : Anzahl der Händlertypen
- $n_t^h$ : Anteil der Händlertypen
- $\sigma$ : Konstante Volatilitätserwartung

Zur Vereinfachung der Preisfindung wurde in (3.38) die Annahme gemacht, dass die Volatilitätserwartung  $\sigma$  und Risikoaversion  $a$  für alle Händlertypen am Markt

### 3.2. DAS MODELL VON Brock und Hommes (1998)

dieselbe und konstant ist. Damit und der logischen Bedingung  $\sum n_t^h = 1$ , lässt sich der Preis durch Umstellen von (3.38) nun leicht bestimmen:

$$Rp_t = \sum_{h=1}^H n_t^h E_t^h(p_{t+1} + y_{t+1}) \quad (3.39)$$

Bevor nun die Preis- und Dividendenerwartungen der einzelnen Händlertypen modelliert werden können, muss vorher noch der Fundamentalwert  $p_f$  für (3.39) bestimmt werden. Dazu kann einfach angenommen werden, dass am Markt nur voll rationale Händler mit homogenen Erwartungen agieren. Des Weiteren soll die Dividende eine unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariable mit dem Erwartungswert  $E(y_t) = \bar{y}$  sein. Unter Berücksichtigung dieser beiden Annahmen gilt für den Fundamentalwert dann:

$$p_f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{y}}{R^k} = \frac{\bar{y}}{R-1} \quad (3.40)$$

Zum Abschließen der Preisfindung fehlen jetzt nur noch die genauen Definitionen der Preis- und Dividendenerwartungen der Agenten. Der Einfachheit halber soll davon ausgegangen werden, dass der Dividendenprozess allen Agenten bekannt ist, womit sich die Dividendenerwartungen aller Marktteilnehmer dann auf  $E_t^h(y_{t+1}) = \bar{y}$  reduziert. Bezüglich der Preiserwartung allerdings sind die Agenten nicht vollständig rational und homogen. Stattdessen wird angenommen, dass mit Fundamentalisten und Technikern zwei Händlertypen am Markt existieren, die sich mittels einfacher Prognosetechniken Preiserwartungen bilden. Für die Erwartungen werden hier nicht die originalen Definitionen von Brock und Hommes (1998) bzw. Hommes (2006) verwendet, sondern auf die Ausdrücke von Gaunersdorfer et al. (2008) zurückgegriffen<sup>64</sup>. Die Erwartungen haben folgende Form:

$$\begin{aligned} E_t^f(p_{t+1}) &= p_f + v(p_{t-1} - p_f) \\ E_t^c(p_{t+1}) &= p_{t-1} + g(p_{t-1} - p_{t-2}) \end{aligned} \quad (3.41)$$

---

<sup>64</sup>Der Grund hierfür ist, dass sich diese Definition bei der Abbildung der Stylized-Facts als überlegen herausgestellt hat. Siehe hierzu z.B. Kukacka und Kristoufek (2020)

- $v, g$ : Aggressivität der Fundamentalisten bzw Techniker

Wobei für die Parameter in (3.41)  $0 \leq v \leq 1$  und  $g > 0$  gilt. Damit sind die Techniker strikt als Trendfolger definiert<sup>65</sup> und die Fundamentalisten erwarten entweder für  $v = 0$  bzw.  $0 < v < 1$  eine sofortige bzw. teilweise Rückkehr zum Fundamentalwert oder für  $v = 1$  überhaupt keine Preisänderung. Werden die Erwartungen in (3.41) nun in den Ausdruck für den Gleichgewichtspreis in (3.38) eingesetzt, ergibt sich für den Preis  $p_t$ :

$$Rp_t = n_t^f [p_f + v(p_{t-1} - p_f)] + n_t^c [p_{t-1} + g(p_{t-1} - p_{t-2})] + \bar{y} \quad (3.42)$$

Mit dem Ausdruck in (3.42) fehlen zur Berechnung des Preises  $p_t$  nur noch die Spezifikationen der zeitlichen Entwicklung der Strategieanteile  $n_{f,t}$  und  $n_{c,t}$ . Diese werden, wie beim Modell von Franke und Westerhoff (2012, 2016), über die Gibbs-Wahrscheinlichkeit bestimmt:

$$n_t^f = \frac{1}{1 + \exp[\beta(U_{t-1}^c - U_{t-1}^f)]} \quad n_t^c = 1 - n_t^f \quad (3.43)$$

- $\beta$ : Stärke des Gewinn/Verlust-Einflusses auf die Strategiewahl
- $U_t^f, U_t^c$ : Risikoadjustierter Gewinn/Verlust der Strategien

Da die Agenten in diesem Modell bei der Maximierung ihres Vermögens auch das Risiko der Anlage miteinbeziehen, wird hier anstatt des reinen Gewinnes der risikoadjustierte Gewinn in (3.43) zur Bestimmung der Strategie verwendet, welcher sich auf folgende Weise berechnen lässt:

$$\begin{aligned} U_t^f &= (p_t + y_t - Rp_{t-1}) \frac{E_{f,t-1}(p_t + y_t - Rp_{t-1})}{a\sigma^2} + \eta U_{t-1}^f \\ U_t^c &= (p_t + y_t - Rp_{t-1}) \frac{E_{c,t-1}(p_t + y_t - Rp_{t-1})}{a\sigma^2} + \eta U_{t-1}^c \end{aligned} \quad (3.44)$$

- $\eta$ : Gedächtnisfaktor

---

<sup>65</sup>Wäre  $g < 0$  möglich, so könnten die Techniker auch Trendumkehrhändler sein.

### 3.2. DAS MODELL VON Brock und Hommes (1998)

Der neu erzielte risikoadjustierte Gewinn in (3.44) setzt sich also zusammen aus der Wertänderung der risikoreichen Anlage multipliziert mit der Nachfrage der Agenten, welche nach (3.37) wiederum aus dem Quotienten von Gewinnerwartung und Volatilitätserwartung gebildet wird. Des Weiteren wird der vergangene Gewinn über einen Gedächtnisfaktor  $0 \leq \eta \leq 1$  berücksichtigt. Genau wie beim G-Modell gibt der Parameter  $\eta$  den Planungshorizont der Agenten wieder und es gelten dieselben Verhaltensinterpretationen und Einschränkungen, die bereits bei der Diskussion des Modells von Franke und Westerhoff (2016) etabliert wurden. Mit den Systemgleichungen in (3.42-3.44) wäre der deterministische Kern des Systems eigentlich vollständig spezifiziert, allerdings müssen für die in dieser Thesis geplante Anwendung noch zwei Änderungen vorgenommen werden.

1. Dadurch, dass das Systemverhalten hier über einen absoluten Preis  $p_t$  und Fundamentalwert  $p_f$  definiert ist, sind die Modellparameter auch nur für eine bestimmte Preisspanne bzw. für einen bestimmten Fundamentalwert gültig. Um die Abhängigkeit vom Fundamentalwert zu umgehen, wurde bei Brock und Hommes (1998) bereits nicht der absolute Preis, sondern die Differenz zwischen Preis und Fundamentalwert  $x_t = p_t - p_f$  als eine Systemvariable verwendet. Da dies allerdings absolute Differenzen sind, besteht immer noch eine Kopplung der Systemparameter an eine gewisse Preisspanne. Um dies hier ebenfalls zu vermeiden, wird in dieser Thesis stattdessen die relative Abweichung  $x_t = \frac{p_t - p_f}{p_f}$  als Systemvariable verwendet.
2. Mit der Dividende  $y_t$  ist eine Zufallsvariable im risikoadjustierten Gewinn (3.44) enthalten. Wie schon beim G-Modell ist es aus Gründen der Vereinfachung von Vorteil, wenn kein stochastischer Einfluss in den versteckten Variablen existiert. In diesem Fall lässt sich das einfach dadurch beheben, indem die Dividende  $y_t = \bar{y} = y$  als konstant angenommen wird<sup>66</sup>.

Werden diese beiden Änderungen nun auf die Systemgleichungen in (3.42, 3.44)

---

<sup>66</sup>Dies eröffnet die Möglichkeit einer einfachen Kalibrierung, was auch der Grund ist, warum die Annahme einer konstanten Dividende bei Boswijk et al. (2007) und Recchioni et al. (2015) gemacht wurde.

übertragen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 Rx_t &= n_t^f(1-v)x_{t-1} + n_t^c[x_{t-1} + g(x_{t-1} - x_{t-2})] \\
 n_t^f &= \frac{1}{1 + \exp[\beta(U_{t-1}^c - U_{t-1}^f)]} \quad n_t^c = 1 - n_t^f
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}
 U_t^f &= \alpha[x_t - Rx_{t-1}][(1-v)x_{t-2} - Rx_{t-1}] + \eta U_{t-1}^f \\
 U_t^c &= \alpha[x_t - Rx_{t-1}][x_{t-2} + g(x_{t-2} - x_{t-3}) - Rx_{t-1}] + \eta U_{t-1}^c \\
 \alpha &= \frac{p_f^2}{a\sigma^2}
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Mit den Ausdrücken in (3.45, 3.46) ist die Spezifikation des deterministischen Kerns nun vollständig. Was jetzt noch fehlt, ist einen stochastischen Einfluss zu definieren. Zuvor soll allerdings noch das Systemverhalten des deterministischen Kerns genauer untersucht werden. Dazu ist es zweckmäßig zunächst die verschiedenen Fixpunkte des Systems zu untersuchen. Aus (3.45) ist ersichtlich, dass der Fixpunkt der Abweichung bei  $x^* = 0$  sein muss. Für den Fixpunkt des Marktanteils wiederum gilt das Gleiche wie beim G-Modell. Für  $0 \leq \eta < 1$  liegt dieser genau bei  $n^* = n_t^f = n_t^c = 0.5$ , während für  $\eta = 1$  jede Gewinndifferenz ( $U_{t-1}^c - U_{t-1}^f$ ) zum Zeitpunkt  $t = 0$  ein Fixpunkt ist. Im Weiteren wird sich allerdings, wie schon beim G-Modell, wieder auf den Fall  $0 \leq \eta < 1$  beschränkt, was bedeutet für die Gewinne am stationären Punkt gilt  $U_t^f = U_t^c = 0$ . Für eine detailliertere Einsicht in das Verhalten des deterministischen Kerns ist es nötig, eine Stabilitätsanalyse durchzuführen. Ähnlich wie beim G-Modell, liegt auch hier ein dynamisches System sechster Ordnung vor, dessen Zustand von den Variablen  $x_{t-1}, x_{t-2}, x_{t-3}, x_{t-4}$  und  $U_{f,t-2}, U_{c,t-2}$  abhängt. Lösen lässt sich dieses Problem wieder durch eine Transformation in sechs Gleichungen erster Ordnung. Dazu werden die Variablentransformationen  $j_t = x_{t-1}, k_t = x_{t-2}, l_t = x_{t-3}, \tilde{U}_t^f = U_{t-1}^f, \tilde{U}_t^c = U_{t-1}^c$  und  $x_i(t) = x_{t-i}, u_i^f(t) = \tilde{U}_{t-i}^f, u_i^c(t) = \tilde{U}_{t-i}^c$  durchgeführt. Durch die Transformation  $w_t = \Lambda w_{t-1}$  des Variablenvektor  $w_{t-1} = (x_{t-1}, j_{t-1}, k_{t-1}, l_{t-1}, \tilde{U}_{t-1}^f, \tilde{U}_{t-1}^c) = (x_1, x_2, x_3, x_4, u_1^f, u_1^c)$ <sup>67</sup> mit der Übergangsmatrix  $\Lambda$  lässt sich dann die Dynamik des Systems vollständig

<sup>67</sup>Vergleiche dazu wieder Gaunersdorfer et al. (2008).

### 3.2. DAS MODELL VON Brock und Hommes (1998)

beschreiben. Für das 6-dim Gleichungssystem ergibt sich somit:

$$\begin{pmatrix} x_t \\ j_t \\ k_t \\ l_t \\ \tilde{U}_t^f \\ \tilde{U}_t^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R}[n_t^f(1-v)x_1 + n_t^c[x_1 + g(x_1 - x_2)]] \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \alpha[x_1 - Rx_2][(1-v)x_3 - Rx_2] + \eta u_1^f \\ \alpha[x_1 - Rx_2][x_3 + g(x_3 - x_4) - Rx_2] + \eta u_1^c \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

mit

$$n_t^f = \frac{1}{1 + \exp[\beta(u_1^c - u_1^f)]} \quad n_t^c = 1 - n_t^f$$

Zur Stabilitätsanalyse der Fixpunkte des Gleichungssystems in (3.47) müssen nun wieder die Eigenwerte der Jacobi-Matrix am Fixpunkt bestimmt werden. Dadurch, dass der stationäre Punkt bei  $x^* = 0$  und  $\tilde{U}_t^f = \tilde{U}_t^c = 0$  liegt, vereinfacht sich das Problem erheblich, da viele Einträge der Jacobi-Matrix Null ergeben. Für die Eigenwerte  $\lambda$  ergibt sich dann folgendes charakteristisches Polynom:

$$\lambda^2 \cdot (\eta - \lambda)^2 \cdot \left( \lambda^2 - \lambda \frac{2 + g - v}{2R} + \frac{g}{2R} \right) = 0 \quad (3.48)$$

Wie aus (3.48) ersichtlich ist, sind die ersten vier Eigenwerte  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = \lambda_4 = \eta$ . Da der Betrag all dieser Eigenwerte kleiner als eins ist, hängt die Stabilität des Systems, wie schon beim G-Modell, von den verbleibenden Eigenwerten  $\lambda_{5,6}$  ab. Für diese Eigenwerte ergibt sich schließlich aus dem charakteristischen Polynom in (3.48) folgende Beziehung<sup>68</sup>:

$$\lambda_5 + \lambda_6 = \frac{2 + g - v}{2R} \quad \lambda_5 \cdot \lambda_6 = \frac{g}{2R} \quad (3.49)$$

Um zu untersuchen, bei welcher Parameterkonstellation das System nun instabil wird, muss eine Fallunterscheidung von (3.20) gemacht werden.

1. Einer der beiden Eigenwerte ist gleich 1. Durch Setzen von  $\lambda_6 = 1$ <sup>69</sup> und

<sup>68</sup>Für eine genauere Beschreibung dieser Methode siehe wieder Gaunersdorfer et al. (2008).

<sup>69</sup>Das Setzen von  $\lambda_5 = 1$  führt hier ebenso zu einem äquivalenten Ergebnis.

verwenden der Ausdrücke in (3.49) ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$v = 2(1 - R) \tag{3.50}$$

2. Einer der beiden Eigenwerte ist gleich -1. Analog zum ersten Fall ergibt sich durch Setzen von  $\lambda_6 = -1$  und verwenden der Ausdrücke in (3.49) folgender Zusammenhang:

$$v = 2(g + R + 1) \tag{3.51}$$

3. Komplexe konjugierte Eigenwerte mit Betrag 1. Diese Voraussetzung ist für  $\lambda_5 \cdot \lambda_6 = 1$  und  $|\lambda_5 + \lambda_6| < 2$  erfüllt. Anwenden dieser Definition und Einsetzen in (3.49) ergibt die Bedingung:

$$g = 2R \quad \left| 1 + \frac{2 - v}{2R} \right| < 2 \tag{3.52}$$

Die Bedingungen in (3.50) kann nur dann gültig sein, wenn  $v < 0$  gilt. Dies würde bedeuten, dass die Fundamentalisten davon ausgehen, dass bestehende Differenzen vom Fundamentalwert immer größer werden. Damit führt jede Abweichung vom Fixpunkt zu einer Trajektorie, die je nach Startpunkt für  $t \rightarrow \infty$  gegen unendlich bzw. minus unendlich divergiert. Da in der Modelldefinition allerdings bereits die Bedingung  $0 \leq v \leq 1$  vorgegeben wurde, ist dieser Fall hier nicht weiter von belang. Im Gegensatz dazu kann die Bedingungen in (3.51) nur Gültigkeit haben, wenn für die Aggressivität der Fundamentalisten  $v > 1$  gilt. In diesem Fall würden die Fundamentalisten Abweichung zu stark korrigieren, was bedeutet, dass sich eine bestehende Abweichung unter wechselndem Vorzeichen beständig verstärkt. Auch für diese Art der Trajektorie gibt es nun zwei Möglichkeiten in Abhängigkeit des Wertes von  $g$ . Entweder sie strebt gegen unendlich für  $t \rightarrow \infty$  oder sie läuft auf einen stabilen Grenzzyklus hinaus. Auch dieser Fall ist allerdings bereits durch die Bedingung  $0 \leq v \leq 1$  ausgeschlossen<sup>70</sup>. Damit bleibt als relevanter Fall nur noch die Bedingung in (3.52)

---

<sup>70</sup>Eine andere Möglichkeit für die Gültigkeit der Bedingung in (3.51) ist  $g \leq 2(R + 1)$ , allerdings ist auch das durch die Bedingung  $g > 0$  bereits ausgeschlossen

### 3.2. DAS MODELL VON Brock und Hommes (1998)

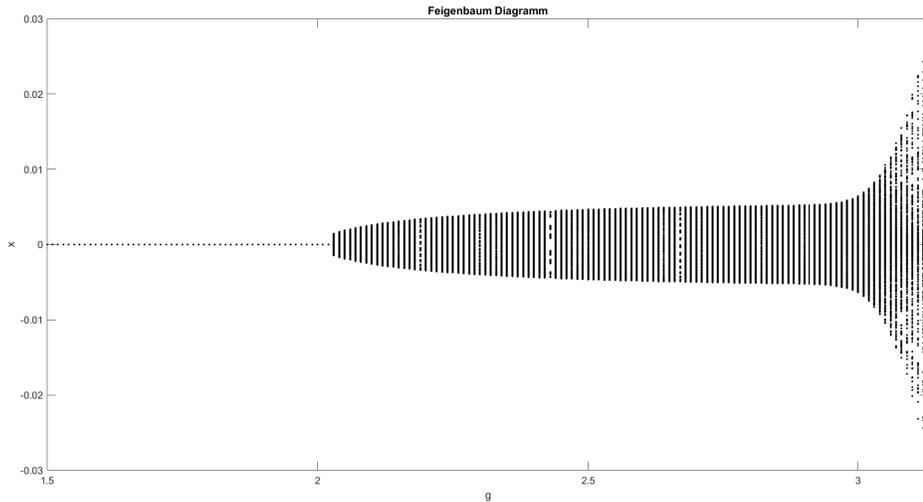


Abbildung 3.13: Feigenbaum-Diagramm des Modells von Brock und Hommes (1998) für den Fall 3 unter Variation des Parameters  $g$ . Die anderen Parameter sind dabei  $R = 1.001$ ,  $v = 1$ ,  $\lambda = 500$ ,  $\beta = 1$ ,  $\eta = 0.99$ . Wie zu erkennen, wird der stabile Fixpunkt, wie in (3.52) vorhergesagt, bei  $g = 2R$  instabil und geht zuerst in einen periodischen Grenzzyklus über. Wird der Parameter  $g$  weiter erhöht, so vergrößert sich der Grenzzyklus. Von da aus führt ein kontinuierlicher Anstieg von  $g$  schließlich irgendwann zur Ausbildung von chaotischem Verhalten. Ähnlich wie beim gewinnorientierten Ansatz von Franke und Westerhoff (2016) wird das System bei einer immer weiteren Erhöhung des Parameters  $g$  ebenfalls vollständig instabil.

übrig. Da die Annahme  $R > 1$  ist, ist die Ungleichung in (3.52) für  $0 \leq v \leq 1$  immer gültig. Damit bleibt als einzige Bedingung für einen instabilen Fixpunkt  $g \geq 2R$  übrig. Sobald der Parameter  $g$  diese Schwelle erreicht bzw. überschreitet, ist die Aggressivität der Techniker groß genug, um den stabilisierenden Einfluss der Fundamentalisten zu überwinden. Im Gegensatz zum G-Modell ist diese Bedingung auch nicht mit zu hohen Werten für die deterministischen Parameter verbunden, sodass dieser Fall hier durchaus eintreten kann. Da im Fall 3 die Eigenwerte komplex sind, liegt eine Hopf-Bifurkation vor, sobald der Wert  $g = 2R$  erreicht wird. Wie bereits beim G-Modell erwähnt, bewirkt eine Hopf-Bifurkation, dass sich die Trajektorie auf einer spiralförmigen Bahn um den Fixpunkt bewegt. Weitere Erhöhungen des Para-

meters  $g$  führen dann zu chaotischem Verhalten, wie es das Feigenbaum-Diagramm in Abbildung 3.13 zeigt. Zusammengefasst gibt es also theoretisch vier verschiedene Systemzustände, in denen sich das Modell befinden kann. Zwei davon sind allerdings von vorneherein durch die Bedingung  $0 \leq v \leq 1$  ausgeschlossen. Damit sind nur der stabile Fall und in geringerem Ausmaße der instabile Fall für  $g > 2R$  im Weiteren für die Optimierung bedeutsam.

### 3.2.2 Zufallseinfluss

Bisher ist das Modell rein deterministisch, wodurch es insgesamt nur in der Lage ist, einen kleinen Teil der Dynamik an Finanzmärkten abbilden zu können. Um dieses Problem zu beheben, muss noch ein gewisser Zufallseinfluss in das Modell implementiert werden. Normalerweise wird dies durch einen einfachen additiven Zufallsterm sichergestellt<sup>71</sup>, in dieser Anwendung des Modells soll der Zufallseinfluss allerdings wie bei Amilon (2008) mit dem Preis skaliert werden. Die Wahl dieses Ansatzes hat zwei Gründe. Erstens lässt sich so die Modellvolatilität direkt auf die Rendite und nicht auf den Preis zurückführen, was die spätere Optimierung erleichtert und zweitens wird damit das Problem umgangen, dass die Volatilität nur für einen gewissen Preisbereich gültig ist<sup>72</sup>. Insgesamt ergibt sich damit folgender Ausdruck für die Abweichung vom Fundamentalwert:

$$Rx_t = n_t^f(1 - v)x_{t-1} + n_t^c[x_{t-1} + g(x_{t-1} - x_{t-2})] + (1 + x_{t-1})\sigma_t\epsilon_t \quad (3.53)$$

- $\sigma_t$ : Volatilität zum Zeitpunkt  $t$
- $\epsilon_t$ : Normalverteilte Zufallsvariable zum Zeitpunkt  $t$

Im Gegensatz zu den vorherigen ABM, besitzt das Modell von Brock und Hommes (1998) keine bereits ins System eingebettete variablen Zufallseinfluss und da dies für die Möglichkeit einer akkuraten VaR-Prognose eine Notwendigkeit ist, muss diese

---

<sup>71</sup>Siehe hierzu z.B. Brock und Hommes (1998), Gaunersdorfer et al. (2008), Kukacka und Kristoufek (2020), Platt (2020)

<sup>72</sup>Dies wäre hier insofern ein Problem, da die verwendete Datengrundlage einen großen Preisbereich umfasst.

### 3.2. DAS MODELL VON Brock und Hommes (1998)

noch nachträglich ins Modell implementiert werden muss. Der einfachste Weg, dies zu erreichen, ist es dieselbe Zufallsdefinition wie bei Franke und Westerhoff (2012, 2016) zu verwenden. Eine weitere Möglichkeit ist, den Zufallsanteil der Preisfindung als den Einfluss von Noise-Tradern<sup>73</sup> zu definieren, welche dann einfach wie ein neuer Agententyp mit einem bestimmten Verhalten behandelt werden können. In diesem Fall ist das Verhalten der Noise-Trader von Marktstimmung abhängig und hohe Volatilität tritt immer dann auf, wenn der Markt in Panik verfällt. Angelehnt an die Volatilitätsdefinition von Alfarano et al. (2008) tritt dann Panik am Markt auf, wenn übermäßig viel zwischen den Strategien gewechselt wird. Da es für das Brock und Hommes (1998) Modell bisher kein Ansatz mit variable Volatilität existiert, werden in dieser Thesis folgende Ansätze dafür vorgeschlagen:

$$\sigma_t = \begin{cases} \sqrt{n_{f,t-1}^2 \sigma_f^2 + n_{c,t-1}^2 \sigma_c^2} \\ \sigma [1 + \sigma_r |n_{f,t-1} - n_{f,t-2}|] \\ \sqrt{n_{f,t-1}^2 \sigma_f^2 + n_{c,t-1}^2 \sigma_c^2 + \sigma_r^2 |n_{f,t-1} - n_{f,t-2}|^2} \end{cases} \quad (3.54)$$

- $\sigma_f, \sigma_c$ : Volatilität der Fundamentalisten und Trendfolger
- $\sigma$ : Grundvolatilität der T-Variante
- $\sigma_r$ : Reaktion der Noise-Trader auf die Stärke des Strategiewechsels

Zum Zwecke der Vereinfachung werden im weiteren Verlauf der Thesis die Akronyme F (Fraktion), T (Turnover) und FT (Fraction/Turnover) für die einzelnen Modellvarianten in (3.54) verwendet werden. Des Weiteren wird zu besseren Vergleich mit den Modellen von Franke und Westerhoff (2012) für den Marktanteil die Bezeichnung  $z_t = n_t^f - n_t^c = 2n_t^f - 1 = 1 - 2n_t^c$  angewandt.

---

<sup>73</sup>Ein Noise-Trader handelt, anders als es der Name auf den ersten Blick vermuten lässt, nicht völlig zufällig. Stattdessen fallen unter den Begriff viele verschiedene Strategien, welche entweder auf nicht rationalen Ansätzen basieren oder schlicht zu verschieden sind, um explizit modelliert zu werden. In beiden Fällen wird das Verhalten einfach durch zufälliges Handeln (Random-Trading) approximiert.

### 3.2.3 Zu erwartendes Systemverhalten

Auch hier stellt sich natürlich noch die Frage, wie sich das Modell in Krisen- und normalen Zeiten verhält. Da das Modell von Brock und Hommes (1998) viele Gemeinsamkeiten mit dem G-Modell aufweist, ist das Systemverhalten beider Modelle sehr ähnlich. Zur Generierung einer Rendite mit schwachem Volatilitätsclustering, ist also erst mal ein stabiler Fixpunkt zu erwarten und der Marktanteil sollte entweder relativ konstant sein (F,FT) oder keine allzu großen Variationen in der Änderung vorweisen (T,FT). Dies kann relativ einfach durch einen kleinen Wert für  $\beta$  realisiert werden, womit der Einfluss des Gewinns auf die Strategieauswahl schwächer wird, was wiederum nur zu einem geringen Wechsel zwischen den Strategieanteilen führt. Für normales Systemverhalten ist der Einfluss des Parameters  $\alpha$  deutlich geringer, da der Wert für  $\alpha$  bei  $\beta \rightarrow 0$  bedeutungslos wird. Gleichwohl ist eher ein kleiner Wert für  $\alpha$  zu erwarten, da hierdurch der Einfluss des aktuellen Gewinns geringer wird, was wiederum die Stabilität der Strategieauswahl erhöht. Für  $\eta$  gilt im Prinzip dasselbe wie für  $\alpha$ , mit dem Unterschied, dass ein hoher Wert für  $\eta \approx 1$  die Stabilität der Strategieauswahl erhöht, da dadurch der Einfluss kurzfristiger Gewinnschwankungen geringer wird. Eine weitere Möglichkeit, kaum Volatilitätsclustering zu generieren, ergibt sich, wenn für die Volatilitäten der Strategien  $\sigma_f \approx \sigma_c$  (F,FT) gilt oder wenn die Volatilität der Noise-Trader  $\sigma_r$  (T,FT) sehr klein wird. Der Krisenfall lässt sich ebenfalls mit einem stabilen Fixpunkt erreichen. Dazu muss bei der F-Variante für die Volatilitätsparameter  $\sigma_f < \sigma_c$  gelten. Des Weiteren muss  $\beta$  groß genug sein, damit größere Strategiewechsel möglich sind. Die Parameter  $\alpha$  und  $\eta$  wirken sich gegensätzlich auf die Stabilität der Strategien aus. Während  $\eta$  den Marktanteil stabilisiert, wirkt  $\alpha$  destabilisierend. Da auf der einen Seite eine gewisse Stabilität im System notwendig ist, um Perioden ähnlicher Volatilität zu erzeugen, ist zu erwarten, dass  $\eta$  nicht allzu klein wird. Auf der anderen Seite müssen ebenfalls Strategiewechsel möglich sein, sodass auch  $\alpha$  einen nicht allzu geringen Wert aufweisen darf. Abbildung 3.14 zeigt nochmal beispielhaft die Auswirkungen der Parameter  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\eta$  auf das Systemverhalten.

Für die T-Variante wiederum muss für Krisenverhalten über einen längeren Zeitraum

### 3.2. DAS MODELL VON Brock und Hommes (1998)

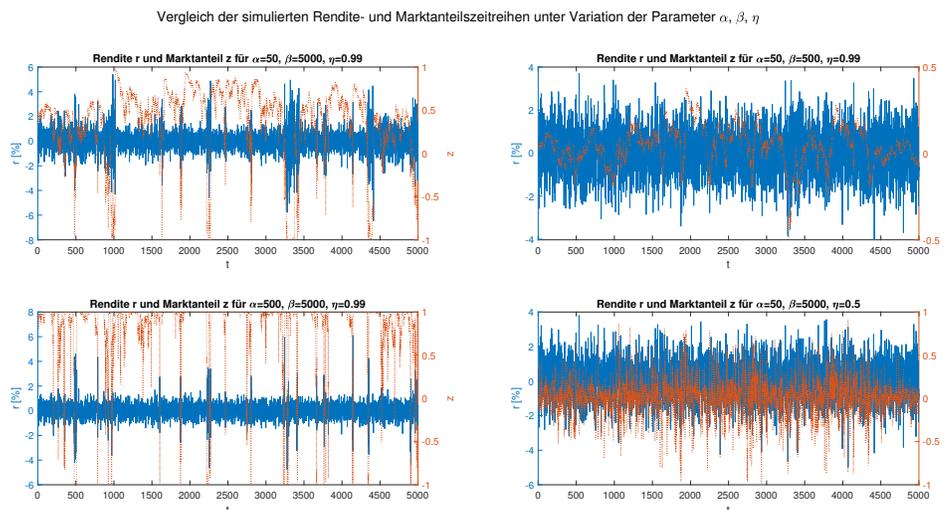


Abbildung 3.14: Vergleich der Renditen und Marktanteile des F-Modells für den Fall eines stabilen Fixpunktes. Dabei wurden für die restlichen Parameter die Werte  $R = 1.001$ ,  $v = 0.0001$ ,  $g = 0.01$ ,  $\sigma_f = 0.005$  und  $\sigma_c = 0.01$  gewählt. Insgesamt bedeuten größere Werte für  $\beta$  und  $\eta$  stärkeres Volatilitätsclustering und kleinere Werte führen eher zu einer normalverteilten Rendite, während für  $\alpha$  das Gegenteil der Fall ist.

ein hoher Anteil von Agenten die Strategie wechseln. Damit dies eintreten kann, ist ein hoher Wert von  $\alpha$  und  $\beta$  sowie ein kleiner Wert von  $\eta$  zu erwarten. Beides führt dazu, dass Agenten sensitiv auf kurzfristige Gewinnschwankungen reagieren und somit die Möglichkeit für viele Strategiewechsel besteht. Des Weiteren entspricht der Parameter  $\sigma$  dabei der Grundvolatilität und  $\sigma_r$  muss groß genug sein, um eine merkbare Erhöhung dieser Grundvolatilität zu erlauben. Abbildung 3.15 zeigt nochmal beispielhaft die Auswirkungen der Parameter  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\eta$  auf das Systemverhalten des T-Modells.

Zu guter Letzt kann beim FT-Modell sowohl der Mechanismus der F-Variante als auch der vom T-Modell zum Krisenverhalten führen, wobei der F-Anteil vor allem für das Volatilitätsclustering verantwortlich ist und der T-Anteil zu hohen, aber isolierten Renditeausreißern führt. Abbildung 3.16 zeigt nochmal beispielhaft die Auswirkungen der Parameter  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\eta$  auf das Systemverhalten des FT-Modells.

## KAPITEL 3. VERWENDETE AGENTENMODELLE

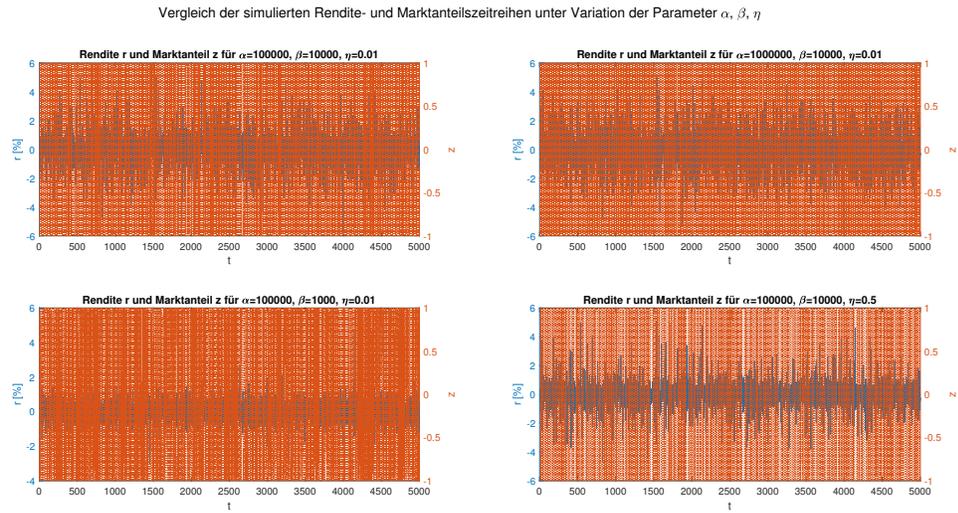


Abbildung 3.15: Vergleich der Renditen und Marktanteile des T-Modells für den Fall eines stabilen Fixpunktes. Dabei wurden für die restlichen Parameter die Werte  $R = 1.001$ ,  $v = 0.0001$ ,  $g = 0.01$ ,  $\sigma_0 = 0.005$  und  $\sigma_r = 2.0$  gewählt. Wie beim F-Modell bedeuten größere Werte für  $\beta$  stärkeres Volatilitätsclustering. Allerdings verstärkten hohe Werte für  $\alpha$  und niedrige Werte für  $\eta$  bei diesem Modell das Volatilitätsclustering.

Bei diesem Modell ist es allerdings durchaus auch theoretisch möglich, den Krisenfall für einen instabilen Fixpunkt zu generieren. Da hierfür nur der Fall 3 in (3.52) relevant ist, muss nur zwingend die Bedingung  $g \geq 2R$  gelten. Für alle anderen Parameter lässt sich nur schwer eine Voraussage treffen, da a priori nicht festgestellt werden kann, unter welchen Parameterkonstellationen nun genau chaotisches Verhalten eintritt.

### 3.3. DAS MODELL VON Lux et al. (2005)

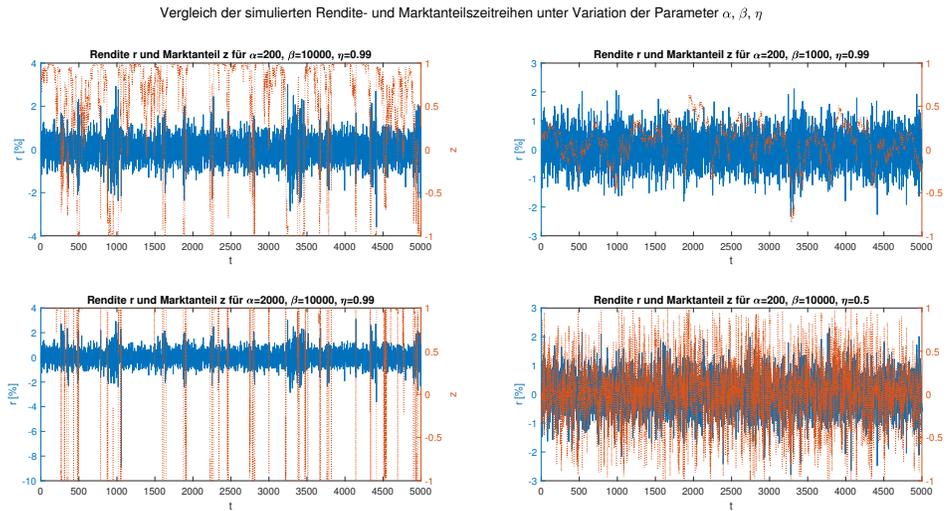


Abbildung 3.16: Vergleich der Renditen und Marktanteile des FT-Modells für den Fall eines stabilen Fixpunktes. Dabei wurden für die restlichen Parameter die Werte  $R = 1.001$ ,  $v = 0.0001$ ,  $g = 0.01$ ,  $\sigma_f = 0.005$ ,  $\sigma_c = 0.01$  und  $\sigma_r = 0.01$  gewählt. Wie beim F-Modell bedeuten größere Werte für  $\beta$  und  $\eta$  stärkeres Volatilitätsclustering und kleinere Werte führen eher zu einer normalverteilten Rendite, während für  $\alpha$  das Gegenteil der Fall ist. Des Weiteren treten bei höheren  $\alpha$  Werten auch verstärkt hohe, aber isolierte Renditeausreißer auf.

## 3.3 Das Modell von Lux et al. (2005)

### 3.3.1 Modelldarstellung

Das Modell von Lux et al. (2005) ist ein weiterer Ansatz, welcher als Grundlage der Renditegenerierung ebenfalls über eine variable Varianz der Rendite verfügt, aber im Gegensatz zu den vorher betrachteten Modellen, gibt es in diesem Fall keinen deterministischen Kern. Die simulierte Rendite wird alleine durch die variable Varianz bestimmt, welche wiederum, wie bei den vorherigen Modellen, durch den Marktanteil der Strategien gebildet wird. Dabei können die Agenten hier zwischen einer fundamentalen und einer Noise-Trading-Strategie<sup>74</sup>, anstatt einer Techniker Strategie

<sup>74</sup>Als Noise-Trading bezeichnet man irrationales Handeln, dem keine (rationale) Strategie zugrunde liegt. Von daher unterscheidet es sich im Endeffekt nicht von völlig zufälligem Handeln

gie, wählen. Die Bestimmung des Preises  $p_t$ , bzw. dessen Änderung wird nicht durch einen Marketmaker durchgeführt, sondern das Marktgleichgewicht von Angebot und Nachfrage ermittelt. Die Angebots- bzw. Nachfragefunktion der Fundamentalisten  $n_f$  und Noise-Trader  $n_r$  bilden sich dabei wie folgt:

$$n_t^f = N_t^f(p_f - p_t) \quad n_t^r = N_t^r r_0 \xi_t \quad (3.55)$$

- $n_t^f, n_t^r$ : Nachfrage/Angebot der Fundamentalisten bzw. Noise-Trader zum Zeitpunkt  $t$
- $N_t^f, N_t^r$ : Anzahl der Fundamentalisten bzw. Noise-Trader zum Zeitpunkt  $t$
- $p_f$ : Logarithmischer Fundamentalwert
- $p_t$ : Logarithmischer Preis zum Zeitpunkt  $t$
- $r_0$ : Skalierungsfaktor des Einflusses der Noise-Trader
- $\xi_t$ : Stimmung der Noise-Trader zum Zeitpunkt  $t$

Die Nachfragefunktion der Fundamentalisten in (3.55) orientiert sich standardmäßig an der Differenz zum fundamentalen Wert der Anlage. Je größer bzw. kleiner die Differenz ist, desto höher das Angebot bzw. die Nachfrage der Fundamentalisten. Interessanter ist die Definition der Nachfragefunktion der Noise-Trader. Lux et al. (2005) beschreiben  $\xi_t$  als mittlere Stimmung der Noise-Trader und führen aus, dass die Nachfrage der Noise-Trader auf einer Fehlwahrnehmung des Fundamentalpreises  $p_f$  basiert<sup>75</sup>. Insgesamt bedeutet das, dass die Noise-Trader alle eine ähnliche, irrationale Strategie aufgrund einer gemeinsamen Fehlwahrnehmung verfolgen, welche schlussendlich einer aggregierten, zufälligen Handelsentscheidung entspricht. Die Stimmung selber ist eine Zufallsvariable, welche im Modell nicht explizit definiert wird, da nur die zeitliche Änderung  $\zeta_t = \xi_t - \xi_{t-\Delta t}$  über, einen vorerst nicht weiter spezifizierten, Zeitraum  $\Delta t$  für das Systemverhalten des Modells interessant ist. Der Preis selbst wird nach dem Gesetz von Walras bestimmt und entspricht damit dem Gleichgewichtspreis zwischen Angebot und Nachfrage:

$$n_t^f + n_t^r = N_t^f(p_f - p_t) + N_t^r r_0 \xi_t = 0 \quad (3.56)$$

---

(Random-Trading) und kann deshalb auch als solches modelliert werden.

<sup>75</sup>Die Idee hinter dieser Definition von Noise-Tradern wiederum stammt von De Long et al. (1990).

### 3.3. DAS MODELL VON Lux et al. (2005)

Durch Umstellen von (3.56) und Einsetzen der Beziehungen<sup>76</sup>  $N = N_t^f + N_t^c$ ,  $m_t = N_t^f/N$ <sup>77</sup> ergibt sich für den Preis  $p_t$ :

$$p_t = p_f + r_0 \frac{1 - m_t}{m_t} \xi_t \quad (3.57)$$

Aus dem Preis in (3.57) können direkt zwei Beobachtungen gezogen werden. Vorfolgen alle Agenten eine Fundamentalstrategie gilt,  $m_t = 1$  und damit  $p_t = p_f$ . Sollten aber alle Agenten Noise-Trader und  $\xi_t \neq 0$  sein, so ist die Abweichung vom Fundamentalwert  $p_f$  und damit auch der Preis  $p_t$  unendlich. Da dies kein valides Ergebnis sein kann, muss es also eine Mindestanzahl von Fundamentalisten<sup>78</sup> im System geben und damit eine untere Schranke von  $m_u > 0$  existieren. Ob es nötig ist, manuell einen Wert für  $m_u$  vorzugeben, kann erst nach Einführung der zeitlichen Entwicklung von  $m_t$  entschieden werden. Aus (3.57) lässt sich nun leicht die Rendite  $r_t = p_t - p_{t-\Delta t}$  herleiten. Es gilt:

$$r_t = r_0 \left( \frac{1 - m_t}{m_t} \xi_t - \frac{1 - m_{t-\Delta t}}{m_{t-\Delta t}} \xi_{t-\Delta t} \right) \quad (3.58)$$

Mit dem Argument von Lux et al. (2005), dass die Änderung des Marktanteils  $m_{t-\Delta t} \rightarrow m_t$  für kleine Zeiträume  $\Delta t$  eher träge gegenüber der Änderung der Stimmung der Noise-Trader  $\xi_{t-\Delta t} \rightarrow \xi_t$  abläuft, lässt sich der Ausdruck in (3.58) noch etwas vereinfachen. Die Idee dahinter ist, dass sich  $m_t$  für einen Zeitschritt nur wenig ändert, also die Approximation  $m_t \approx m_{t-\Delta t}$  gilt und somit die kurzfristige Veränderung des Marktanteils  $m_t$  auf die Rendite  $r_t$  vernachlässigt werden kann. Damit bleibt einzig die Änderung der Stimmung der Noise-Trader  $\xi_t$  als Treiber der Rendite  $r_t$  in (3.58) übrig. Mit diesen Voraussetzungen und der Definition  $\zeta_t = \xi_t - \xi_{t-\Delta t}$  vereinfacht sich der Ausdruck aus (3.58) zu:

---

<sup>76</sup>Wird die Anzahl der Agenten  $N$  als sehr groß angenommen ( $N \rightarrow \infty$ ), lässt sich das System auch mittels eines kontinuierlichen Marktanteils approximieren.

<sup>77</sup>Im Originalmodell von Lux et al. (2005) wurde für den Marktanteil die Definition  $m_t^f = N_t^f/N$  gewählt. Es gilt also  $m_t^f = 1 - m_t$ . Die Änderung wurde hier vorgenommen um die Definition des Marktanteils dieses Modells an den der vorherigen Modelle anzugleichen.

<sup>78</sup>Ein ähnliches Problem existiert z.B. im Modell von Lux und Marchesi (1999, 2000), weshalb dort auch eine Mindestanzahl von Agenten für die möglichen Strategien vorgegeben wird.

$$r_t = r_0 \frac{1 - m_t}{m_t} \zeta_t \quad (3.59)$$

- $\zeta_t$ : Änderung der Stimmung der Noise-Trader zum Zeitpunkt  $t$

Die Änderung der Stimmung der Noise-Trader  $\zeta_t$  in (3.59) wird dabei durch eine unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariable dargestellt<sup>79</sup> und der Skalierungsfaktor  $r_0$  lässt sich als die unbedingte Varianz der Rendite  $r_t$  interpretieren. Volatilitätsclustering wiederum wird durch den zeitlich variablen Marktanteil  $m_t$  erzeugt, wobei die Volatilität umso höher ist, desto größer der Anteil der Noise-Trader ist. Damit die Approximation der Rendite  $r_t$  in (3.59) allerdings überhaupt valide ist, muss die Annahme eines sich nur langsam zeitlich ändernden Marktanteils  $m_t$  erfüllt sein. Um das überprüfen zu können, muss zuerst eine Funktion für den Marktanteil  $m_t$  definiert werden. Lux et al. (2005) beschreiben die Änderungen des Marktanteils ähnlich wie Kirman (1993) als einen Markov Prozess, der hier allerdings als zeitkontinuierlich und nicht zeitdiskret angenommen wird. Unter der Annahme, dass nur ein einziger Wechsel im Zeitintervall  $\Delta t < 1$  stattfinden kann, gilt für die Übergangswahrscheinlichkeiten  $P(n', t | n, t - \Delta t)$  der Zustände  $n \rightarrow n'$  per Zeitintervall  $\Delta t$ :

$$P(n', t | n, t - \Delta t) = \Delta t \pi(n \rightarrow n')$$

$$\pi(n \rightarrow n') = \begin{cases} \pi(r \rightarrow f) = N_{t-\Delta t}^r (\lambda_f + \delta N_{t-\Delta t}^f) \\ \pi(f \rightarrow r) = N_{t-\Delta t}^f (\lambda_r + \delta N_{t-\Delta t}^r) \end{cases} \quad (3.60)$$

- $\pi(n \rightarrow n')$ : Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand  $n$  zum Zustand  $n'$  mit der Einschränkung  $N_t^r = N_{t-\Delta t}^r \pm 1, N_t^f = N_{t-\Delta t}^f \mp 1$
- $\pi(r \rightarrow f)$ : Wahrscheinlichkeit für den Wechsel eines Agenten vom Noise-Trading zur Fundamentalstrategie
- $\pi(f \rightarrow r)$ : Wahrscheinlichkeit für den Wechsel eines Agenten von der Fundamentalstrategie zum Noise-Trading

---

<sup>79</sup>Womit die Stimmung der Noise-Trader  $\xi_t$  einem Random-Walk entspricht.

### 3.3. DAS MODELL VON Lux et al. (2005)

- $\lambda_f$ : Attraktivitätsfaktor der Fundamentalstrategie
- $\lambda_r$ : Attraktivitätsfaktor des Noise-Tradings
- $\delta$ : Rekrutierungsfaktor, der die Stärke des Herdentriebverhaltens beschreibt

In (3.60) sind die Wahrscheinlichkeiten für das Wechseln eines Agenten von seiner bisherigen zur alternativen Strategie<sup>80</sup> gegeben, wobei die Parameter, welche die Wahrscheinlichkeiten bestimmen, im Weiteren noch genauer erläutert werden sollen. Wie im Modell von Kirman (1993) stellen die Attraktivitätsparameter  $\lambda_f$ ,  $\lambda_r$  die Wahrscheinlichkeit dar, dass ein individueller Agent seine Strategie von alleine wechselt.<sup>81</sup> Im Unterschied zum Modell von Kirman (1993) sind diese allerdings erstens für die beiden Strategien nicht identisch und zweitens bereits mit der Gesamtanzahl der Agenten skaliert<sup>82</sup>. Der Parameter  $\delta$  wiederum ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Agent seine Strategie nach dem Treffen mit einem die andere Strategie verfolgenden Agenten wechselt<sup>83</sup>. Wie beim Modell von Kirman (1993) wird für den Herdeneffekt nicht zwischen den Strategien unterschieden, sodass sich der Rekrutierungsfaktor  $\delta$  auf beide Strategien gleich auswirkt. Der Rekrutierungsfaktor  $\delta$  ist, wie die Attraktivitätsfaktoren  $\lambda_f$ ,  $\lambda_r$ , hier ebenfalls mit der Anzahl der Agenten skaliert<sup>84</sup>. Mit den Ausdrücken für die Rendite in (3.59) und den Übergangswahrscheinlichkeiten in (3.60) könnte das System bereits simuliert werden, allerdings kann die zeitliche Entwicklung des Marktanteils auch als dynamisches System dargestellt werden, anstatt explizit die Übergangswahrscheinlichkeiten zu modellieren. Zur Herleitung wird in Lux et al. (2005) die zeitdiskrete Mastergleichung der Übergangswahrscheinlichkeiten

---

<sup>80</sup>Es gibt allerdings auch die Möglichkeit, dass  $n \rightarrow n$  gilt, also kein Strategiewechsel stattfindet und der Ausgangszustand beibehalten wird. Diese Wahrscheinlichkeit lässt sich leicht herleiten, da  $P(n, t|n, t - \Delta t) = 1 - \sum P(n', t|n, t - \Delta t) = 1 - \Delta t \pi(r \rightarrow f) - \Delta t \pi(f \rightarrow r)$  gelten muss.

<sup>81</sup>Daher bildet das Produkt  $\Delta t \lambda_f N_{t-\Delta t}^r$  bzw.  $\Delta t \lambda_r N_{t-\Delta t}^f$  in (3.60) die Wahrscheinlichkeit, dass einer der Agenten zum Noise-Trading bzw. zur Fundamentalstrategie wechselt. Der Strategiewechsel eines Agenten wird also wahrscheinlicher, je mehr Agenten die jeweilige Strategie verfolgen.

<sup>82</sup>Um die Spezifikation  $\lambda^K$  von Kirman (1993) zu erhalten kann einfach die Beziehung  $\lambda_f = \lambda_r = \frac{\lambda^K}{N}$  verwendet werden.

<sup>83</sup>Auch hier wird die Wechselwahrscheinlichkeit durch ein Produkt  $\delta N_{t-\Delta t}^r N_{t-\Delta t}^f$  gegeben, wobei  $N_{t-\Delta t}^r N_{t-\Delta t}^f$  die Möglichkeit beschreibt, dass sich zwei Agenten mit unterschiedlichen Strategien treffen.

<sup>84</sup>Für den original Parameter  $\delta^K$  von Kirman (1993) gilt der Zusammenhang  $\delta = \frac{1-\delta^K}{N(N-1)}$ .

in (3.60) in eine zeitkontinuierliche Fokker-Planck Gleichung umgewandelt<sup>85</sup>:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(m, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial m}[A(m)w(m, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial m^2}[B(m)w(m, t)] \\ A(m) &= \lambda_f - (\lambda_f + \lambda_r)m \\ B(m) &= 2\delta(1 - m)m + \frac{1}{N}[\lambda_f(1 - m) + \lambda_r m] \end{aligned} \quad (3.61)$$

- $w(m, t)$ : Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion in Abhängigkeit des Marktanteils  $m$  und der Zeit  $t$
- $A(m)$ : Driftterm des Marktanteils  $m$
- $B(m)$ : Diffusionsterm des Marktanteils  $m$

Da es einen direkten Zusammenhang zwischen dem Driftterm und Diffusionsterm der Fokker-Planck Gleichung in (3.61) und einer stochastischen Differentialgleichung gibt, lässt sich nun die zeitliche Entwicklung des Marktanteils  $m_t$  direkt aus (3.61) ableiten:

$$\begin{aligned} dX_t &= a(X, t)dt + b(X, t)dW_t \\ a(X, t) &= A(X, t) \quad b(X, t) = \sqrt{B(X, t)} \end{aligned} \quad (3.62)$$

- $X$ : Stochastische Variable
- $W$ : Wiener Prozess
- $a(X, t), A(X, t)$ : Driftterm der stochastischen Differentialgleichung bzw. der Fokker-Planck Gleichung
- $b(X, t), B(X, t)$ : Diffusionsterm der stochastischen Differentialgleichung bzw. der Fokker-Planck Gleichung

Mit dem Marktanteil  $m_t$  als stochastische Variable der Differentialgleichung in (3.62) und dem Zusammenhang der Drift- und Diffusionsterme aus der Fokker-Planck Gleichung in (3.61) kann nun ein Ausdruck für die zeitliche Entwicklung des Marktanteils

---

<sup>85</sup>Die Fokker-Planck Gleichung beschreibt die zeitliche Entwicklung einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, während die Mastergleichung die zeitliche Entwicklung der Wahrscheinlichkeiten dargestellt. Die ausführliche Herleitung dazu findet sich bei Lux et al. (2005).

### 3.3. DAS MODELL VON Lux et al. (2005)

$m_t$  der stochastischen Differentialgleichung (3.62) hergeleitet werden. Dies erfolgt durch eine einfache Integration<sup>86</sup> von (3.62).

$$m_t = m_{t-\Delta t} + [\lambda_f - (\lambda_f + \lambda_r)m_{t-\Delta t}]\Delta t + \epsilon\sqrt{2\delta\Delta t(1 - m_{t-\Delta t})m_{t-\Delta t}} \quad (3.63)$$

- $\epsilon$ : Unabhängige, normalverteilte Zufallsvariable mit  $\epsilon \in N(0, 1)$

Durch den Ausdruck in (3.63) kann nun die zeitliche Entwicklung des Marktanteils  $m_t$  simuliert werden, ohne einzelne Agenteninteraktionen zu modellieren. Ein weiterer Vorteil ist, dass das System nun unabhängig von der Anzahl der Agenten  $N$  ist und sich damit die zu optimierenden Parameter reduzieren. Zwar ist die Anzahl der Agenten  $N$  im Diffusionsterm in (3.61) noch enthalten, allerdings ist die Beziehung invers und da von einer großen Anzahl an Agenten  $N \rightarrow \infty$  ausgegangen wird, kann dieser Term vernachlässigt werden. Um die zeitliche Änderung des Marktanteils besser zu verstehen, ist es von Vorteil, den Ausdruck aus (3.63) so umzuformen wie er bei Barde (2016) verwendet wird. Hierfür muss zuerst der stationäre Punkt des Marktanteils  $m^*$  bestimmt werden. Dazu wird der Fall  $m_t = m_{t-\Delta t} = m^*$  betrachtet, wobei der Zufallseinfluss ignoriert wird. Für den Marktanteil  $m_t$  in (3.63) ergibt sich damit:

$$m_t = m_{t-\Delta t} + (\lambda_f + \lambda_r)(m^* - m_{t-\Delta t})\Delta t + \epsilon\sqrt{2\delta\Delta t(1 - m_{t-\Delta t})m_{t-\Delta t}} \quad (3.64)$$

$$m^* = \frac{\lambda_f}{\lambda_f + \lambda_r}$$

Mit dem Ausdruck in (3.64) lässt sich nun die zeitliche Entwicklung des Marktanteils  $m_t$  besser verstehen. Für die zeitliche Entwicklung des Marktanteils  $m_t$  sind nämlich zwei, sich teilweise gegensätzlich auswirkende, Einflussfaktoren verantwortlich. Da wäre einmal der deterministische Driftterm, welcher dafür sorgt, dass Abweichungen vom stationären Punkt  $m^*$  immer wieder zu diesem hin korrigiert werden. Dazu kommt noch ein stochastischer Diffusionsterm, durch den wiederum überhaupt erst Abweichungen vom stationären Punkt  $m^*$  entstehen. Um einen besseren Einblick in

---

<sup>86</sup>Das Integral des Driftterms ist trivial, da der Driftterm selber nicht von der Zeit  $t$  abhängt. Für den Wiener-Prozess wiederum gilt  $W_t - W_{t-\Delta t} \sim N(0, \Delta t)$ , die Änderung im Zeitraum  $\Delta t$  folgt also eine normalverteilten Zufallsvariable mit Mittelwert 0 und Standardabweichung  $\sqrt{\Delta t}$ .

das Systemverhalten des Marktanteils in Bezug auf diese Parameter zu erhalten, ist es zielführend die Gleichgewichtsverteilung<sup>87</sup>  $w_0(m)$  der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Fokker-Planck Gleichung in (3.61) zu betrachten<sup>88</sup>:

$$w_0(m, N) = K(\lambda_f, \lambda_r, \delta, N) \left( m + \frac{\lambda_f}{2\delta N} \right)^{\lambda_f/\delta-1} \left( 1 - m + \frac{\lambda_r}{2\delta N} \right)^{\lambda_r/\delta-1} \quad (3.65)$$

- $K(\lambda_f, \lambda_r, \delta, N)$ : Normierungskonstante in Abhängigkeit der Parameter  $\lambda_f$ ,  $\lambda_r$ ,  $\delta$ ,  $N$ .

Da die Gleichgewichtsverteilung in (3.65) invers mit der Anzahl der Agenten zusammenhängt, kann für die Annahme einer großen Anzahl  $N \rightarrow \infty$  diese Abhängigkeit vernachlässigt werden. Allerdings ist diese Vereinfachung nicht allgemeingültig, sondern nach (3.65) nur unter den Bedingungen  $\lambda_f/\delta > 1$  und  $\lambda_r/\delta > 1$  valide<sup>89</sup>. Zur Vereinfachung der Optimierung unter den Nebenbedingungen  $\lambda_f/\delta > 1$  und  $\lambda_r/\delta > 1$  ist es sinnvoll, die Parameter  $\lambda_f$  und  $\lambda_r$  wie in Lux et al. (2005) folgendermaßen zu reskalieren:

$$\alpha_{f,r} = \frac{\lambda_{f,r}}{\delta} \quad (3.66)$$

Mit der Reskalierung aus (3.66) vereinfachen sich die die Bedingungen  $\lambda_f/\delta > 1$  und  $\lambda_r/\delta > 1$  zu  $\alpha_f > 1$  und  $\alpha_r > 1$ , was den Vorteil hat, dass bei der Optimierung eine einfache untere Grenze verwendet werden kann und nicht zusätzlich noch auf den Quotient zweier Parameter geachtet werden muss. Für die Gleichgewichtsverteilung aus (3.65) ergibt sich mit der Reskalierung aus (3.66) schließlich folgendes:

$$w_0(m) = K(\alpha_f, \alpha_r) m^{\alpha_f-1} (1-m)^{\alpha_r-1} \quad (3.67)$$

$$K(\alpha_f, \alpha_r) = \frac{\Gamma(\alpha_f + \alpha_r)}{\Gamma(\alpha_f) + \Gamma(\alpha_r)}$$

---

<sup>87</sup>Dies ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung, welche sich ergibt, wenn die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $w(m, t)$  der Fokker-Planck Gleichung zeitlich konstant ist.

<sup>88</sup>Die genaue Herleitung dazu findet sich bei Lux et al. (2005).

<sup>89</sup>Sollte diese Bedingungen nicht gegeben sein, so gilt  $w_0(m, N) \propto N$  und somit kann nach Lux et al. (2005)  $N$  in (3.65) nicht vernachlässigt und muss als freier Parameter berücksichtigt werden, da ansonsten die Gleichgewichtsverteilung in (3.65) keinen endlichen Wert für  $m \rightarrow 1$  und  $m \rightarrow 0$  aufweist.

### 3.3. DAS MODELL VON Lux et al. (2005)

- $K(\alpha_f, \alpha_r)$ : Normierungskonstante in Abhängigkeit der Parameter  $\alpha_f, \alpha_r$ .
- $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} \exp(-t) dt$ : Gammafunktion

Aus der zeitlichen Entwicklung des Marktanteils  $m_t$  in (3.63) sowie der Gleichgewichtsverteilung in (3.67) lassen sich ein paar grundsätzliche Aussagen über die im System möglichen Marktanteile zu ziehen.

1. Durch das Verhältnis der Parameter  $\alpha_f$  und  $\alpha_r$  bzw.  $\lambda_f$  und  $\lambda_r$  wird die Lage des stationären Punktes bestimmt. Je größer einer der Parameter gegenüber dem anderen wird, desto mehr verschiebt sich dieser in den Marktanteilsbereich des größeren Parameters. Dies ist auch insofern intuitiv, da die Parameter  $\alpha_f$  und  $\alpha_r$  bzw.  $\lambda_f$  und  $\lambda_r$  die Wahrscheinlichkeit beschreiben, dass ein Agent zur jeweiligen Strategie wechselt<sup>90</sup>, sodass die Strategie zu der mit einer höheren Wahrscheinlichkeit gewechselt wird, auch im Mittel von mehr Agenten verfolgt werden muss.
2. Die Volatilität des Marktanteils bzw. dessen Verteilung hängt wiederum vom Verhältnis und der Größe der beiden Parameter  $\alpha_f$  und  $\alpha_r$  ab. Bei ungefähr gleichen Parametern  $\alpha_f \approx \alpha_r$  gilt, umso größer die Werte der Parameter werden, desto stärker strebt die Gleichgewichtsverteilung an ihren Enden  $m \rightarrow 0$  und  $m \rightarrow 1$  gegen Null<sup>91</sup>, was die Spanne der wahrscheinlich auftretenden Werte für  $m$  kleiner werden lässt. Weichen die Parameter stark voneinander ab<sup>92</sup>, so verschiebt sich die Verteilung deutlich in den Bereich des größeren Parameters. Dies reduziert die möglichen Marktanteilswerte einerseits durch die Nähe des stationären Punktes zu einem der Verteilungsenden<sup>93</sup> und andererseits durch

---

<sup>90</sup>Genauer beschreiben die Parameter  $\alpha_f$  und  $\alpha_r$  die Wechselwahrscheinlichkeit im Bezug auf den Rekrutierungswahrscheinlichkeit  $\delta$ . Durch eine die Betrachtung von  $\alpha_f$  und  $\alpha_r$  anstatt von  $\lambda_f$  und  $\lambda_r$  ändert sich aber nichts am generellen Verhalten des Systems, da  $\delta$  für beide Strategien denselben Wert besitzt. Im Weiteren wird die Analyse des Systemverhaltens deshalb ausschließlich anhand von  $\alpha_f$  und  $\alpha_r$  durchgeführt.

<sup>91</sup>Vorausgesetzt die Bedingungen  $\alpha_f > 1$  und  $\alpha_r > 1$  gelten, da ansonsten  $w_0 \rightarrow \infty$  für  $m \rightarrow 0$  und  $m \rightarrow 1$  gilt.

<sup>92</sup>Es gilt also entweder  $\alpha_f \gg \alpha_r$  oder  $\alpha_f \ll \alpha_r$ .

<sup>93</sup>Für  $\alpha_f \gg \alpha_r$  liegt der stationäre Punkt nach (3.64) nahe bei  $m = 1$  während er für  $\alpha_f \ll \alpha_r$  nahe bei  $m = 0$  lokalisiert ist.

den starken Abfall der Wahrscheinlichkeiten am anderen Ende der Verteilung. Eine große Varianz des Marktanteils kann also nur für den Fall vorliegen, dass beide Parameter nicht zu groß werden und ihr Verhältnis nicht zu unterschiedlich ist<sup>94</sup>. Dies lässt sich ebenfalls sehr intuitiv aus (3.63) ableiten. Je größer die Parameter  $\alpha_f$  und  $\alpha_r$  werden, desto stärker wird der Einfluss des Driftterms gegenüber dem Diffusionsterm und da durch den Driftterm Differenzen zum stationären Punkt reduziert werden, sinkt natürlich auch die insgesamt beobachtete Abweichung des Marktanteils von diesem.

3. Die manuelle Festlegung einer unteren Schranke  $m_u$  für den Marktanteil  $m_t$  ist nicht nötig, da nach (3.67) die Wahrscheinlichkeit für  $m = 0$  immer  $w_0(0) = 0$  ist und damit die Generierung einer unendlichen Rendite  $r_t$  nicht möglich ist<sup>95</sup>.

Um die Auswirkungen des Marktanteilverhaltens<sup>96</sup> auf die generierten Renditen beurteilen zu können, ist es sinnvoll, die beiden Systemgleichungen noch einmal gemeinsam zu betrachten<sup>97</sup>.

$$m_t = m_{t-\Delta t} + (\alpha_f + \alpha_r)(m^* - m_{t-\Delta t})\delta\Delta t + \epsilon\sqrt{2\delta\Delta t(1 - m_{t-\Delta t})m_{t-\Delta t}}$$

$$m^* = \frac{\alpha_f}{\alpha_f + \alpha_r} \tag{3.68}$$

$$r_t = r_0 \frac{1 - m_t}{m_t} \zeta_t \tag{3.69}$$

Da die Volatilität der Rendite in (3.69) direkt mit der Volatilität des Marktanteils zusammenhängt, ist es offensichtlich, dass je größer die Volatilität des Marktanteils ist, desto stärker ist auch das Volatilitätsclustering der Rendite. Ein weiterer nicht ganz

---

<sup>94</sup>Im Extremfall, wenn  $\alpha_f \approx 1$  und  $\alpha_r \approx 1$  gilt, sind die Marktanteilswahrscheinlichkeiten sogar annähernd gleichverteilt und fallen nur an den Enden der Verteilung schließlich gegen Null ab

<sup>95</sup>Die gleiche Aussage gilt auch für den umgekehrten Fall. Für  $m = 1$  ist  $w_0(1) = 0$  und damit können auch Renditen mit  $r_t = 0$  nicht vorkommen.

<sup>96</sup>Welches aufgrund der logischen Konsistenz hier in Abhängigkeit von  $\alpha_f$  und  $\alpha_r$  präsentiert werden soll.

<sup>97</sup>Diese Form weicht leicht von der in Lux et al. (2005) etablierten ab und entspricht der bei Barde (2016), welcher den stationären Punkt in der Marktanteilsleichung explizit mit aufnimmt.

### 3.3. DAS MODELL VON Lux et al. (2005)

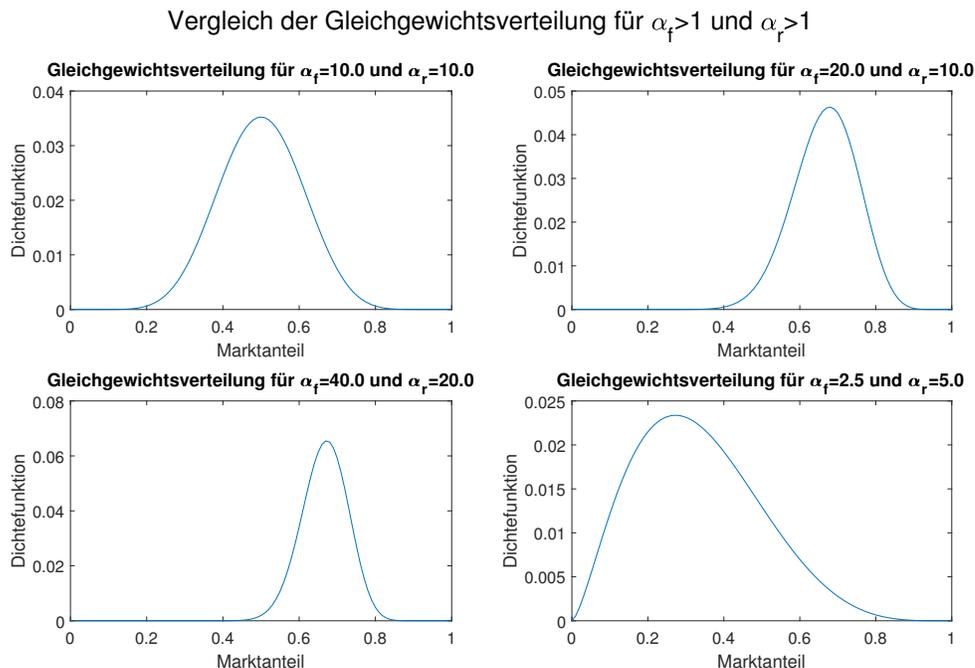


Abbildung 3.17: Vergleich der Marktanteilsverteilungen des Modells von Lux et al. (2005) für verschiedene Konstellationen der Parameter  $\alpha_f$  und  $\alpha_r$ .

so offensichtlicher Zusammenhang zwischen Marktanteil  $m_t$  und Rendite  $r_t$  ist, dass es ebenfalls Auswirkungen auf die Stärke des Volatilitätsclustering hat, wo genau sich der stationäre Punkt des Marktanteils  $m^*$  befindet. Liegt der stationäre Punkt  $m^*$  im von Noise-Tradern dominierten Bereich  $m < 0.5$ , so wirkt sich dieselbe Varianz des Marktanteils  $m_t$  stärker auf das Volatilitätsclustering aus, da dadurch größere Änderungen der Rendite  $r_t$  in (3.69) hervorgerufen werden. Von daher kann, unter der Voraussetzung von  $\alpha_r \gg \alpha_f$ , auch mit relativ kleiner Volatilität des Marktanteils  $m_t$  ein starkes Volatilitätsclustering erzeugt werden. In den Abbildungen 3.18 und 3.19 sind die Zusammenhänge zwischen Marktanteil  $m_t$  und Rendite  $r_t$  nochmal visualisiert dargestellt. In Abbildung 3.18 werden dabei die Renditen  $r_t$  und Marktanteile  $m_t$  zu den Verteilungen in Abbildung 3.17 gezeigt, was die Beziehung von der Volatilität des Marktanteils  $m_t$  und dem Volatilitätsclustering der Rendite  $r_t$  nochmal veranschaulicht. In Abbildung 3.19 hingegen wird die Auswirkung der

Parametern  $\alpha_f$ ,  $\alpha_r$  und  $r_0$  auf das Volatilitätsclustering illustriert. Tatsächlich ist es so, dass eine reine Verschiebung des stationären Punktes  $m^*$  zu sehr ähnlichen Renditen führt, solange der Parameter  $r_0$  ebenfalls mit angepasst wird. Auch eine moderate Veränderung der Varianz der Gleichgewichtsverteilung beeinflusst die Renditen kaum, dafür muss, wie in Abbildung 3.18 gezeigt, schon eine relativ starke Verkleinerung bzw. Vergrößerung der Parameter  $\alpha_f$  und  $\alpha_r$  vorgenommen werden.

Renditen und Marktanteile für  $\alpha_f > 1$  und  $\alpha_r > 1$

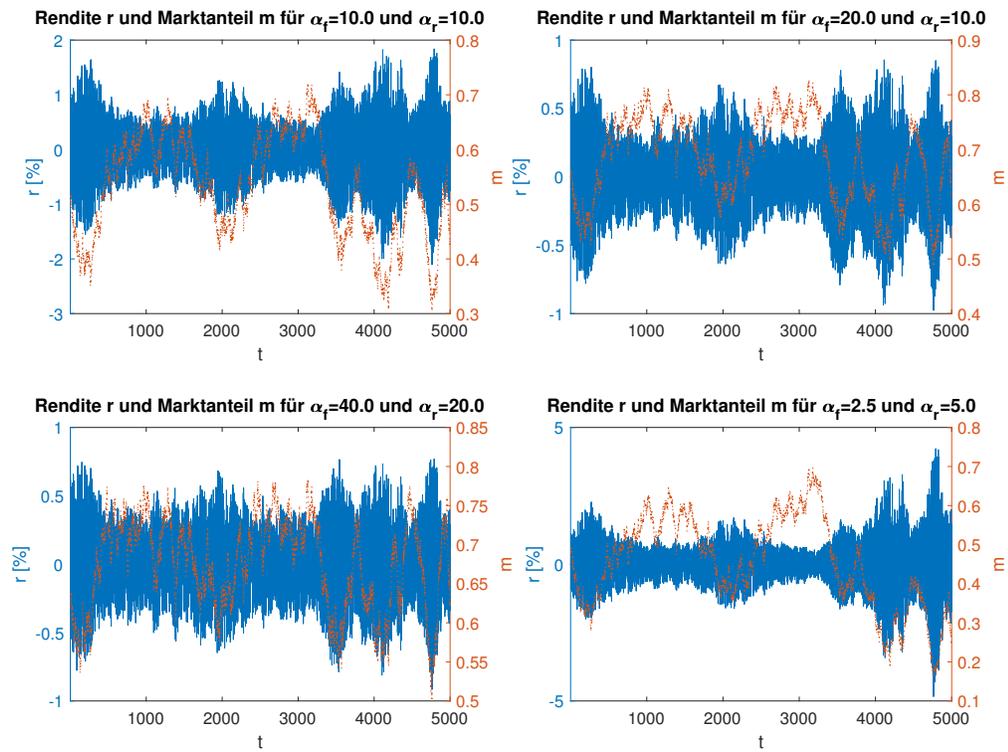


Abbildung 3.18: Vergleich der Renditen und Marktanteile des Modells von Lux et al. (2005) für verschiedene Konstellationen der Parameter  $\alpha_f$  und  $\alpha_r$ . Für die übrigen Parameter wurden die Werte  $\delta = 10^{-4}$  und  $r_0 = 0.01$  gewählt. Die Zufallszahlen  $\zeta_t$  der Rendite sind dabei aus einer gleichmäßig verteilten Wahrscheinlichkeitsdichte auf dem Intervall  $[-1, 1]$  gezogen worden<sup>98</sup>.

### 3.3. DAS MODELL VON Lux et al. (2005)

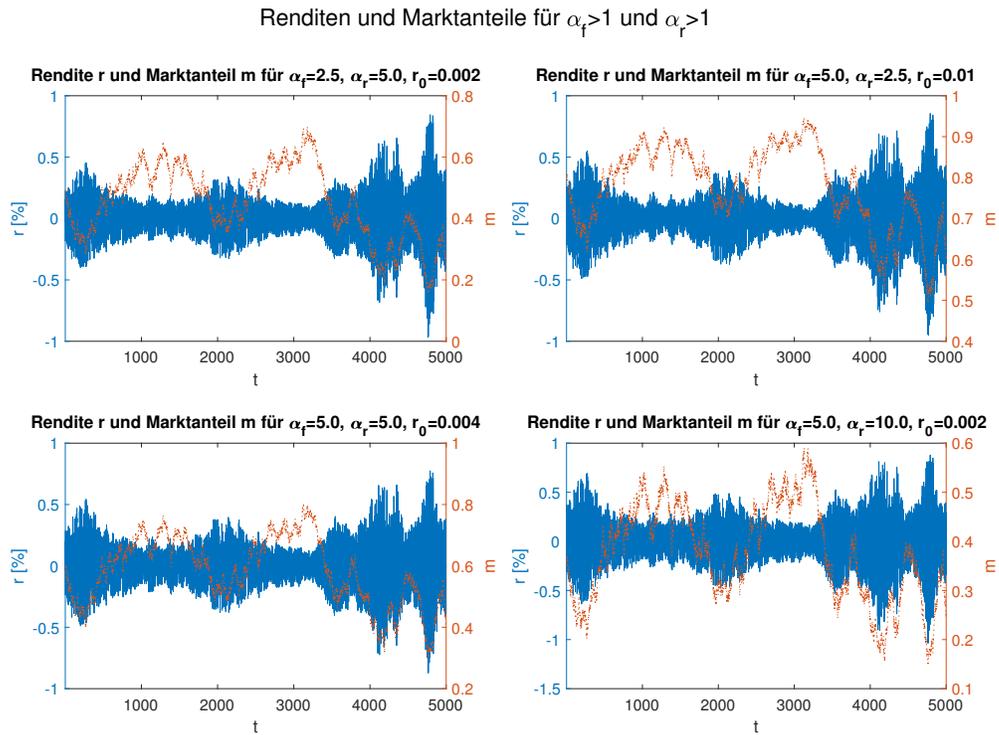


Abbildung 3.19: Vergleich von Renditen bei gegenteiligen Marktanteilsverläufen (oben) und ähnlichen Renditen bei unterschiedlichen Marktanteilsverläufen (unten) für das Modell von Lux et al. (2005). Das beobachtete Systemverhalten hängt dabei nur von der Wahl der Parameter  $\alpha_f$  und  $\alpha_r$  sowie  $r_0$  ab. Für den Parameter  $\delta$  wurde der Wert  $\delta = 10^{-4}$  gewählt. Die Zufallszahlen  $\zeta_t$  der Rendite sind dabei wieder aus einer gleichmäßig verteilten Wahrscheinlichkeitsdichte auf dem Intervall  $[-1, 1]$  gezogen worden.

Um die Betrachtung des Modells abschließen zu können, müssen noch vier wichtige Punkte geklärt werden.

1. Zur Herleitung der Rendite in (3.69) wurde eine Heuristik benutzt, welche nur valide ist, solange sich der Marktanteil  $m_t$  gegenüber der zufälligen Änderung der Stimmung der Noise-Trader  $\zeta_t$  nur langsam verändert. Um das zu gewähr-

<sup>98</sup>Diese Wahrscheinlichkeitsverteilung wird zusammen mit binären Zufallswerten gleicher Wahrscheinlichkeit aus der Menge  $\{-1, 1\}$  von Lux et al. (2005) für  $\zeta_t$  in (3.69) vorgeschlagen.

leisten, müssen sowohl der Driftterm als auch der Diffusionsterm in (3.68) relativ klein gegenüber  $m_{t-\Delta t}$  seien. Die Größe der Änderung wird dabei durch die Parameter  $\alpha_f$ ,  $\alpha_r$ ,  $\delta$  und  $\Delta t$  bestimmt. Da sowohl die Zeitdifferenz  $\Delta t$  als auch der Herdenfaktor  $\delta$  in beiden relevanten Termen in (3.68) vorkommen und im multiplikativen Zusammenhang zueinander stehen, kann die Wahl von  $\Delta t$  relativ frei erfolgen<sup>99</sup>, da sich die Auswirkungen von  $\Delta t$  auf die Wahl des Parameters  $\delta$  übertragen lässt. Eine intuitive Wahl für tägliche Renditen ist somit  $\Delta t = 1$ <sup>100</sup>.

2. Nachdem die Anzahl der freien Parameter der zeitlichen Entwicklung des Marktanteils  $m_t$  in (3.68) auf  $\alpha_f$ ,  $\alpha_r$  und  $\delta$  reduziert werden konnten, bleibt noch zu bestimmen, wie groß die Parameter sein müssen, um einen sich nur langsam ändernden Marktanteil  $m_t$  zu garantieren. Für alle drei Parameter gilt, dass eine untere Grenze dafür eigentlich nicht existiert, denn je kleiner die Parameter werden, desto geringer fällt nach (3.68) die Änderung des Marktanteils  $m_t$  aus. Wobei hier noch anzumerken ist, dass die bereits aus anderen Gründen etablierten Grenzen  $\alpha_{f,r} > 1$  und  $\delta > 0$  natürlich weiterhin eingehalten werden müssen. Von daher ist es nur nötig zu schauen, ob weitere obere Grenzen zur Einhaltung der Prämisse eines sich nur langsam ändernden Marktanteils vonnöten sind. Dazu sollte der Parameter  $\delta$  zuerst betrachtet werden. Denn mit dem Streichen von  $\Delta t$  aus der Marktanteilsgleichung in (3.68) bleibt  $\delta$  als einziger Parameter übrig, welcher sowohl im Drift- als auch Diffusionsterm des Marktanteils  $m_t$  in (3.68) vorkommt. Des Weiteren besitzen die Parameter  $\alpha_f$  und  $\alpha_r$  durch ihre Definition eine obere Grenze in Abhängigkeit von  $\delta$ <sup>101</sup>. Abbildung 3.20 zeigt, wie sich die Änderung des Marktanteils  $m_t$  bei

---

<sup>99</sup>Nach Lux et al. (2005) ist ein weiterer Vorteil des Ausdrucks in (3.68) gegenüber der Modellierung der Übergangswahrscheinlichkeiten in (3.60) genau diese größere Freiheit bei der Wahl von  $\Delta t$ . Weil die Übergangswahrscheinlichkeiten per Konstruktion proportional zu  $\Delta t$  sind, gibt es in dem Fall eine feste obere Grenze für  $\Delta t$ , da für die einzelnen Übergangswahrscheinlichkeiten natürlich  $P(n', t|n, t - \Delta t) \leq 1$  gelten muss. Diese sehr restriktive Anforderung existiert für den Ausdruck in (3.68) nicht.

<sup>100</sup>Diese Wahl für  $\Delta t$  wurde bei Lux et al. (2005) nicht explizit vorgeschlagen, aber z.B. zur Kalibrierung des Modells bei Barde (2016) genutzt.

<sup>101</sup>Die Definition lautete  $\alpha_{f,r} = \frac{\lambda_{f,r}}{\delta}$  und da  $\lambda_{f,r} < 1$  galt, ergibt sich zwangsweise  $\alpha_{f,r} \cdot \delta < 1$ .

### 3.3. DAS MODELL VON Lux et al. (2005)

größer werdendem  $\delta$  verhält. Wird der Parameter  $\delta$  von den bisher verwendeten  $\delta = 10^{-4}$  auf  $\delta = 0.001$  erhöht, so verdoppelt sich die Standardabweichung der Marktanteilsänderung etwa. Eine weitere Erhöhung auf  $\delta = 0.01$  lässt die Standardabweichung hingegen deutlich stärker ansteigen. In Abbildung 3.21 werden dazu nochmal Rendite- und Marktanteilsverläufe für  $\delta = 0.001$  und  $\delta = 0.01$  präsentiert. Auch hier lässt sich erkennen, dass die Veränderung des Marktanteils  $m_t$  für  $\delta = 0.001$  noch relativ klein sind und sich unter bestimmten Parameterkonstellationen auch realistische Renditeverläufe generieren lassen<sup>102</sup>. Für  $\delta = 0.01$  ist dies aufgrund der deutlichen schnellen Änderung des Marktanteils nicht mehr möglich. Basierend auf diesen Ergebnissen liegt eine gute obere Grenze bei  $\delta = 0.001$ . Daraus ergibt sich direkt, dass  $\alpha_{f,r} < 1000$  gelten muss.

3. Die Wahl des Zufallseinflusses  $\zeta_t$  der Rendite in (3.69) muss noch spezifiziert werden. Anders als beim Zufallseinfluss des Diffusionsterms der zeitlichen Änderung des Marktanteils  $m_t$  in (3.68) gibt es keinen theoretischen Zwang<sup>103</sup> für eine bestimmte Verteilungsannahme. Bei Lux et al. (2005) wurde das System für zwei Verteilungsannahmen untersucht. Einmal eine binäre Verteilung mit gleicher Wahrscheinlichkeit aus den Werten  $\{-1, 1\}$  und eine Gleichverteilung auf dem Intervall  $[-1, 1]$ . Diese Verteilungen wurden aus dem Grund ausgewählt, dass sich hiermit ein zu optimierender Log-Likelihood-Ausdruck des Systems zur Anpassung an reelle Daten bilden ließe. Da in dieser Arbeit diese Restriktionen nicht vonnöten ist, kommen auch andere Verteilungen für  $\zeta_t$  in Frage. In diesem Fall soll zusätzlich die Standardnormalverteilung und eine t-Verteilung<sup>104</sup> für  $\zeta_t$  getestet werden.

---

<sup>102</sup>Des Weiteren lässt sich aus Abbildung 3.21 entnehmen, dass es durch ein zu kleines  $\delta$  zu einer so langsamen Änderung des Marktanteils  $m_t$  kommt, sodass Volatilitätsclustering nur auf deutlich größeren Zeitskalen überhaupt zu erkennen ist.

<sup>103</sup>Für die Herleitung des Ausdrucks in (3.68) war die Annahme eines Wiener-Prozesses zwingend nötig, weshalb  $\epsilon$  einer Standardnormalverteilung folgen muss.

<sup>104</sup>Diese ist eigentlich etwas suboptimal, da dadurch mit dem Freiheitsgrad der t-Verteilung, ein weiterer Parameter dem Modell hinzugefügt werden muss. Die t-Verteilung sollte daher nur bei deutlich besseren Optimierungsergebnissen gegenüber den anderen Verteilungen bevorzugt werden.

Standardabweichung der Änderung des Marktanteils  $\sigma(m_t - m_{t-1})$  in Abhängigkeit des Parameters  $\delta$

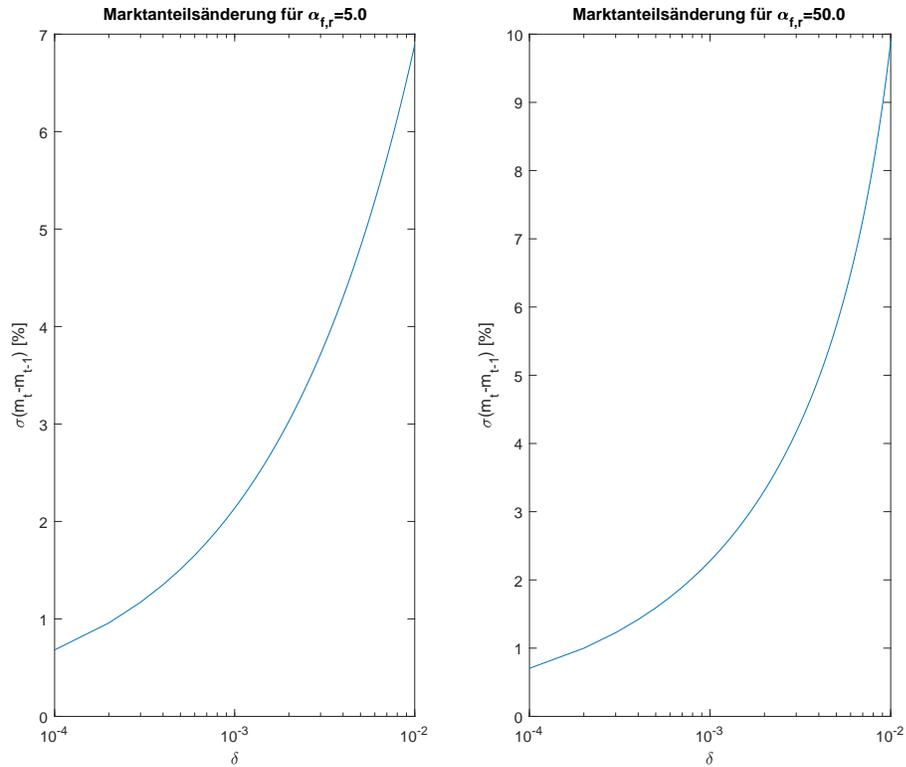


Abbildung 3.20: Vergleich der Standardabweichungen der Änderung des Marktanteils  $\sigma(\frac{m_t - m_{t-1}}{m_{t-1}})$  des Modells von Lux et al. (2005) für den Parameter  $\delta$  im Intervall  $[10^{-4}, 10^{-2}]$ .

Zur Bestimmung der Änderung des Marktanteils  $m_t$  in (3.64) müssen somit nur noch die freien Parameter  $\alpha_f$ ,  $\alpha_r$ ,  $\delta$  optimiert werden, während für die Rendite  $r_t$  in (3.69) der freie Parameter  $r_0$  und unter Umständen der Freiheitsgrad  $n$  der t-Verteilung geschätzt werden muss.

### 3.3. DAS MODELL VON Lux et al. (2005)

Renditen und Marktanteile für  $\alpha_r > 1$  und  $\alpha_f > 1$

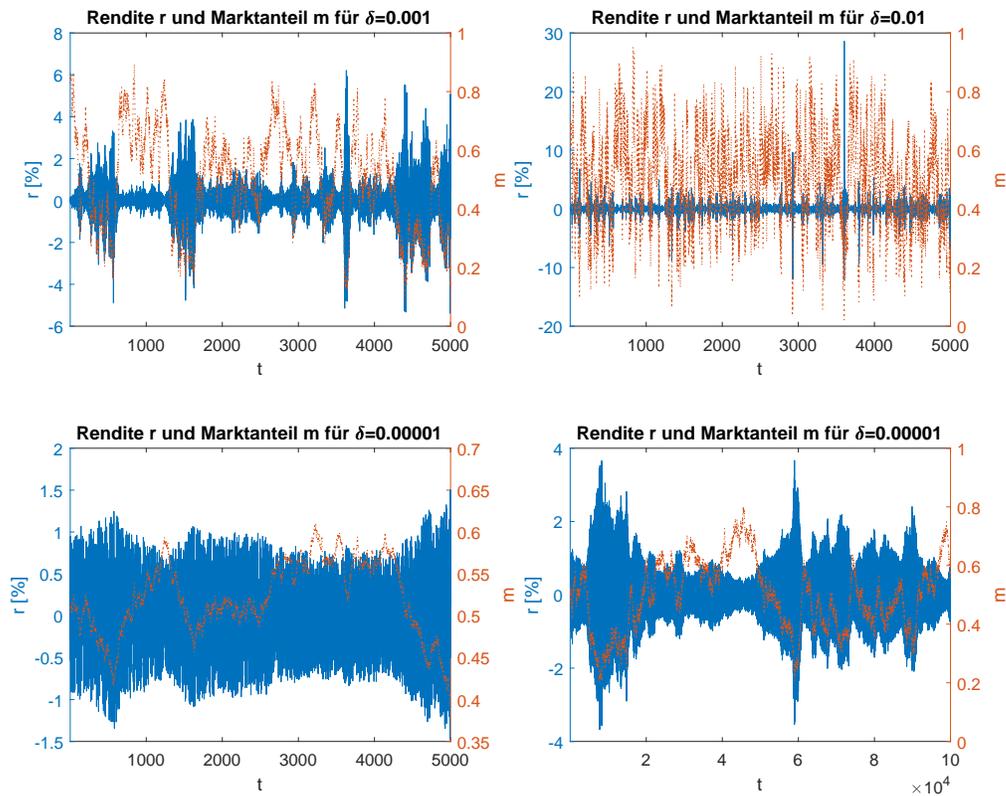


Abbildung 3.21: Vergleich der Renditen und Marktanteile des Modells von Lux et al. (2005) für verschiedene Konstellationen der Parameter  $\alpha_{r,f} \in \{5, 50\}$  und  $\delta \in \{10^{-5}, 10^{-3}, 10^{-2}\}$ . Für den Parameter  $r_0$  wurde der Wert  $r_0 = 0.01$  gewählt. Die Zufallszahlen  $\zeta_t$  der Rendite sind dabei, wie bei den Beispielen vorher, aus einer gleichmäßig verteilten Wahrscheinlichkeitsdichte auf dem Intervall  $[-1, 1]$  gezogen worden.

#### 3.3.2 Zu erwartendes Systemverhalten

Wie bei den vorherigen Modellen soll zuletzt noch das zu erwartende Systemverhalten diskutiert werden. Für normales Systemverhalten ist in der Empirie eine normalverteilte Rendite mit einer gleichbleibenden Varianz zu beobachten. Um dies mit dem

Modell zu generieren, kann sich der Marktanteil  $m_t$  nicht allzu groß ändern. Deswegen ist zu erwarten, dass die Varianz der Gleichgewichtsverteilung in (3.67) nur sehr gering ist. Normalerweise wäre es ebenfalls vorteilhaft, wenn der stationäre Punkt möglichst weit im von Fundamentalisten dominierten Bereich  $m_t > 0.5$  liegt. Da sich allerdings, wie in Abbildung 3.19 zu sehen war, ähnliche Renditen für einen stationären Punkt im von Noise-Tradern dominierten Bereich  $m_t < 0.5$  durch eine Anpassung des Parameters  $r_0$  generieren lassen, ist die letztendliche Lage des stationären Punktes für die Generierung normalverteilter Renditen nicht entscheidend. Dies bedeutet, insgesamt können über die Parameter  $\alpha_f$  und  $\alpha_r$  im Voraus keine Aussagen getroffen werden, außer dass zu erwarten ist, dass beide relativ groß sein müssen. Auch für den Parameter  $r_0$  lässt sich wenig spezifisches prognostizieren, da dieser von der Lage des stationären Punktes abhängt. Generell ist aber für  $r_0$  festzuhalten, dass er desto größer wird, je weiter der stationäre Punkt im von Fundamentalisten dominierten Bereich liegt und umgekehrt<sup>105</sup>. Was den Parameter  $\delta$  angeht, so ist dessen Wert für die Erzeugung normalverteilter Renditen vollkommen unbedeutend, da die Geschwindigkeit der Änderung des Marktanteils  $m_t$  keine Bedeutung hat, wenn dadurch ohnehin keine Auswirkungen auf die Rendite  $r_t$  resultiert. Insgesamt bedeutet das, dass für keinen der Parameter ein spezifischer Wert existiert, der charakteristisch für normales Systemverhalten ist. Im Gegenteil ist es eher zu erwarten, dass durch Optimierung kein eindeutiges, lokales Minimum aufzufinden ist, sondern vielmehr eine Menge ähnlicher Minima existieren. Für das Krisenverhalten des Systems gilt, was spezifische Parameterwerte angeht, größtenteils dasselbe wie für normales Verhalten. Krisenverhalten ist in der Empirie durch Volatilitätsclustering und extreme Renditen charakterisiert. Um dies im Modell zu generieren, muss die Varianz der Gleichgewichtsverteilung in (3.67) groß genug sein, damit sich die Variation des Marktanteil  $m_t$  merkbar auf die Volatilität der simulierten Rendite  $r_t$  in (3.69) auswirkt. Dies bedeutet, dass die Parameter  $\alpha_f$  und  $\alpha_r$  relativ klein sein müssen. Da allerdings die Lage des stationären Punktes dabei wieder nur eine untergeordnete Rolle spielt, ist es hier ebenfalls schwierig über die genauen Werte der Parameter  $\alpha_f$ ,  $\alpha_r$  und  $r_0$  ei-

---

<sup>105</sup>Für den Fall, dass  $\zeta_t$  einer t-Verteilung folgt gilt, zusätzlich noch, dass der Freiheitsgrad  $n$  groß genug  $n \geq 30$  sein muss, damit  $\zeta_t$  annähernd normalverteilt ist.

### 3.4. DAS MODELL VON Alfarano et al. (2008)

ne Voraussage zu treffen<sup>106</sup>. Im Gegensatz dazu ist allerdings zu erwarten, dass der Parameter  $\delta$  deutlich besser zu bestimmen ist, als es für normales Systemverhalten der Fall wäre. Da durch den Parameter  $\delta$  die Stärke der Änderung des Marktanteils  $m_t$  und damit auch das Ausmaß des Volatilitätsclustering bestimmt wird, darf  $\delta$  weder zu groß noch zu klein werden, da ansonsten das Volatilitätsclustering nicht stabil genug bzw. zu gleichmäßig ist. Damit existiert allerdings voraussichtlich nur für einen der Parameter ein für Krisenverhalten charakteristischer Wert und deshalb ist auch für den Krisenfall die Existenz eines eindeutigen lokalen Minimums nicht zu erwarten<sup>107</sup>. Eine Möglichkeit, die Bestimmtheit der Optimierung zu verbessern, wäre es, das System nur auf einem Marktanteilsbereich zu definieren, also die Einschränkung  $\alpha_f \leq \alpha_r$  oder  $\alpha_f \geq \alpha_r$  einzuführen<sup>108</sup>. Dieser Ansatz soll aber hier nicht verfolgt werden, da eine signifikante Verbesserung des Zielfunktionswertes dadurch nicht erreicht wird.

## 3.4 Das Modell von Alfarano et al. (2008)

### 3.4.1 Modelldarstellung

Das Modell von Alfarano et al. (2008) ist eine Abwandlung des im vorherigen Kapitel vorgestellten Modells von Lux et al. (2005), wobei die Unterschiede allerdings groß genug sind, um dieses Modell in einem eigenen Kapitel einzuführen. Auch dieses Modell besitzt keinen deterministischen Kern. Wie beim Modell von Lux et al. (2005) können die Agenten eine Fundamental- oder Random-Trading-Strategie verfolgen, allerdings findet in diesem Modell kein Wechsel zwischen den beiden Strategien statt, sondern die Random-Trader wechseln zwischen einer positiven und negativen Zukunftsaussicht. Zur Bestimmung des Preises  $p_t$ , bzw. dessen Änderung, wird wie beim Modell

---

<sup>106</sup>Dies gilt ebenfalls für den Freiheitsgrad  $n$  einer t-Verteilung von  $\zeta_t$ . Bildet das System Krisenverhalten ohnehin gut ab, so wird die t-Verteilung eher einer Normalverteilung gleichen ( $n \geq 30$ ). Im umgekehrten Fall ist ein deutlich niedriger Wert für  $n$  zu erwarten.

<sup>107</sup>Dasselbe Ergebnis wurde bereits für ein ähnliches Modell von Alfarano et al. (2008), was eine Abwandlung bzw. Vereinfachung des hier verwendeten Modells ist, in Chen und Lux (2018) gefunden.

<sup>108</sup> $\alpha_f \geq \alpha_r$  führt zu  $m \geq 0.5$  und  $\alpha_f \leq \alpha_r$  zu  $m \leq 0.5$ .

von Lux et al. (2005) das Marktgleichgewicht von Angebot und Nachfrage ermittelt. Die Angebots- bzw. Nachfragefunktion der Fundamentalisten  $n_f$  und Noise-Trader  $n_r$  bilden sich dabei wie folgt:

$$n_t^f = N^f T^f (p_{t,f} - p_t) \quad n_t^r = N^r T^r \xi_t \quad (3.70)$$

- $n_t^f, n_t^r$ : Nachfrage/Angebot der Fundamentalisten bzw. Noise-Trader zum Zeitpunkt  $t$
- $N^f, N^r$ : Anzahl der Fundamentalisten bzw. Noise-Trader
- $T^f, T^r$ : Handelsvolumen der Fundamentalisten bzw. Noise-Trader
- $p_{t,f}$ : Logarithmischer Fundamentalwert zum Zeitpunkt  $t$
- $p_t$ : Logarithmischer Preis zum Zeitpunkt  $t$
- $\xi_t$ : Stimmung der Noise-Trader zum Zeitpunkt  $t$

Die Nachfragefunktionen in (3.70) sind insgesamt denen des Modells von Lux et al. (2005) sehr ähnlich, es gibt allerdings doch ein paar Unterschiede. Erstens sind die Handelsvolumina  $T^{f,r}$  der beiden Strategien nun in der Nachfrage berücksichtigt, während der Skalierungsfaktor  $r_0$  nicht mehr in (3.70) vorhanden ist<sup>109</sup>. Der zweite und deutlich relevantere Unterschied ist, dass die Anzahl der Fundamentalisten bzw. Noise-Trader  $N^f, N^r$  keine Zeitabhängigkeit mehr aufweist. Damit ist die Grundlage dieses Modells, im Gegensatz zu allen vorherigen Modellen, nicht mehr im Wechsel zwischen zwei Strategien begründet. Des Weiteren wird in diesem Modell auch nicht mehr von einem konstanten Fundamentalwert ausgegangen, was dem Modell eine gewisse Grundvolatilität gibt. Der Preis selbst wird wieder nach dem Gesetz von Walras bestimmt:

$$n_t^f + n_t^r = N^f T^f (p_{t,f} - p_t) + N^r T^r \xi_t = 0 \quad (3.71)$$

Durch Umstellen von (3.71) ergibt sich dann der Preis  $p_t$ :

$$p_t = p_{t,f} + \frac{N^r T^r}{N^f T^f} \xi_t \quad (3.72)$$

---

<sup>109</sup>Dieser Unterschied ist allerdings ein reiner Notationsunterschied, da der Skalierungsfaktor  $r_0$  die Stärke des Einflusses der Noise-Trader repräsentiert, welcher sich auch als Quotient der Handelsvolumina  $r_0 = T^r / T^f$  interpretieren lässt.

### 3.4. DAS MODELL VON Alfarano et al. (2008)

Aus der Preisgleichung in (3.72) kann bereits Rückschlüsse auf das Systemverhalten gezogen werden. Der Preis  $p_t$  orientiert sich stark am Fundamentalwert  $p_f$  und Abweichungen von diesem hängen von der Stimmung der Noise-Trader ab. Eine positive Stimmung der Noise-Trader führt zu einer Preisüberbewertung und eine negative Stimmung zu einer Preisunterbewertung. Die Stärke dieser Abweichung wird durch den Quotienten der Anzahl und des Handelsvolumens der Noise- und Fundamental-Trader bestimmt. Aus (3.72) lässt sich nun leicht die Rendite  $r_t = p_t - p_{t-\Delta t}$  herleiten. Unter der Annahme, dass der Fundamentalwert einem Random-Walk  $p_{f,t} = p_{f,t-\Delta t} + \sigma_f \epsilon$  folgt, gilt:

$$r_t = \sigma_f \epsilon + r_0 (\xi_t - \xi_{t-\Delta t}) \quad (3.73)$$

- $\sigma_f$ : Volatilität des Fundamentalwertes
- $r_0$ : Skalierungsfaktor<sup>110</sup> des Einflusses der Noise-Trader  $r_0 = \frac{N^r T^r}{N^f T^f}$

Die vom Modell von Alfarano et al. (2008) generierte Rendite  $r_t$  wird nach (3.73) also von zwei verschiedenen Prozessen erzeugt. Der erste Teil sind die zufälligen Bewegungen des Fundamentalwertes, welche eine konstante Standardabweichung aufweisen. Dieser Teil ist dafür verantwortlich, dass das Modell eine normalverteilte Rendite als Basis besitzt. Der zweite Teil ist die Änderung der Stimmung der Noise-Trader. Ist diese Änderung klein, so sind die Renditen annähernd normalverteilt. Sobald hier aber starke Änderungen auftreten, drückt sich das in extremen Renditen aus. Dieser Teil ist damit für die Fat-Tails und das Volatilitätsclustering des Modells verantwortlich. Um die Renditegleichung in (3.73) vollständig verstehen zu können, muss nun noch die Stimmung der Noise-Trader  $\xi_t$  definiert werden. Ausgangspunkt hierfür ist wieder das Modell von Kirman (1993). Unter der Annahme, dass nur ein einziger Wechsel im Zeitintervall  $\Delta t < 1$  stattfinden kann, gilt für die Übergangswahrscheinlichkeiten  $P(n', t | n, t - \Delta t)$  der Zustände  $n \rightarrow n'$  per Zeitintervall  $\Delta t$ :

---

<sup>110</sup>Im Gegensatz zum Modell von Lux et al. (2005) bleibt die Anzahl der Fundamental- und Noise-Trader hier konstant, weshalb diese ebenfalls im Skalierungsfaktor zusammengefasst werden können.

$$P(n', t | n, t - \Delta t) = \Delta t \pi(n \rightarrow n')$$

$$\pi(n \rightarrow n') = \begin{cases} \pi(o \rightarrow p) = N_{t-\Delta t}^o (\lambda + \delta N_{t-\Delta t}^p) \\ \pi(p \rightarrow o) = N_{t-\Delta t}^p (\lambda + \delta N_{t-\Delta t}^o) \end{cases} \quad (3.74)$$

- $\pi(n \rightarrow n')$ : Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand  $n$  zum Zustand  $n'$  mit der Einschränkung  $N_t^o = N_{t-\Delta t}^o \pm 1, N_t^p = N_{t-\Delta t}^p \mp 1$
- $\pi(o \rightarrow p)$ : Wahrscheinlichkeit für den Stimmungswechsel von optimistisch zu pessimistisch
- $\pi(p \rightarrow o)$ : Wahrscheinlichkeit für den Stimmungswechsel von pessimistisch zu optimistisch
- $\lambda$ : Stimmungsänderungsfaktor
- $\delta$ : Rekrutierungsfaktor, der die Stärke des Herdentriebverhaltens beschreibt

Im Gegensatz zum Modell von Lux et al. (2005) ist hier kein Attraktivitätsunterschied zwischen den beiden Stimmungen vorhanden, womit die Strategiewahl exakt der von Kirman (1993) entspricht. Wie schon beim Modell von Lux et al. (2005) lässt sich die zeitliche Entwicklung der Marktstimmung wieder in ein dynamisches System umwandeln. Dazu werden die zeitdiskreten Übergangswahrscheinlichkeiten in (3.74) wieder in eine zeitkontinuierliche Fokker-Plank Gleichung umgewandelt<sup>111</sup>.

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(\xi, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial \xi} [A(\xi)w(\xi, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} [B(\xi)w(\xi, t)] \\ A(\xi) &= -2\lambda\xi \\ B(\xi) &= 2\delta(1 - \xi^2) + \frac{4\lambda}{N} \end{aligned} \quad (3.75)$$

- $w(\xi, t)$ : Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion in Abhängigkeit der Marktstimmung  $\xi$  und der Zeit  $t$
- $A(\xi)$ : Driftterm der Marktstimmung  $\xi$
- $B(\xi)$ : Diffusionsterm der Marktstimmung  $\xi$

<sup>111</sup>Die genauen Herleitungen dieser und der folgenden Gleichungen finden sich bei Alfarano et al. (2008)

### 3.4. DAS MODELL VON Alfarano et al. (2008)

Um einen besseren Einblick in das Systemverhalten der Marktstimmung im Bezug auf diese Parameter zu erhalten, ist es zielführend die Gleichgewichtsverteilung  $w_0(\xi)$  der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Fokker-Planck Gleichung in (3.75) unter der Annahme  $N \rightarrow \infty$  zu betrachten. Des Weiteren ist es auch bei diesem Model sinnvoll zur Vereinfachung dieser Analyse den Stimmungsänderungs-  $\lambda$  und Rekrutierungsfaktor  $\delta$  durch den Quotienten  $\alpha = \lambda/\delta$  zu ersetzen.

$$w_0(\xi) = \frac{\Gamma(2\alpha)}{2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)^2}(1 - \xi^2)^{\alpha-1} \quad (3.76)$$

- $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} \exp(-t) dt$ : Gammafunktion

Aus der Gleichgewichtsverteilung in (3.76) kann bereits entnommen werden, dass sich das Modell nur in drei verschiedenen Systemzuständen befinden kann<sup>112</sup>.

1. Für  $\alpha \gg 1$  bzw.  $\lambda \gg \delta$  ist der Stimmungsänderungsfaktor deutlich einflussreicher als der Rekrutierungsfaktor, womit Herdenverhalten praktisch nicht existent ist. Dies führt dazu, dass die Gleichgewichtsverteilung in (3.76) unimodal ist und ihr Maximum bei  $\xi = 0$  liegt.
2. Für den Fall  $\alpha \ll 1$  bzw.  $\delta \gg \lambda$  ist Herdenverhalten der dominante Faktor. Dies führt dazu, dass die Verteilung bimodal ist und die beiden Maxima an den Enden der Verteilung bei den Werten  $\xi \approx 1$  und  $\xi \approx -1$  liegen.
3. Sollte  $\alpha \approx 1$  bzw.  $\lambda \approx \delta$  gelten, so liegt eine annähernde Gleichverteilung der Marktstimmung vor.

Die drei Zustände der Gleichgewichtsverteilung sind zur besseren Anschauung in Abbildung 3.22 noch einmal visualisiert dargestellt.

Um weitere Einsichten in das Systemverhalten zu erhalten, ist es nützlich, sich die zeitliche Entwicklung der Marktstimmung anzusehen. Diese kann nach demselben Verfahren wie beim Model von Lux et al. (2005) durch den Zusammenhang in (3.62) unter der Annahme  $N \rightarrow \infty$  direkt aus (3.75) abgeleitet werden:

---

<sup>112</sup>Siehe dazu auch Kirman (1993)

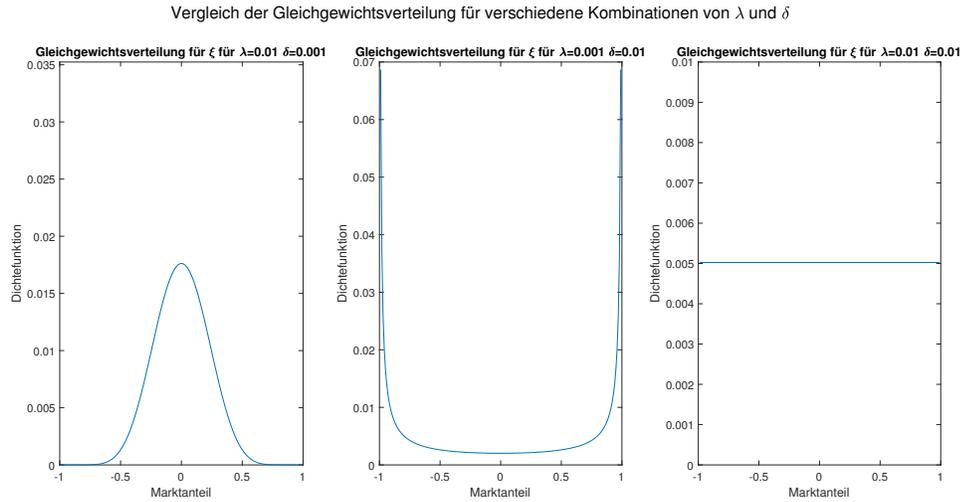


Abbildung 3.22: Vergleich der Marktanteilsverteilungen des Modells von Alfarano et al. (2008) für verschiedene Konstellationen der Parameter  $\lambda$  und  $\delta$ .

$$\xi_t = (1 - 2\lambda\Delta t)\xi_{t-\Delta t} + \epsilon\sqrt{2\delta\Delta t(1 - \xi_{t-\Delta t}^2)} \quad (3.77)$$

- $\epsilon$ : Unabhängige, normalverteilte Zufallsvariable mit  $\epsilon \in N(0, 1)$

Mit Hilfe der zeitlichen Entwicklung des ABM lassen sich nun weitere Aussagen bezüglich des Systemverhaltens ziehen:

1. Der stationäre Punkt der Marktstimmung liegt unabhängig von der Form der Gleichgewichtsverteilung immer bei  $\xi = 0$  und die Geschwindigkeit der Korrektur der Abweichung von diesem wird durch  $\lambda$  bestimmt. Dabei ist die Korrektur umso größer, je weiter sich die Marktstimmung an den Extremen  $\xi = -1$  bzw.  $\xi = 1$  befindet. Der Grund hierfür ist, dass die Anzahl der Agenten, welche die Möglichkeit haben zur unterrepräsentierten Strategie zu wechseln, deutlich höher wird, je weiter sich die Marktstimmung an den Extremen befindet und da die Wechselwahrscheinlichkeit bei diesem Modell für beide Strategien gleich ist, finden viel mehr Wechsel zur unterrepräsentierten Strategie statt. Des Weiteren geht aus (3.77) hervor, dass für das Produkt der Parameter  $\lambda$  und  $\Delta t$

### 3.4. DAS MODELL VON Alfarano et al. (2008)

eine obere Grenze von  $\lambda\Delta t \leq 1$ <sup>113</sup> vorhanden sein muss, da die Marktstimmung andernfalls nicht auf das Intervall  $\xi \in \{-1, 1\}$  beschränkt ist. Diese Begrenzung ist auch intuitiv sinnvoll, da das Produkt  $\lambda\Delta t$  den Anteil der Agenten quantifiziert, welche im Zeitintervall  $\Delta t$  ihre Strategie wechseln.

2. Die Volatilität der Marktstimmung hängt nur vom Parameter  $\delta$  ab. Auch hierbei muss aus denselben logischen Gründen die obere Grenze bei  $\delta\Delta t \leq 1$  vorliegen. Des Weiteren geht aus (3.77) hervor, dass unabhängig von den Parametern  $\delta$  und  $\Delta t$  das Maximum der Volatilität bei  $\xi = 0$  liegt und stetig abnimmt, je weiter sich die Marktstimmung den Rändern  $\xi = -1$  und  $\xi = 1$  annähert. Dies lässt sich damit erklären, dass ein Strategiewechsel über den Herdeneffekt nur dann stattfinden kann, wenn Agenten, die verschiedene Strategien verfolgen, aufeinandertreffen und somit solche Wechsel seltener auftreten, wenn eine der Strategien nur von wenigen Agenten angewandt wird.

Bevor die Auswirkungen der Marktstimmung auf die Rendite genauer untersucht wird, ist es opportun das ABM noch ein wenig zu vereinfachen. Da die Zeitdifferenz  $\Delta t$  im multiplikativen Zusammenhang mit den Parametern  $\lambda$  und  $\delta$  steht, kann ein konstanter Wert für  $\Delta t$  gewählt werden. Wie bereits beim Modell von Lux et al. (2005) wird für Simulation von tägliche Renditen der Wert  $\Delta t = 1$  gewählt. Durch diese Wahl ergeben sich die oberen Grenzen der Parameter  $\lambda$  und  $\delta$  automatisch zu  $\lambda \leq 1$  bzw.  $\delta \leq 1$ . Um die nun Auswirkungen des Marktanteilsverhaltens auf die generierten Renditen beurteilen zu können, ist es sinnvoll die jeweiligen Systemgleichungen in (3.73) und (3.77) nach der Vereinfachung noch einmal gemeinsam zu betrachten.

$$\begin{aligned}\xi_t &= (1 - 2\lambda)\xi_{t-1} + \epsilon\sqrt{2\delta(1 - \xi_{t-1}^2)} \\ r_t &= \sigma_f\epsilon + r_0(\xi_t - \xi_{t-1})\end{aligned}\tag{3.78}$$

Aus (3.78) geht hervor, dass große Differenz in den Renditen nur dann eintreten können, wenn starke Änderungen der Marktstimmung vorliegen. Um darüber hin-

<sup>113</sup>Theoretisch ist der Wert  $\lambda\Delta t = 1$  möglich, da dies aber nur zu einem periodischen Vorzeichenwechsel der Marktstimmung führt, ist die praktische Anwendung dieses Wertes quasi ausgeschlossen.

aus genauere Erkenntnisse über die Auswirkungen der einzelnen Parameter auf die generierten Renditen zu erhalten, ist es sinnvoll die drei unterschiedlichen Systemzustände noch einmal gesondert zu betrachten.

1. Für den Fall  $\lambda \gg \delta$  ist der Korrektur- bzw. Driftfaktor in (3.78) dominant. Dies führt dazu, dass jede Abweichungen vom stationären Punkt  $\xi = 0$  schnell wieder korrigiert wird. Die daraus resultierende unimodale Verteilung der Marktstimmung um den stationären Punkt erlaubt zu wenig Variation in der Marktstimmungsänderung für große Volatilitätsdifferenzen der Renditen. Dieser Effekt ist umso stärker, je größer  $\lambda$  gegenüber  $\delta$  wird.
2. Für  $\lambda \ll \delta$  liegt genau der umgekehrte Fall vor. Durch die Dominanz des Zufallseinflusses können Abweichungen vom stationären Punkt  $\xi = 0$  durch den Driftfaktor nicht so schnell korrigiert werden wie sie durch den Zufallseinfluss auftreten. Des Weiteren führt die Abnahme der Stärke des Driftterms an den Extremen dazu, dass die Marktstimmung größtenteils an ihren Rändern verweilt. Dies führt insgesamt zu einer bimodalen Verteilung der Marktstimmung mit einer hohen Aufenthaltswahrscheinlichkeit an den Extremen, wobei die Änderungen der Marktstimmung an den Rändern der Verteilung signifikant kleiner sind als in der Nähe des stationären Punktes. Dieses spezifische Verhalten der Marktstimmung ist letztendlich ursächlich dafür, dass starke Volatilitätsdifferenzen der Renditen auftreten. Dieser Effekt wird ebenfalls umso stärker, je größer  $\delta$  gegenüber  $\lambda$  wird und resultiert in einer größeren Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Marktstimmung an den Extremen, was wiederum stärkeres Volatilitätsclustering nach sich zieht. Allerdings führen zu große Werte von  $\delta$  gegenüber  $\lambda$  dazu, dass die Marktstimmung eine einmal eingenommene Extremposition nicht mehr verlassen kann.
3. Liegt der Fall  $\lambda = \delta$  vor, so sind Drift- und Zufallseinfluss gleich stark. Daher ist weder der Driftfaktor stark genug Abweichungen schnell zu korrigieren noch besitzt der Zufallseinfluss genug Einfluss die Marktstimmung an den Extremen zu halten. Die daraus resultierende Gleichverteilung führt dazu, dass

### 3.4. DAS MODELL VON Alfarano et al. (2008)

die Marktstimmung relativ gleichmäßig zwischen den Extremen wechselt. Auch hier lässt sich eine stärkere Volatilität in der Nähe des stationären Punktes beobachten, allerdings ist die Aufenthaltsdauer an den Extremen zu gering um ein ausgeprägtes Volatilitätsclustering zu erzeugen.

In den Abbildungen (3.23-3.25) sind die Zusammenhänge zwischen Marktstimmung  $\xi_t$  und Rendite  $r_t$  nochmal visualisiert dargestellt. In Abbildung (3.23) wird die Auswirkung der Marktanteilsverteilung und dem Volatilitätsclustering der Rendite  $r_t$  veranschaulicht. In den Abbildungen (3.24-3.25) wird die Auswirkung einer Änderung der Parameter  $\lambda$  und  $\delta$  für die drei Fälle illustriert.

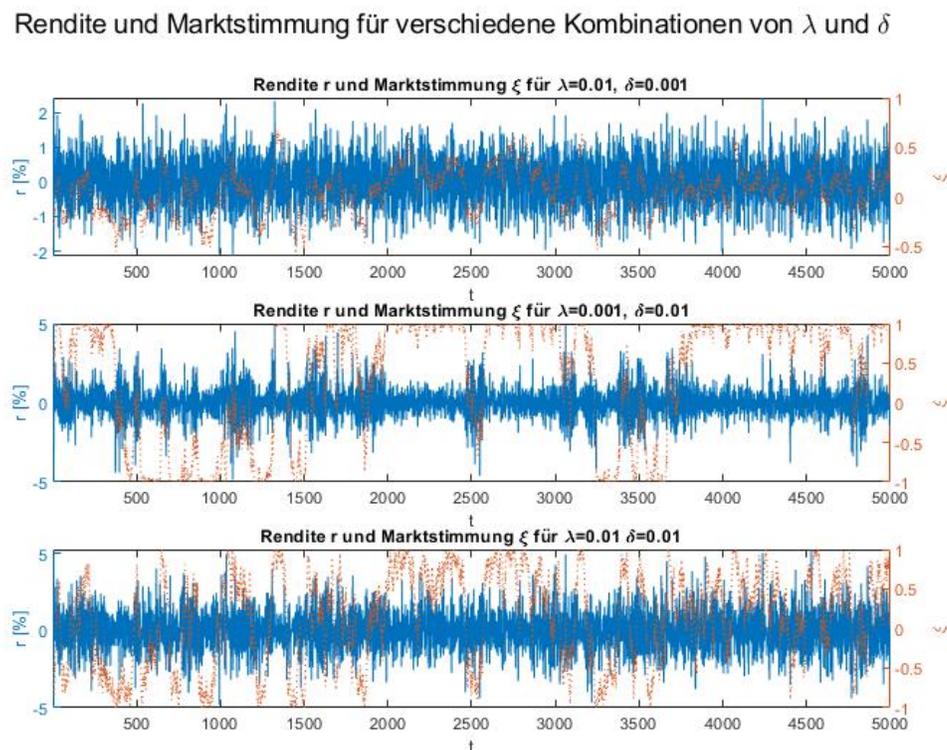


Abbildung 3.23: Vergleich der Renditen und Marktanteile des Modells von Alfarano et al. (2008) für verschiedene Konstellationen der Parameter  $\lambda$  und  $\delta$ . Für die übrigen Parameter wurden die Werte  $\sigma_f = 0.005$  und  $r_0 = 0.1$  gewählt.

Rendite und Marktstimmung für verschiedene Kombinationen von  $\lambda$  und  $\delta$

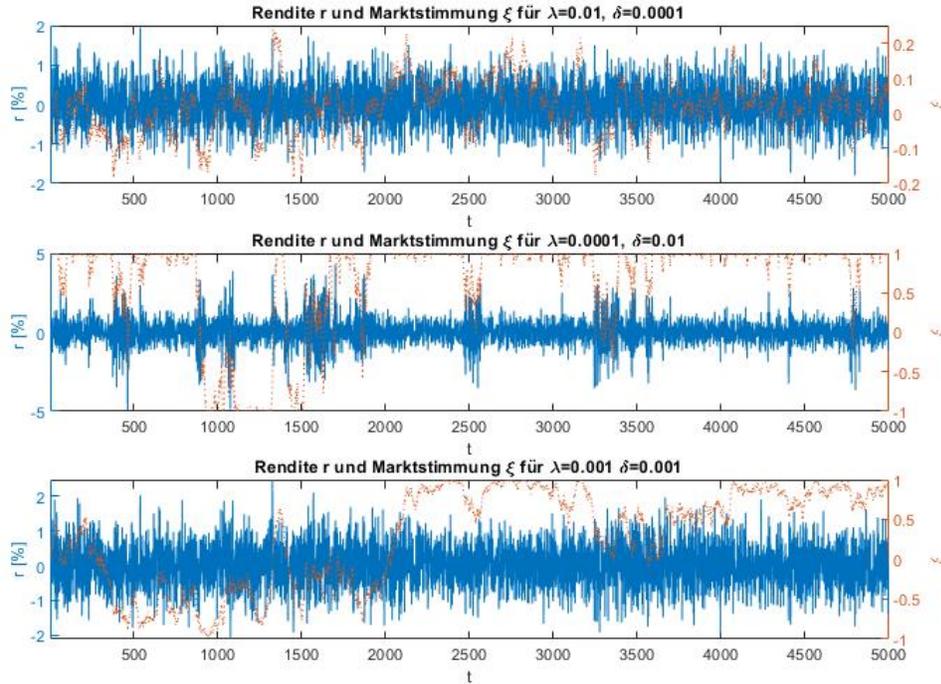


Abbildung 3.24: Vergleich der Renditen und Marktanteile des Modells von Alfarano et al. (2008) für kleinere Parameterwerte von  $\lambda$  und  $\delta$ . Für die übrigen Parameter wurden die Werte  $\sigma_f = 0.005$  und  $r_0 = 0.1$  gewählt.

### 3.4.2 Zu erwartendes Systemverhalten

Wie bei den vorherigen Modellen soll zuletzt noch das zu erwartende Systemverhalten diskutiert werden. Um eine normalverteilte Rendite mit konstanter Varianz zu erzeugen muss  $\lambda \gg \delta$  gelten. Solange diese Bedingung eingehalten wird, sind die genauen Werte für  $\lambda$  und  $\delta$  irrelevant. Somit ist nicht zu erwarten, dass diese Parameter einen spezifischen Wert für normales Systemverhalten aufweisen. Da  $r_0$  die Stärke der Änderung von  $\xi$ , welches wiederum von  $\lambda$  und  $\delta$  abhängt, bestimmt,

### 3.4. DAS MODELL VON Alfarano et al. (2008)

Rendite und Marktstimmung für verschiedene Kombinationen von  $\lambda$  und  $\delta$

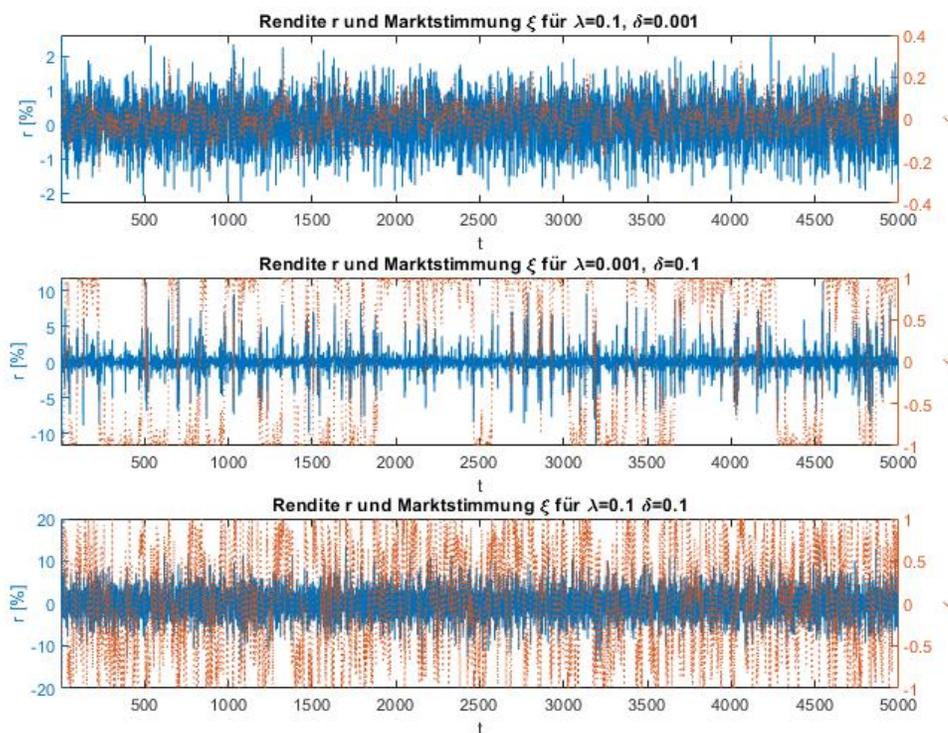


Abbildung 3.25: Vergleich der Renditen und Marktanteile des Modells von Alfarano et al. (2008) für größere Parameterwerte von  $\lambda$  und  $\delta$ . Für die übrigen Parameter wurden die Werte  $\sigma_f = 0.005$  und  $r_0 = 0.1$  gewählt.

gilt für diesen Parameter dasselbe wie für  $\lambda$  und  $\delta$ <sup>114</sup>. Im Gegensatz dazu ist ein gut ausgeprägter charakteristischer Wert  $\sigma_f$  zu erwarten, da dieser die Gesamtvolatilität des Systems bestimmt. Um mit dem Modell Krisenverhalten zu generieren, muss die Bedingung  $\delta \gg \lambda$  eingehalten werden. Im Gegensatz zum Fall der normalverteilten Rendite sind die genauen Werte für  $\lambda$  und  $\delta$  hier relevant für das Systemverhalten, da durch diese Parameter die Stärke des Volatilitätsclustering bestimmt wird. Somit ist zu erwarten, dass sich in diesem Fall deutlich besser bestimmte charakteristische

<sup>114</sup>Wobei es allerdings die Einschränkung gibt, dass  $r_0$  nicht zu groß werden kann, da ansonsten selbst minimale Änderungen von  $\xi$  das System dominieren.

Werte für die Parameter  $\lambda$  und  $\delta$  existieren. Da  $\sigma_f$  und  $r_0$  für die Höhe der Grund- bzw. Krisenvolatilität verantwortlich sind, sollte für diese Parameter ebenfalls ein gut bestimmter charakteristischer Wert vorliegen.

# Kapitel 4

## Optimierungsmethoden

### 4.1 Methode der simulierten Momente

Wie bereits ausführlich diskutiert wurde, sind agentenbasierte Modelle durch Rekursivität, nicht lineare Abhängigkeiten und eine hohe Anzahl freier Parameter gekennzeichnet. Dies führt einerseits zu einem flexiblen und hochinteressanten Systemverhalten, bereitet aber andererseits große Probleme bei der Kalibrierung. Ein Verfahren, das in der Literatur zur Kalibrierung von Agentenmodellen als vielversprechend angesehen wird, ist die Methode der simulierten Momente. Im Prinzip beruht das Verfahren darauf, bestimmte empirischen Momente  $m_e$  des zugrunde liegenden Datensatzes mit den analogen simulierten Momenten  $m_s$  der vom Modell erzeugten Zeitreihe zu vergleichen, um den freien Parametersatz  $\Phi_0$  zu finden, für den diese beiden möglichst identisch sind. Damit ist die Methode der simulierten Momente der Klasse der Optimierungsverfahren zuzuordnen, wobei drei zusammenhängende Probleme besonders zu beachten sind. Erstens müssen geeignete Momente zur Kalibrierung gewählt werden. Zweitens muss eine Zielfunktion definiert werden, an der die eigentliche Optimierung erfolgt. Und drittens braucht es noch eine geeignete Optimierungsheuristik zum Auffinden des globalen Minimums oder wenigstens eines robusten, lokalen Minimums. Alle drei Probleme werden im Weiteren einzeln erläutert und begründet.

### 4.1.1 Wahl der Momente

Geht man davon aus, dass Finanzzeitreihen von stochastischen Prozessen erzeugt werden, so lassen sich für diese verschiedene deskriptive Statistiken, die sogenannten Momente definieren. Der erste Schritt der Optimierung ist es, Momente auszuwählen, an denen im Anschluss das Modell kalibriert wird. Diese Wahl orientiert sich an den angestrebten Forschungszielen und ist zum Teil eine subjektive<sup>1</sup> Wahl. Deshalb sollte sie auch entsprechend gut begründet werden. Als geeignete Momente zur Kalibrierung werden solche angesehen, welche die Stylized-Facts von Finanzmarktdaten repräsentieren<sup>2</sup>. Als die zur Kalibrierung von Agentenmodellen interessantesten dieser Stylized-Facts gelten in der Literatur<sup>3</sup> die Fat-Tails der Renditeverteilung, das Volatilitätsclustering und die statistische Unabhängigkeit der Rendite. Zusätzlich muss ein Modell auch noch die Gesamtvolatilität des Prozesses reproduzieren können, um zur Modellierung von Finanzzeitreihen infrage zu kommen. Im Weiteren werden diese Momente genauer beschrieben.

#### 4.1.1.1 Volatilität

Die Volatilität ist ein Konzept aus der Statistik und beschreibt die Streuung der Datenpunkte einer Zeitreihe um deren Mittelwert. In der Finanzwirtschaft dient die Volatilität auch als Risikomaß, da sie eine Prognoseunsicherheit für die in der Zukunft zu erwartende Rendite beschreibt. Ein Agentenmodell, das Finanzzeitreihen realistisch beschreiben soll, muss in der Lage sein, die Volatilität möglichst genau abzubilden. Es bleibt noch ein Moment zu definieren, mit dem sich die Volatilität operationalisieren lässt. Eine recht offensichtliche Wahl wäre hierfür eigentlich die formale Definition der Volatilität, welche nichts weiter als die Standardabweichung

---

<sup>1</sup>Dies ist auch ein Hauptkritikpunkt an der Methode der simulierten Momente. Siehe dazu auch Franke (2009).

<sup>2</sup>Für einen Überblick der wichtigsten Stylized-Facts siehe Cont (2001) und Taylor (2005). Ein umfangreicher Literaturüberblick zu Arbeiten über die Stylized-Facts ist bei Sewell (2011) zu finden.

<sup>3</sup>Siehe Chen et al. (2012).

#### 4.1. METHODE DER SIMULIERTEN MOMENTE

der Renditen in Prozent ist.

$$\sigma = 100 \cdot \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{i=1}^T (r_i - \bar{r})^2} \quad (4.1)$$

- $r$ : Rendite
- $\bar{r}$ : Mittelwert der Rendite  $r$
- $T$ : Anzahl der empirischen Beobachtungen

Allerdings verwenden nicht alle Studien in der Literatur auch die Standardabweichung aus (4.1)<sup>4</sup>. Andere Studien verwenden stattdessen zur Kalibrierung von Agentenmodellen den Mittelwert der prozentualen absoluten Rendite  $|\bar{r}|$  als Maß für die Gesamtvolatilität des Systems<sup>5</sup>. Ebenfalls Verwendung findet der Mittelwert der quadrierten Renditen<sup>6</sup>.

$$|\bar{r}| = 100 \cdot \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T |r_i| \quad r^2 = 100 \cdot \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T r_i^2 \quad (4.2)$$

- $|r|$ : Absolute Rendite
- $r^2$ : Quadrierte Rendite

Keine dieser Wahlen in (4.1) und (4.2) ist unbedingt zwingend, da alle äquivalente Maße für die Volatilität des Systems darstellen. Die letztendliche Wahl ist auch dementsprechend relativ gleichgültig und beruht anscheinend auf der individuellen Präferenz des jeweiligen Forschers, da nirgendwo eine Begründung für die schlussendlich benutzte Bestimmung gegeben wird<sup>7</sup>.

##### 4.1.1.2 Fat-Tails

Dass die Renditen an Finanzmärkten nicht normalverteilt sind, ist eine schon länger bekannte und gut untersuchte Tatsache. Bereits Mandelbrot (1963) entdeckte anhand

---

<sup>4</sup>Siehe z.B. Winker et al. (2007),

<sup>5</sup>Siehe z.B. Franke (2009), Franke und Westerhoff (2012, 2016).

<sup>6</sup>Siehe z.B. Ghonghadze und Lux (2016), Chen und Lux (2018)

<sup>7</sup>Auch ein Vergleich der verschiedenen Methoden zur Berechnung des Momentes der Volatilität ist nach dem Wissen des Autors bisher nicht erfolgt.

der Renditen von Baumwollpreisen, dass Renditeverteilungen eine Häufung von Ereignissen an ihren Enden aufweisen, die bei einer Normalverteilung nicht beobachtet werden. Diese Beobachtung wurde von Mandelbrot (1967) auch auf weiteren Märkten bestätigt. Um die Verteilung der Renditen an ihren Enden im Detail zu untersuchen, kann man sich die Erkenntnisse der Extremwerttheorie, welche das Verhalten von Maxima bzw. Minima<sup>8</sup> betrachtet, zunutze machen. Dies hat den Vorteil, dass keine Kenntnisse über die gesamte Verteilung vorliegen müssen. Für die Verteilungsfunktion  $F_V$  des Maximum  $M_N$  einer beliebigen unabhängigen und identisch verteilten Stichprobe  $\{x_1, \dots, x_N\}$  gilt:

$$P(M_N \leq X) = P(x_1 \leq X, \dots, x_N \leq X) = F_V(X)^N \quad (4.3)$$

- $X$ : Schwellenwert aus dem Intervall  $(-\infty, \infty)$
- $P$ : Wahrscheinlichkeit, dass für das Maximum  $M_N \leq X$  gilt
- $x$ : Beobachtungen der Stichprobe
- $N$ : Anzahl der Beobachtungen
- $F_V(X)$ : Wert der Verteilungsfunktion an  $X$

Aus dem Zusammenhang in (4.3) lässt sich nun direkt auf das zum Maximum zugehörige Verhalten der Verteilungsfunktion schließen. Nach der Extremwerttheorie konvergieren die Maxima im Grenzwert unendlicher Beobachtungen einer beliebigen nicht entarteten<sup>9</sup> Verteilungsfunktion zu einer von drei möglichen Extremwertverteilungen. Nach dem Fischer-Tippet-Gnedenko Theorem von Fisher und Tippett (1928) und Gnedenko (1943) sind das die Weibull-Verteilung<sup>10</sup>, die Gumbel-Verteilung<sup>11</sup> und die Frechet-Verteilung<sup>12</sup>. Da Renditen, wie von Mandelbrot (1963) bereits gezeigt, Fat-Tails aufweisen, folgen die Extremwerte der Renditeverteilungsfunktion also einer Frechet-Verteilung und für die Renditen gilt dann:

---

<sup>8</sup>Im Weiteren wird sich auf die Betrachtung der Maxima beschränkt, da durch die Analyse der Minima keine neuen Erkenntnisse gewonnen werden können.

<sup>9</sup>Dies ist eine Verteilungsfunktion, die nur die Werte Null und Eins annehmen kann.

<sup>10</sup>Diese liegt vor, wenn die zugehörige Verteilungsfunktion  $F_V$  einen endlichen Endwert aufweist. Ein Beispiel hierfür ist die Dreiecksverteilung.

<sup>11</sup>Diese liegt vor, wenn die Enden einer Verteilung exponentiell abfallen. Ein Beispiel hierfür ist die Normalverteilung.

<sup>12</sup>In diesem Fall zeigen die Enden der Verteilung einen hyperbolischen Abfall. Dieses Verhalten ist typisch für Verteilungen die Fat-Tails aufweisen. Ein Beispiel hierfür ist die t-Verteilung.

#### 4.1. METHODE DER SIMULIERTEN MOMENTE

$$P(R > r) = r^{-\alpha} \quad \text{für } r \rightarrow \infty \quad (4.4)$$

- $P$ : Wahrscheinlichkeit, dass eine Rendite  $R > r$  existiert
- $\alpha$ : Tail-Exponent

Diese funktionale Abhängigkeit wird auch als Power-Law bezeichnet und ist eine in der Literatur sehr gut erforschte Eigenschaft von Finanzmarktzeitreihen<sup>13</sup>. Eine der ersten Studien, die den Tail-Exponenten von Renditen untersucht, ist von Jansen und de Vries (1991) anhand des S&P 500 durchgeführt worden. Die Autoren fanden in ihrer Analyse einen Tail-Exponenten, der im Bereich  $\alpha \in [3, 5]$  liegt. Eine spätere Studie mit einer größeren Datenbasis anhand dreier US-Aktienmärkte<sup>14</sup> durchgeführt von Gopikrishnan et al. (1998) bestätigt die Vermutung. Präziser gesagt stellt der Autor fest, dass für den Tail-Exponenten der untersuchten Größen  $\alpha \approx 3$  gilt. Diese Aussage wurde in Studien unterschiedlicher Märkte größtenteils bestätigt, wobei nicht für alle Märkte diese Approximation gleichermaßen gilt. Allerdings lässt sich feststellen, dass sich der Tail-Exponent für alle untersuchten Märkte im Bereich  $\alpha \in (2, 5]$ <sup>15</sup> befindet. Des Weiteren bedeutet dieses Ergebnis, dass die Verteilung der Renditen eine endliche Varianz hat ( $\alpha > 2$ ), aber die Existenz der Schiefe ( $\alpha > 3$ ) und Kurtosis ( $\alpha > 4$ ) nicht garantiert ist. Dieser Zusammenhang lässt sich leicht herleiten, da sich alle vorher aufgezählten statistischen Eigenschaften aus den Momenten der Renditeverteilung ableiten. Für die Existenz des Moments  $m_k$  der Ordnung  $k \in \mathbb{N}_0$  gilt:

---

<sup>13</sup>Für eine ausführliche Behandlung und Herleitung des Zusammenhangs in (4.4) siehe auch Jansen und de Vries (1991) oder Lux (2009).

<sup>14</sup>Diese sind der New York Stock Exchange (NYSE), der American Stock Exchange (AMEX) und der National Association of Securities Dealers Automated Quotation (NASDAQ).

<sup>15</sup>Siehe Cont (2001). Studien hierzu finden sich auch bei Lux (2009), welcher dazu die Studien von Koedijk et al. (1990) auf europäische USD-Devisenmärkte ausweitet, Longin (1996) für Aktien des New York Stock Exchange, Lux (1996) für Aktien des DAX, Jondeau und Rockinger (2003) für asiatische, osteuropäische und lateinamerikanische Schwellenmärkte. Weitere Beispiele für Untersuchungen zum Tail-Exponent für verschiedene Märkte finden sich bei Cont (2001), welcher zusätzlich noch Dacorogna und Pictet (1998) für Hochfrequenzdaten des USD-DEM Devisenmarktes und Hauksson et al. (2001) für weitere USD-Devisenmärkte auflistet.

$$m_k(r) = \int_{-\infty}^{\infty} r^k f_D(r) dr < \infty \quad (4.5)$$

- $r$ : Rendite
- $f_D(r)$ : Dichtefunktion der Rendite  $r$

Durch Einsetzen der Dichtefunktion<sup>16</sup> für die Enden der Verteilung<sup>17</sup> ergibt sich folgendes Integral für den oberen Rand der Verteilung<sup>18</sup>:

$$m_k(r) = \int_R^{\infty} r^{k-\alpha-1} dr < \infty \quad (4.6)$$

- $R$ : Untere Renditegrenze

Aus der Gleichung 4.6 geht hervor, dass die Bedingung nur erfüllt sein kann, wenn  $\alpha > k$  ist<sup>19</sup>. Dies bedeutet, dass der häufig verwendete Exzess<sup>20</sup> nicht als repräsentatives Moment für Fat-Tails zur Verfügung steht<sup>21</sup>. Allerdings lässt sich hierfür der Tail-Exponent  $\alpha$  selber verwenden, da er auch als ein Moment der Verteilung interpretiert werden kann. Dazu muss er über den von Hill (1975) eingeführten Hill-Schätzer  $\alpha_H$  berechnet werden, welcher der inverse Wert des Tail-Exponenten ist. Um den Hill-Schätzer zu berechnen, muss die Annahme gemacht werden, dass sich die Verteilungsfunktion  $F_V(x)$  bzw. Dichtefunktion  $f_D(x)$  einer Zufallsvariablen  $x$  ab einem bestimmten Schwellenwert  $x_q$  einer Pareto-Verteilung<sup>22</sup> folgt:

<sup>16</sup>Aus 4.4 lässt sich leicht die Verteilungsfunktion und per Ableitung auch die Dichtefunktion herleiten.

<sup>17</sup>Für die Existenz der Momente reicht es aus sich das Verhalten des Integrals im Limes gegen  $\infty$  bzw.  $-\infty$  anzusehen, da in endlichen Grenzen ein Integral nur unendlich werden kann, wenn es eine Polstelle besitzt und dies sowohl für die Dichtefunktion  $f_D(r)$  als auch für das Polynom  $r^k$  und somit auch für das Produkt beider in (4.5) ausgeschlossen ist. Von daher muss das Integral in (4.5) in endlichen Grenzen ebenfalls endlich sein.

<sup>18</sup>Die Analyse für den unteren Rand der Verteilung kann analog vorgenommen werden.

<sup>19</sup>Für  $k = \alpha$  ist das Ergebnis des Integrals der natürliche Logarithmus, während für  $k > \alpha$  ein Polynom mit positivem Exponenten die Lösung bildet. In beiden Fällen geht die Lösungsfunktion im Limes gegen unendlich.

<sup>20</sup>Der Exzess wird häufig auch als Überkurtosis bezeichnet.

<sup>21</sup>Dies gilt im Bezug auf die Symmetrie ebenso für die Schiefe.

<sup>22</sup>Die Pareto-Verteilung ist gleichzeitig auch die zur Frechet-Verteilung der Maxima zugehörige Verteilungsfunktion.

#### 4.1. METHODE DER SIMULIERTEN MOMENTE

$$F_V(x) \propto 1 - \left(\frac{x_q}{x}\right)^\alpha \quad f_D(x) \propto \frac{\alpha x_q^\alpha}{x^{\alpha+1}} \quad \text{für } x \geq x_q \quad (4.7)$$

- $x$ : Zufallsvariable
- $F_V(x)$ ,  $f_D(x)$ : Verteilungsfunktion bzw. Dichtefunktion von  $x$
- $x_q$ : Gewählter Schwellenwert

Der Hill-Schätzer lässt sich nun unter Anwendung der Maximum-Likelihood-Methode<sup>23</sup> auf die Dichtefunktion in (4.7) recht einfach nach (4.8) berechnen:

$$\alpha_H = \alpha^{-1} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^T \begin{cases} \log(x_t) - \log(x_q) & \text{für } x_t \geq x_q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.8)$$

- $x_t$  Beobachtungen einer Zeitreihe zum Zeitpunkt  $t$
- Verteilungsanteil  $q$  für den  $x_t \geq x_q$  gilt
- $N$  Anzahl der Beobachtungen  $x_t \geq x_q$

Der Anteil  $q$ <sup>24</sup> ist bei der Berechnung nach (4.8) ein zu wählender Faktor, welcher sich teilweise stark auf den zu erhaltenden Hill-Schätzer auswirkt. Dies liegt daran, dass mit der Dichtefunktion in (4.7) davon ausgegangen wird, dass die Ränder genau einer Paretoverteilung folgen. Diese Annahme ist aber nach der Extremwerttheorie nur asymptotisch gültig, wird also allgemein so für endliche Stichproben von jeder beliebigen Verteilung mit Fat-Tails nicht erfüllt. Eine Korrektur der Annahme in (4.7) wird von Pictet et al. (1998) gegeben. Wird die Approximation von Pictet et al. (1998) berücksichtigt, ergibt sich ein Bias des Hill-Schätzers, welcher proportional zu  $q = \frac{N}{T}$  ist. Damit nimmt der Bias ab, je weniger Datenpunkte zur Berechnung des Hill-Schätzers in (4.8) benutzt werden. Die Varianz des Hill-Schätzers wiederum ist proportional zu  $\frac{1}{N}$  und zeigt damit genau das gegenteilige Verhalten. Bei einer konstanten Anzahl von Datenpunkten  $T$  darf also der Anteil  $q$  weder zu groß noch zu klein gewählt werden. Denn wird der Schwellenwert  $x_q$  zu groß, dominiert die Varianz

<sup>23</sup>Auf die Maximum-Likelihood-Methode wird ausführlich im Kapitel Optimierung am aktuellen Zeitrand eingegangen.

<sup>24</sup>Definiert ist  $q$  als restlicher Anteil zum Quantil  $p$ .  $q = 0.1$  betrachtet also alle Werte, welche größer als der Quantilwert für  $p = 0.9$  ist.

von  $\alpha_H$ , während für zu kleine Werte von  $x_q$  der Bias von  $\alpha_H$  immer größer wird. Insgesamt liegt also bei der Wahl des Schwellenwertes  $x_q$  ein Zielkonflikt zwischen einer Minimierung des Bias und einer Minimierung der Varianz vor. Ein weiteres Problem ist, dass eine Existenz des Schwellenwert  $x_q$  nicht garantiert ist<sup>25</sup>. Letzteres ist in dieser Arbeit kein Problem, da der Optimierungsdatensatz so ausgewählt ist, dass er ein deutliches Power-law Verhalten zeigt. Allerdings kann dieses Problem durchaus bei kürzeren Datensätzen auftreten, da hier möglicherweise Zeitreihen vorhanden sein können, welche die Annahme in (4.4) bzw. (4.7) nicht erfüllen. Zwar gibt es Methoden, mit deren Hilfe der Bias aus dem Hill-Schätzer herausgerechnet werden kann<sup>26</sup>, die Frage ist jedoch, ob dies überhaupt notwendig ist. Ein Problem bei der Verwendung dieser Ansätze ist nämlich die Erhöhung der Laufzeit, die sie mit sich bringen. Da der Hill-Schätzer in jeder Simulation neu berechnet werden muss, kann sich die Laufzeit dadurch, je nach gewählter Methode, insgesamt enorm erhöhen. Allerdings ist die Erhöhung der Genauigkeit nur von Interesse, wenn der Bias eine nicht zu vernachlässigende Fehlerquelle wäre. Dies ist allerdings für diese Anwendung nicht der Fall. Da der Bias nur von  $q$  und nicht von der absoluten Anzahl  $N$  abhängt, haben sowohl empirische als auch simulierte Momente denselben Bias unter der Bedingung<sup>27</sup>, dass für beide der gleiche Anteil der Verteilung  $q$  zur Berechnung des Hill-Schätzers herangezogen wird. Solange also genug Datenpunkte vorhanden sind, um den Einfluss der Varianz gering zu halten, kann  $q$  einfach vorher bestimmt und der Bias als Fehlerquelle trotzdem ausgeschlossen werden. Es bleibt noch die Frage zu erörtern, welche Finanzzeitreihe und welcher Wert für  $q$  am besten zur Berechnung des Hill-Schätzers zu verwenden ist. In der Literatur im Allgemeinen<sup>28</sup> und zur Kalibrierung von Agentenmodellen<sup>29</sup> im Speziellen wird hierfür standardmäßig die

---

<sup>25</sup>Der Schwellenwert  $x_q$  existiert nicht, wenn die reale Verteilung keine Fat-Tails aufweist, also nicht der Annahme in (4.4) bzw. (4.7) folgt.

<sup>26</sup>Siehe hierzu z.B. Huisman et al. (2001), Caeiro et al. (2005), Gomes und Pestana (2007a,b)

<sup>27</sup>Eine weitere Bedingung ist, dass sich die Verteilung der empirischen und simulierten Datenpunkte nicht zu stark unterscheiden dürfen, da ansonsten zwar die Proportionalität grundsätzlich erhalten bleibt, sich ihre Ausprägung aber durchaus drastisch unterscheiden kann. Siehe dazu die Approximation und den daraus resultieren Bias bei Pictet et al. (1998).

<sup>28</sup>Siehe z.B. Lux (2009).

<sup>29</sup>Siehe z.B. Winker et al. (2007), Franke (2009), Franke und Westerhoff (2012, 2016).

## 4.1. METHODE DER SIMULIERTEN MOMENTE

absolute Rendite  $|r|$  zum Wert  $q = 0.05$  vorgeschlagen, was auch im weiteren Verlauf verwendet wird. Anstatt eines fixen Schwellenwertes kann alternative auch ein optimaler Schwellenwert  $x_q$  nach den Methoden in Lux (1998)<sup>30</sup> oder der Methode von Clauset et al. (2009)<sup>31</sup> bestimmt werden. Dies ist allerdings in diesem Fall unnötig, da damit ein zusätzlicher Aufwand generiert wird, welcher keinen signifikanten Ertrag liefert. Dies hat zwei Gründe. Erstens wird das Zielkonfliktproblem zwischen Bias und Volatilität bereits ausreichend gut durch die Wahl von  $q = 0.05$  gelöst und zweitens ist nicht garantiert, dass empirische und simulierte Renditen genau derselben Verteilung folgen, womit der für die empirische Verteilung bestimmte optimale Schwellenwert  $x_q$  nicht dem Optimum der simulierten Verteilungen entspricht.

### 4.1.1.3 Unabhängigkeit der Rendite und Volatiliätsclustering

Neben den Fat-Tails der Renditen gehört die Beobachtung, dass die an den Finanzmärkten auftretenden Renditen keine zeitliche Abhängigkeit<sup>32</sup> haben und die Volatilität sich in schwache und starke Phasen aufteilt<sup>33</sup>, zu den sehr gut dokumentierten Stylized-Facts der Finanzwirtschaft<sup>34</sup>. Als repräsentatives Moment für beide

---

<sup>30</sup>Die Arbeit von Lux (1998) bietet einen Überblick über Methoden zur Bestimmung eines optimalen  $x_q$ .

<sup>31</sup>Bei diesem Ansatz werden verschiedene Schwellenwerte ausgewählt und mittels eines Kolmogorow-Smirnow-Test an den Datenpunkten größer der gewählten Schwelle die Annahme der Paretoverteilung in (4.7) überprüft. Der optimale Schwellenwert  $x_q$  ist dann der Wert, an dem die Teststatistik minimal wird.

<sup>32</sup>Dies ist bereits seit Fama (1965) bekannt, der dafür Aktien des Dow-Jones untersuchte. In der Praxis führt es dazu, dass Vorhersagen über zukünftige Preisänderungen sich nicht aus vergangenen Preisänderungen ableiten lassen. Bestätigt wurde die Beobachtung z.B. auch bei Fama (1970), der seine Effizienzmarkthypothese auch damit empirisch unterlegt, dass die Renditen des Dow-Jones keine zeitliche Abhängigkeit aufweisen. Weitere Studien dazu finden sich z.B. bei Ding et al. (1993) und Lobato und Savin (1998), welche Renditen des S&P 500 auf Autokorrelation untersucht haben. Einen sehr detaillierten Überblick zu verschiedene Studien zu dem Thema findet sich bei Sewell (2011).

<sup>33</sup>Dies ist bereits seit Mandelbrot (1963) bekannt, der feststellte, dass auf große Preisänderungen ebenfalls eher große Preisänderungen folgen, während auf kleine Preisänderungen auch eher kleine Preisänderungen folgen. Diese Beobachtungen wurden auch unter anderem von z.B. Taylor (1994, 2008), Ding et al. (1993), Lobato und Savin (1998) bestätigt. Auch hierzu findet sich eine ausführliche Sammlung von Arbeiten zu dem Thema bei Sewell (2011).

<sup>34</sup>Bereits das ARCH-Modell von Engle (1982) bzw. GARCH-Modell von Bollerslev (1986) gehen darauf zurück, Zeitreihen mit Volatiliätsclustering zu modellieren.

bietet sich die Autokorrelation an, welche die zeitlichen Korrelationen der einzelnen Datenpunkte  $x_t$  untereinander erfasst. Die Autokorrelation  $\rho$  von verschiedenen Datenpunkten der Lag-Ordnung  $\tau$  wird gebildet nach (4.9):

$$\rho_\tau = \text{acorr}(x_t, x_{t-\tau}) = \frac{\text{cov}(x_t, x_{t-\tau})}{\sigma(x_t)\sigma(x_{t-\tau})} \quad (4.9)$$

- $x_t$ : Datenpunkt zum Zeitpunkt  $x$
- $\tau$ : Lag-Ordnung
- $\text{cov}$ : Kovarianz aller  $x_t$  und  $x_{t-\tau}$
- $\sigma$ : Standardabweichung aller  $x_i$  bzw.  $x_{t-\tau}$

Um die Unabhängigkeit der Rendite zu gewährleisten, darf die Autokorrelation  $\rho$  der Renditezeitreihe für alle Lags  $\tau > 0$  sich nicht signifikant von null unterscheiden. Da ein Agentenmodell keine Autokorrelation in höheren Lag-Ordnungen mehr aufweisen kann, wenn sie schon in den niederen Lag-Ordnungen nicht mehr vorhanden ist<sup>35</sup>, reicht es sich hierfür auf niedrige Lag-Ordnungen zu beschränken. Um das Volatilitätsclustering zu untersuchen, muss eine Zeitreihe gefunden werden, mit welcher sich Korrelationen der Volatilität beschreiben lassen. Zur Auswahl stehen dafür verschiedene Potenzen  $|r|^c$  mit  $c \in \mathbb{N}$  der Rendite. Die Studien von Ding et al. (1993) und Lobato und Savin (1998) haben gezeigt, dass die Autokorrelation für alle untersuchten Potenzen von  $|r|$  auch für große Lags  $\tau$  signifikant vorhanden war. Allerdings wurde dabei auch deutlich, dass dieser Effekt mit größer werdendem  $c$  immer weiter abnimmt. Daher ist es opportun, als Momente nur Lags der Autokorrelation für  $c = 1$ , also die absolute Rendite  $|r|$  zu nehmen<sup>36</sup>.

#### 4.1.1.4 VaR bezogene Momente

Da das eigentliche Ziel dieser Arbeit die Überprüfung ist, ob agentenbasierte Modelle zur Risikoprognose geeignet sind, ist es nützlich zusätzlich Momente zu wählen, die sich hierfür verwenden lassen. Da sich das als Risikomaß gewählte Kriterium der VaR

<sup>35</sup>Siehe z.B. Franke und Westerhoff (2012).

<sup>36</sup>Dies ist auch in der Literatur bei Anwendung der Methode Standard. Siehe hierzu z.B. Winker et al. (2007), Franke (2009), Franke und Westerhoff (2012), Franke und Westerhoff (2016).

#### 4.1. METHODE DER SIMULIERTEN MOMENTE

leider nicht als Moment darstellen lässt, sollten an seiner Stelle Momente gewählt werden, welche als Proxi für den VaR dienen können. Der Conditional-Value-at-Risk (CVaR) ist wie der VaR ebenfalls ein Risikomaß des Verlustes, aber im Gegensatz zum VaR stellt der CVaR einen Zeitmittelwert dar und kann daher auch als Moment für die Optimierung verwendet werden. Der CVaR ist definiert als:

$$CVaR(x, p) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^T \begin{cases} x_t & \text{für } x_t \leq VaR_p \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.10)$$

- $x_t$ : Datenpunkt  $x$  zum Zeitpunkt  $t$
- $p$ : Signifikanzniveau
- $VaR_p$ : VaR zum Signifikanzniveau  $p$
- $N$ : Anzahl der empirischen Beobachtungen für  $x_t \leq VaR_p$
- $T$ : Anzahl aller empirischer Beobachtungen

Der CVaR ist also nichts weiter als ein Erwartungswert gebildet über alle Renditen, die unter einem VaR zum Quantil  $p$  liegen. Ein typischer Wert, welcher auch in der Praxis für das Quantil  $p$  Verbreitung findet, ist  $p = 0.05$ . Dieses wird deshalb im Folgenden auch hier bei der Optimierung benutzt. Um die Abfolge der VaR Unterschreitungen möglichst genau zu erfassen, werden wie bei Ji et al. (2019) als Momente die durchschnittliche Anzahl der Zeitschritte zwischen zwei VaR Verletzungen  $\bar{V}$  sowie deren Standardabweichung als zu optimierendes Momente verwendet:

$$\bar{V}(x, p) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} (t_{x_{i+1}} - t_{x_i}) \quad (4.11)$$

$$\sigma(V(x, p)) = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^{N-1} \left( t_{x_{i+1}} - t_{x_i} - \left[ \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} t_{x_{i+1}} - t_{x_i} \right] \right)^2} \quad (4.12)$$

- $x_t$ : Datenpunkt  $x$  zum Zeitpunkt  $t$
- $p$ : Signifikanzniveau
- $x_i$ :  $i$ -te Unterschreitung des VaR
- $VaR_p$ : VaR zum Signifikanzniveau  $p$
- $N$ : Anzahl der VaR Verletzungen

### 4.1.2 Überblick der verwendeten Momente

Tabelle 4.1: Auflistung der verwendeten Momente und zugehöriger Stylized-Facts.

- $r, |r|$ : Rendite, absolute Rendite
- $\sigma(r)$ : Standardabweichung der Rendite
- $H(|r|, q)$ : Hill-Schätzer des  $q$  Verteilungsanteils der absoluten Rendite
- $\rho(|r|, \tau)$ : Autokorrelation der absoluten Rendite zur Lag-Ordnung  $\tau$
- $CVaR(r, p)$ : CVaR zum Konfidenzniveau  $p$
- $\bar{V}(r, p)$ : Durchschnittlicher Abstand der  $VaR_p$  Unterschreitungen
- $\bar{V}(r, p)$ : Standardabweichung der  $VaR_p$  Unterschreitungen

Stylized-Facts	Momente
Gesamtvolatilität	$100 \cdot \sigma(r)$
Fat-Tails	$H( r , 0.05)$
Volatilitätsclustering	$\bar{\rho}( r , \{5, \dots, 15\})$
	$\bar{\rho}( r , \{20, \dots, 30\})$
	$\bar{\rho}( r , \{45, \dots, 55\})$
VaR bezogene Momente	$100 \cdot CVaR(r, 0.05)$
	$\bar{V}(r, 0.05)$
	$\sigma(V(r, 0.05))$

Um eine Zielfunktion zur anschließenden Optimierung zu erstellen, müssen Momente für die wichtigsten Stylized-Facts der empirischen Rendite gefunden werden. In diesem Abschnitt soll noch mal ein kurzer Überblick über die verwendeten Momente und der dazugehörigen statistischen Eigenschaften gegeben werden. Die Gesamtvolatilität des zugrundeliegenden Datensatzes wird über die Standardabweichung der Rendite in den Momenten abgebildet. Die Berücksichtigung der Fat-Tails erfolgt durch die Berechnung des Hill-Schätzers über die absolute Rendite zum Verteilungsanteil  $q = 0.05$ . Das Volatilitätsclustering geht durch die Lag-Ordnungen der Autokorrelation in die Optimierung mit ein. Die ersten Lag-Ordnungen fehlen, da die Daten dort eine geringere Autokorrelation als bei den späteren Lag-Ordnungen aufweisen können. Dies ist mit den Agentenmodellen nicht zu reproduzieren und wird deshalb ignoriert. Zur Reduktion von zufälligen Einflüssen wird zusätzlich der Mittelwert über benachbarte Lag-Ordnungen gebildet. Des Weiteren werden zur Berücksichtigung des VaR drei mit diesem zusammenhängende Momente gewählt. Dazu gehören der  $CVaR$  zum

#### 4.1. METHODE DER SIMULIERTEN MOMENTE

$p = 0.05$  Quantil, der mittlere Abstand jener Renditen, welche den VaR zum  $p = 0.05$  Quantil unterschreiten sowie die Standardabweichung dieses Abstandes. Die Autokorrelation der Rendite wird hingegen nicht als Moment der Optimierung verwendet. Der Grund hierfür liegt darin, dass Modelle ohne deterministischen Kern immer eine Autokorrelation der Rendite von annähernd  $\rho(r, \tau) = 0$  aufweisen. Von daher ist eine Inklusion der Autokorrelation für diese Modelle vollkommen sinnlos und gleichzeitig besteht die Möglichkeit, dass statistische Fluktuationen in der empirischen und simulierten Autokorrelation sich negativ auf die Güte der Optimierung auswirken. Aus Gründen der Vergleichbarkeit zwischen den Ergebnissen der Optimierung wird daher die Autokorrelation für alle verwendeten Modelle nicht berücksichtigt. In Tabelle 4.1 sind die Stylized-Facts und die entsprechenden Momente nochmal anschaulich dargestellt.

##### 4.1.3 Zielfunktion

Nach der Auswahl geeigneter Momente zur Kalibrierung des Systems muss noch geklärt werden, wie genau die Optimierung erfolgen soll. Da es das Ziel der Methode der simulierten Momente ist, Agentenmodelle so zu optimieren, dass die vom Modell erzeugten Momente möglichst genau den empirischen Momenten entsprechen, muss ein funktioneller Zusammenhang zwischen diesen definiert werden. Zielführend ist es hierfür die empirischen  $m_e$  und die vom Modell simulierten  $m_s$  Momente als Vektoren aufzufassen, deren Differenz minimiert werden soll. Dies macht es möglich, die Aufgabenstellung als quadratisches Optimierungsproblem zu beschreiben. Damit lässt sich folgende Zielfunktion  $Z$  definieren:

$$Z(\Phi) = (m_e - m_s(\Phi)) \cdot W \cdot (m_e - m_s(\Phi))' \quad (4.13)$$

- $\Phi$ : Gewählter Parametersatz
- $W$ : Gewichtsmatrix
- $m_e, m_s$ : Empirische bzw. simulierte Momente

Mit der Zielfunktion in (4.13), welche den quadrierten Wert einer gewichteten euklidischen Distanz darstellt, wird nun angegeben, wie stark ein vom Parametersatz  $\Phi$

erzeugter Momentvektor  $m_s$  von den empirisch bestimmten Momenten  $m_e$  abweicht. Vor der eigentlichen Optimierung muss nun noch die Gewichtsmatrix  $W$  in (4.13) spezifiziert werden. Mit dieser Matrix wird der Einfluss einzelner Momente sowie deren mögliche Abhängigkeiten untereinander auf die gesamte Optimierung festgelegt. Daher ist die letztendliche Form der Gewichtsmatrix, ähnlich den gewählten Momenten, substantiell für die anschließende Optimierung, da sich, je nach Wahl der Gewichtsmatrix, das Ergebnis deutlich unterscheiden kann. In der Literatur finden sich deshalb auch verschiedene Ansätze, die Matrix zu konstruieren. Lee und Ingram (1991) und Duffie und Singleton (1993) schlagen hierfür die inverse Kovarianzmatrix der Momente vor. Bei Franke (2009) und Chen und Lux (2018) wird diese über den Newey-West-Schätzer<sup>37</sup> erstellt und zusätzlich noch eine Varianzmatrix<sup>38</sup> verwendet, während in Franke und Westerhoff (2016) eine per Bootstrap erstellte inverse Kovarianzmatrix verwendet wird. Bei Franke und Westerhoff (2012) wird zusätzlich dazu noch eine andere Methode als in (4.13) benutzt, um eine Zielfunktion zu bestimmen. Die Methode beruht darauf, die Zielfunktion stark zu erhöhen, wenn die Momente nicht in ihren vorher festgelegten Bandweiten liegen. Eine weitere alternative Möglichkeit, welche in Franke und Westerhoff (2016) verwendet wird, ist die Verwendung einer binäre Funktion, welche einfach nur betrachtet, ob die simulierten Momente in einer vorher festgelegten Bandbreite um die empirischen Momente liegen. Da in der Literatur weitgehend die inverse Kovarianzmatrix angewendet wird, soll diese auch im Weiteren Verlauf der Thesis zur Optimierung verwendet werden. Außerdem haben Chen und Lux (2018) gezeigt, dass die Methode zur Erstellung der Kovarianzmatrix die Ergebnisse kaum beeinflusst, weswegen hier auf die Methode von Franke und Westerhoff (2016) zurückgegriffen wird, da die Erstellung der Kovarianzmatrix via Bootstrap mit wenig Aufwand verbunden ist.

---

<sup>37</sup>Dies ist ein von Newey und West (1987) erdachter, asymptotischer Schätzer für eine autokorrelations- und heteroskedastizitätskonsistente Kovarianzmatrix.

<sup>38</sup>Diese erhält man durch Weglassen aller nicht diagonalen Elemente der Kovarianzmatrix.

### 4.1.4 Bootstrapping

#### 4.1.4.1 Grundidee

Eine Voraussetzung zur Berechnung der Matrizen in (4.13) ist, dass eine Abschätzung der Varianz bzw. Kovarianz der empirischen Momente vorliegt. Da allerdings für jedes Moment nur eine Beobachtung existiert, muss eine Methode angewandt werden, mit deren Hilfe eben jene Abschätzung der Varianz bzw. Kovarianz erzeugt werden kann. Da keine Verteilungsannahmen über die Beobachtungen oder deren Momente vorliegen, bietet sich hierfür ein Bootstrapping Verfahren an. Im weiteren wird das verwendete Bootstrapping Verfahren genauer erläutert.

#### 4.1.4.2 Moving Block Bootstrap

Da die meisten der verwendeten Momente Kovarianzen bzw. zeitliche Korrelationen aufweisen, welche unter Umständen nicht einfach ignoriert werden können<sup>39</sup>, empfiehlt es sich ein Bootstrapping Verfahren zu wählen, welches diese berücksichtigt. Da das Standardbootstrappingverfahren nach Efron (1979) einzelne Datenpunkte auswählt, um daraus eine neue Zeitreihe zusammenzusetzen, erfüllt es diese Anforderung nicht. Ein alternativer Ansatz dazu ist der Block-Bootstrap nach Hall et al. (1995). Diese Methode beruht darauf, anstatt einzelne Datenpunkte Blöcke auszuwählen, um so Kovarianzen bzw. Autokorrelationen zu erhalten. Dieser Ansatz wurde von Kunsch (1989) zum Moving-Block-Bootstrap Verfahren weiterentwickelt. Grundlage des Verfahrens ist es, eine beliebige Zeitreihe  $x_t$  der Länge  $T$  in Blöcke der Länge  $B$  zu zerlegen, sodass sich  $n = T - B + 1$  überlappenden Blöcke ergeben. Der erste Block vereint also die Datenpunkte von  $t = 1$  bis  $t = B$ , der zweiten die von  $t = 2$  bis  $t = B + 1$  und so weiter. Der Vorteil des Moving-Block-Bootstraps gegenüber dem einfachen Block-Bootstrap<sup>40</sup> ist, dass größere Blocklängen  $B$  gewählt werden können, ohne die Anzahl der möglichen Stichproben stark zu reduzieren<sup>41</sup>.

---

<sup>39</sup>Ziemlich offensichtlich ist das bei dem Moment der Autokorrelation der Fall.

<sup>40</sup>Beim einfachen Block-Bootstrap wird die Zeitreihe einfach in  $n = T/B$  sich nicht überlappende Böcke eingeteilt.

<sup>41</sup>Beim Moving-Block-Bootstrap existieren  $n = T - B + 1$  Blöcke im Gegensatz zu den  $n = T/B$  Blöcken beim einfachen Block-Bootstrapping.

Eine Schwäche des Moving-Block-Bootstraps ist es allerdings, dass Datenpunkte am Anfang und Ende der Zeitreihe in weniger Blöcken enthalten sind als Datenpunkten aus der Mitte der Zeitreihe<sup>42</sup>, was zu einem unerwünschten Bias führen kann. Um dies zu verhindern, wird in dieser Arbeit der Circular-Block-Bootstrap von Politis und Romano (1991, 1994) verwendet. Bei diesem Verfahren wird die Zeitreihe auf einem Kreis definiert, womit auf den letzten wieder der erste Datenpunkt folgt. Damit ist sichergestellt, dass jeder Datenpunkt gleich häufig in den Blöcken vertreten ist. Insgesamt wird so ein Set  $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$  von  $n = T$  überlappenden Blöcken gebildet. Aus diesem Set  $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$  werden anschließend  $T/B$  Blöcke zufällig gezogen, daraus eine neue Zeitreihe zusammengesetzt und deren Momente bestimmt. Dies wird dann so oft wiederholt, bis ausreichend Beobachtungen für die Momente vorliegen, um deren Varianzen bzw. Kovarianzen zu bestimmen.

## 4.2 Optimierung am aktuellen Zeitrund

Nachdem mit der Methode der simulierten Momente eine generelle Schätzung der freien Parameter des Modells erstellt wurde, muss anschließend noch ein Startpunkt bzw. Modellpfad für die VaR-Prognose bestimmt werden. Um eine bessere Anpassung an den aktuellen Zeitrund zu erhalten, können außerdem bestimmte Systemparameter ebenfalls neu geschätzt werden. Die genaue Vorgehensweise dafür und welche Parameter neu bestimmt werden, hängt letztendlich vom jeweiligen Agentenmodell ab, wobei die hier verwendeten Modelle in zwei Optimierungsgruppen eingeteilt werden können. Erstens gibt es Modelle, deren Preise und Renditen größtenteils über deterministische Gleichungen bestimmt werden. Der Zufallsanteil wird bei diesen Modellen hauptsächlich dazu eingeführt, damit kein vollständig deterministisches System vorliegt<sup>43</sup>. Solange dieser Zufallsanteil sich nur auf die Preis- bzw. Renditebestimmung auswirkt, ist es möglich, einen ML Ausdruck als Optimierungsfunktion aufzustellen. In die zweite Kategorie fallen ABM, die keinen deterministischen Kern

<sup>42</sup>Der erste bzw. letzte Datenpunkten ist z.B. nur im ersten bzw. letzten Block vorhanden.

<sup>43</sup>Um diese Modelle zur VaR-Prognose verwenden zu können, muss dieser Zufallsanteil allerdings zusätzlich in der Lage sein, eine variable Volatilität zu generieren.

## 4.2. OPTIMIERUNG AM AKTUELLEN ZEITRAND

besitzen und deren Preise bzw. Renditen größtenteils durch einen Zufallsanteil bestimmt werden. Um diese Modelle anzupassen, eignet sich die SMC-Methode von Lux (2018), wobei es hier allerdings ebenfalls eine Einschränkung gibt. Um ABM mit der SMC-Methode kalibrieren zu können, dürfen keine zeitlich rekursiven Observablen in den versteckten Variablen der ABM enthalten sein. Im Unterschied zur MSM wird hier zur Anpassung keine Simulationen mehr verwendet, sondern der Anfangspunkt bzw. Datensatz gesucht, welcher die Datenpunkte am aktuellen Zeitrand am besten abbildet. Für die eigentliche VaR-Prognose wird das jeweilige Modell dann am gefundenen Anfangspunkt initialisiert bis zum Zeitpunkt der VaR-Prognose in die Zukunft weiter iteriert. An diesem Punkt wird dann der VaR bestimmt.

### 4.2.1 Maximum-Likelihood-Schätzung

Unter der Annahme, dass der größte Einfluss auf die Volatilitätsanpassung der ABM vom sich verändernden Marktanteil und der damit verbundenen variablen Volatilität der Modelle ausgeht, können die Modelle zur Schätzung des Anfangszustands und möglicher zusätzlicher Parameter größtenteils auf ihren Zufallsanteil reduziert werden. Dazu wird der Zufallsanteil vom rein deterministischen Teil isoliert. Damit vereinfacht sich das Optimierungsproblem auf:

$$r_t - D_t(m_t, \Theta) = \sigma_t(m_t, \Theta) \cdot \epsilon_t \quad (4.14)$$

- $r_t$ : Rendite zum Zeitpunkt  $t$
- $D_t$ : Deterministischer Teil des ABM zum Zeitpunkt  $t$
- $\sigma_t$ : Volatilität zum Zeitpunkt  $t$
- $\Theta$  Freier Parametersatz
- $\epsilon_t$ : Unabhängig und identisch verteilte Zufallszahl.

Mit dem Ausdruck in (4.14) konnte die Optimierung auf eine einfache Verteilungsanpassung simplifiziert werden. Das Anpassen einer gegebenen Verteilung an einen Datensatz kann über das ML-Verfahren<sup>44</sup> erfolgen. Für die Datenpunkte eines be-

---

<sup>44</sup>Für den mathematischen Hintergrund des Verfahrens siehe Wilks (1938, 1962).

liebigen vorliegenden Renditedatensatzes<sup>45</sup>  $r = \{r_1, \dots, r_T\}$  wird nun angenommen, dass sie eine zufällige, statistisch unabhängige Stichprobe der Dichtefunktion  $f_D(r)$  darstellen. Mit dem ML-Verfahren wird nun der Parametersatz  $\Theta$  der Dichtefunktion  $f_D(r)$  gesucht, unter dem das Auftreten der Renditen  $r$  am plausibelsten ist. Unter statistischer Unabhängigkeit der Datenpunkte erfüllt diese Anforderung derjenige Parametersatz  $\Theta$ , für den das Produkt der zum Datensatz gehörigen Dichtefunktionswerte maximal wird. Unter Berücksichtigung des Ausdrucks in (4.14) wird also folgende Funktion gesucht:

$$LF(\Theta) = \prod_{t=1}^T f_D(r_t | D_t(m_t), \sigma_t(m_t), \Theta) \rightarrow \max \quad (4.15)$$

- $T$ : Anzahl der empirischen Beobachtungen
- $f_D(r)$ : Dichtefunktion der Rendite  $r$

Durch die Bildung des Produkts der Dichtefunktionswerte ist die Berechnung des Maximums der Likelihood-Funktion oft sehr aufwändig, daher empfiehlt es sich eine Transformation der Likelihood-Funktion vorzunehmen. Da sich durch eine Transformation mittels einer monotonen Funktion die Lage des Maximums nicht ändert, kann theoretisch jede monotone Funktion hierfür verwendet werden. Zur Vereinfachung eines Produkts von Funktionswerten eignet sich jedoch besonders der Logarithmus, durch den sich das Produkt der Dichtefunktionswerte in eine Summe transformieren lässt<sup>46</sup>. Die zu maximierende Funktion nimmt also folgende Form an:

$$LLF(\Theta) = \sum_{t=1}^T \log[f_D(r_t | D_t(m_t), \sigma_t(m_t), \Theta)] \rightarrow \max \quad (4.16)$$

Der Ausdruck in (4.16) wird als Log-Likelihood-Funktion bezeichnet. Die einzig unbekannte Größe in (4.16) ist damit noch die Dichtefunktion der Zufallsvariable  $\epsilon$ , diese wird allerdings vom jeweiligen Agentenmodell bereits vorgegeben<sup>47</sup> und kann

<sup>45</sup>Allgemeiner kann das ML-Verfahren natürlich auch für beliebige andere Datensätze verwendet werden und ist nicht nur auf Renditen beschränkt.

<sup>46</sup>Ein weiterer Vorteil des Logarithmus ist, dass sich für eine analytische Bestimmung seine Ableitungen recht einfach bilden lassen. Ein Beispiel hierfür ist auch der Hill-Schätzer in (4.8).

<sup>47</sup>Bei den meisten Agentenmodellen ist  $\epsilon$  eine normalverteilte Zufallsgröße, andere Verteilungsfunktionen kommen aber in der Literatur ebenso, wenn auch seltener vor.

## 4.2. OPTIMIERUNG AM AKTUELLEN ZEITRAND

von daher schlicht in (4.16) eingesetzt werden. Für eine normalverteilte Zufallsgröße ergibt sich damit die Zielfunktion<sup>48</sup>:

$$\begin{aligned} LLF(r_t|D_t(m_t), \sigma_t(m_t), \Theta) = & -\frac{1}{2} \left[ \log(2\pi) + \sum_{t=1}^{t=T} \log(\sigma_t^2(m_t)) \right] \\ & - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left( \frac{r_t - D_t(m_t)}{\sigma_t(m_t)} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Um die jeweilige Zielfunktion in (4.17) letztendlich aufzustellen, wird der Marktanteil  $m_t$  und daraus die Volatilität  $\sigma_t$  zum Zeitpunkt  $t = 1$  bestimmt. Mit der Volatilität  $\sigma_{t=1}$  und der empirischen Rendite  $r_{t=1}$  kann dann der Zielfunktionswert bestimmt werden. Dies wird iterativ so lange fortgesetzt, bis der Endpunkt des Zeitfensters  $t = T$ , welcher hier bei  $T = 200$  Zeitschritten liegt, erreicht ist. Im Anschluss daran wird die Summer aller Zielfunktionswerte gebildet, welche letztendlich maximiert werden soll. Anzumerken ist hier noch, dass diese Methode nur anwendbar ist, wenn der Marktanteil des ABM keinen Zufallsanteil enthält<sup>49</sup>, da sich ansonsten die ML-Funktion in (4.16) nicht aufstellen lässt. Auch für dieses Problem wird noch eine Heuristik zum Auffinden des Minimums benötigt, wobei dieselbe Heuristik verwendet werden soll, welche bereits bei der Methode der simulierten Momente eingesetzt wird.

### 4.2.2 Sequenzielle-Monte-Carlo-Schätzung

Dadurch, dass die Standard ML-Methode nur angewendet werden kann, wenn der Marktanteil in (4.14) deterministisch ist, muss für ABM mit zufallsgetriebenem Marktanteil eine alternative Schätzmethode verwendet werden, da bei diesen eine Herauslösung des Zufallseinflusses aus dem Marktanteil im Allgemeinen nicht möglich ist. Eine Methode, welche bei dieser Art von ABM angewendet werden kann, ist die SMC-Schätzung von Lux (2018). Die Anwendung der SMC-Schätzung unterliegt

---

<sup>48</sup>In dieser Thesis haben alle ABM, bei denen das ML-Verfahren angewendet wird, eine normalverteilte Zufallsgröße. Die Binär-, Gleich- und t-Verteilung finden nur beim Modell von Lux et al. (2005) Anwendung. Dieses ABM wird allerdings mit einer anderen Methode an den aktuellen Zeitrand angepasst.

<sup>49</sup>Genauer gesagt kann durchaus anfangs ein Zufallsanteil im Marktanteil vorhanden sein, solange er durch Umstellung aus diesem herausgelöst werden kann.

aber gewissen Restriktionen. Erstens muss das zu schätzende ABM aus einer Observable und einer versteckten Variable bestehen, wobei die Observable normalerweise die Rendite oder der Preis<sup>50</sup> ist und die versteckte Variable durch den Marktanteil dargestellt wird. Dies an sich ist noch keine allzu restriktive Anforderung, da diese Struktur bei einfachen ABM sehr verbreitet ist. Die zweite Restriktion ist, dass die zu schätzenden ABM folgende Form aufweisen müssen<sup>51</sup>:

$$\begin{aligned} m_t &= f(m_{t-1}, \eta_t) \\ r_t &= g(m_t, \epsilon_t) \end{aligned} \tag{4.18}$$

- $f, g$ : Beliebige stochastische Prozesse
- $\eta, \epsilon$ : Zufallsvariablen

Aus (4.18) ist nun auch die Hauptrestriktion dieses Ansatzes ersichtlich. Der Marktanteil des ABM darf nur von seinen früheren Ausprägungen und nicht von der Rendite oder verwandten Observablen abhängen. Dies bedeutet, dass die Rendite nur eine zufallsverzehrte Ausprägung eines unbeobachtbaren Marktanteils ist. Auf den Großteil von ABM trifft diese Restriktion allerdings nicht zu<sup>52</sup>, da Ausprägungen vergangener Renditen bzw. Preise häufig die Strategieentscheidung von Agenten beeinflussen. Grundlage der SMC-Schätzung ist die Aufstellung einer Likelihood-Funktion. Sei  $\Theta$  der Vektor der Modellparameter, dann ergibt sich für die Likelihood-Funktion:

$$LF(\Theta) = f_D(r_1, \dots, r_T | \Theta) = f_D(r_1 | \Theta) \prod_{t=2}^T f_D(r_t | r_{t-1}, \Theta) \tag{4.19}$$

- $f_D(r_1 | \Theta)$ : Dichtefunktion der ersten Rendite  $r_1$  gegeben  $\Theta$
- $f_D(r_t | r_{t-1}, \Theta)$ : Dichtefunktion der  $t$ -ten Rendite  $r_t$  gegeben  $r_{t-1}$  und  $\Theta$

---

<sup>50</sup>Für die in dieser Thesis vorgestellten ABM von Lux et al. (2005) und Alfarano et al. (2008) ist die Rendite die Observable.

<sup>51</sup>Diese gilt natürlich auch im Allgemeinen für ABM mit einer beliebigen Anzahl von Observablen und beliebiger Anzahl an versteckten Variablen.

<sup>52</sup>Andererseits ist es bei diesem Ansatz, anders als beim ML-Verfahren, eine Vereinfachung auf einfache Systemgleichung keine Voraussetzung, sodass auch ABM mit Interaktionen angepasst werden können.

## 4.2. OPTIMIERUNG AM AKTUELLEN ZEITRAND

Um die Renditedichtefunktion  $f_D(r_t|r_{t-1}, \Theta)$  in (4.19) zu bestimmen, kann nun der SMC-Ansatz verwendet werden. Mit der SMC-Methode, lassen sich Wahrscheinlichkeitsdichten schätzen, die nicht analytisch bestimmbar sind. Dazu wird die Wahrscheinlichkeitsdichte durch eine große Anzahl diskreter Punkte bzw. Partikel approximiert, weshalb die SMC-Methode auch unter dem Namen Partikelfilter bekannt ist. Da die Rendite in (4.18) zum Zeitpunkt  $t$  nur vom Marktanteil  $m_t$  und einer Zufallsvariable abhängt, lässt sich die Renditedichtefunktion  $f_D(r_t|r_{t-1}, \Theta)$  folgendermaßen durch ein Set von Marktanteilspartikeln approximieren:

$$f_D(r_t|r_{t-1}, \Theta) \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M f_D(r_t|m_t^i) \quad (4.20)$$

- $M$ : Anzahl der Marktanteilspartikel
- $m_t^i$ :  $i$ -tes Marktanteilspartikel zum Zeitpunkt  $t$

Für eine normalverteilte Zufallsgröße ergibt sich damit:

$$\log[f_D(r_t|m_t^i)] = -\frac{1}{2} \left[ \log(2\pi) + \sum_{t=1}^{t=T} \log(\sigma_t^2(m_t^i)) + \sum_{t=1}^T \left( \frac{r_t}{(\sigma_t(m_t^i))} \right)^2 \right] \quad (4.21)$$

Für die binäre Verteilung gilt:

$$\log[f_D(r_t|m_t^i)] = -T \log(2) + \sum_{t=1}^T \log(\sigma_t(m_t^i)) \quad (4.22)$$

Für eine Gleichverteilung ergibt sich:

$$\log[f_D(r_t|m_t^i)] = -T \log(2) - \sum_{t=1}^T \log(\sigma_t(m_t^i)) \quad (4.23)$$

Für eine t-verteilte Zufallsgröße folgt schließlich:

$$\begin{aligned} \log[f_D(r_t|m_t^i)] = & T \left[ \log \left( \Gamma \left( \frac{n+1}{2} \right) \right) - \log \left( \Gamma \left( \frac{n}{2} \right) \right) - \log(\pi(n-2)) \right] \\ & - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[ \log(\sigma_t^2(m_t^i)) + (n+1) \log \left( 1 + \frac{r_t^2}{\sigma_t^2(m_t^i) \cdot (n-2)} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.24)$$

- $n$ : Freiheitsgrad der t-Verteilung
- $\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} \exp(-t) dt$ : Gamma-Funktion

Um die Wahrscheinlichkeitsdichte in (4.20) möglichst genau zu bestimmen, ist es essenziell Marktanteilspartikel zu verwenden, welche sich für jeden Zeitpunkt  $t$  im Bereich von hohen Dichtewerten befinden. Um dies zu erreichen, kann die rekursive Struktur des Marktanteils in (4.18) verwendet werden. Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsdichte der ersten Renditebeobachtung  $f_D(r_1|\Theta)$ , können Partikel aus der stationären Marktanteilverteilung gezogen und deren Likelihoodwerte berechnet werden. Sollte die stationäre Marktanteilsverteilung des ABM nicht analytisch auffindbar sein, so sind die Startpartikel auch per Simulation bestimmbar. Dazu wird das jeweilige ABM so lange iteriert, bis sich ein stationärer Zustand eingestellt hat und die so simulierten, stationären Marktanteilausprägungen dann als Partikel verwendet. Nach der Approximation in (4.20) wird aus den so bestimmten Partikel dann der Anfangswert der Likelihood-Funktion  $f_D(r_1|\Theta)$  in (4.19) bestimmt. Für das weitere Vorgehen muss allerdings berücksichtigt werden, dass die aus der stationären Verteilung gezogenen Partikel nicht mit äquivalenter Wahrscheinlichkeit die erste Renditebeobachtung erklären und somit für die weitere Iteration des ABM nicht gleichwertig verwendet werden sollten. Um dies zu berücksichtigen, wird eine individuelle Auftrittswahrscheinlichkeit konstruiert, indem jedes Partikel mit seinem Likelihood-Wert gewichtet und normiert wird.

$$W(m_t^i) = \frac{f_D(r_t|m_t^i)}{\sum_{i=1}^M f_D(r_t|m_t^i)} \quad (4.25)$$

Mit den Wahrscheinlichkeiten in (4.25) wird dann durch Ziehen mit Zurücklegen ein neues Set von Partikeln generiert. Dies stellt sicher, dass Marktanteilspartikel mit hoher Eintrittswahrscheinlichkeit häufiger im neuen Set vertreten sind. Danach wird durch die Iteration des zu optimierenden ABM nach (4.18) für jedes Partikel ein neuer Marktanteilszustand erzeugt und der Optimierungsprozess für den nächsten Zeitschritt beginnt. Insgesamt ergibt sich daraus folgender Algorithmus für die SMC-Schätzung:

1. Generiere zufällig  $M$  Partikel aus der stationären Verteilung des Marktanteils

### 4.3. OPTIMIERUNGSHEURISTIKEN

$m_t$  zum Zeitpunkt  $t = 1$  und bestimme die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsdichten  $f_D(r_{t=1}|m_{t=1}^{i=1}), \dots, f_D(r_{t=1}|m_{t=1}^{i=M})$ .

2. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Marktanteilsartikel nach (4.25) und generiere eine Anzahl von  $M$  neuen Marktanteilspartikeln  $m_{t=1}^{i=1}, \dots, m_{t=1}^{i=M}$  basierend auf diesen Wahrscheinlichkeiten.
3. Bilde aus  $m_{t=1}^{i=1}, \dots, m_{t=1}^{i=M}$  eine Anzahl von  $M$  neuen Marktanteilen  $m_{t+1}^{i=1}, \dots, m_{t+1}^{i=N}$  durch Iteration des stochastischen Prozesses nach (4.18).
4. Wiederhole die Schritte 2-3 bis für alle Zeitpunkte  $t \in 2, \dots, T$ .

Anschließend wird aus (4.19) der logarithmische Optimierungswert des Parametersatzes  $\Theta$  gebildet, welcher schließlich maximiert werden soll.

$$LLF(\Theta) = \log[f_D(r_1|\Theta)] + \sum_{t=2}^T \log[f_D(r_t|r_{t-1}, \Theta)] \rightarrow \max \quad (4.26)$$

Zur Bestimmung des Maximums von (4.26) soll wieder dieselbe Heuristik wie bei den vorherigen Optimierungen eingesetzt werden.

## 4.3 Optimierungsheuristiken

### 4.3.1 Grundidee

Im letzten Schritt braucht es noch eine effektive Heuristik, die in der Lage ist, ein robustes Minimum sowohl für die in (4.13) definierte MSM Zielfunktion als auch für die Zielfunktionen der Optimierung am aktuellen Zeitrant in (4.16, 4.26) zu finden. Des Weiteren sollte die Heuristik eine nicht allzu lange Laufzeit haben, da die in dieser Thesis verwendeten Optimierungsmethoden teilweise sehr zeitintensiv sind. Optimal wäre es natürlich eine Optimierungsheuristik zu haben, welche das globale Minimum auffindet, allerdings ist das bei der hohen Parameteranzahl sowie deren sehr weitem Definitionsbereich äußerst unwahrscheinlich. Daher genügt es, auch aus Laufzeitgründen, wenn die Heuristik in der Lage ist, ein robustes lokales Minimum

zu finden. In der Literatur ist die Frage nach der optimalen Optimierungsheuristik zur Kalibrierung von Agentenmodellen mit der Methode der simulierten Momente eine noch unbeantwortete Frage. Viele Anwendungen dieser Methode benutzen das Downhill-Simplex-Verfahren von Nelder und Mead (1965)<sup>53</sup>. Dies ist ein lokales Optimierungsverfahren, welches den Vorteil hat, dass es nicht sehr zeitaufwändig ist und trotzdem zuverlässig ein robustes Minimum auffindet. Der Nachteil des Verfahrens ist allerdings, dass das aufgefundene Minimum sehr stark vom Anfangspunkt der Optimierung abhängt. Dies wird in den bisherigen Anwendungen meist dadurch umgangen, indem ein aus der Literatur bekannter Startparametersatz gewählt und das Downhill-Simplex-Verfahren nach Ende einer Optimierung mehrfach vom jeweils gefundenen Punkt neu gestartet wird. Da sich in dieser Arbeit allerdings die unterliegenden Datenreihen stark ändern, kann dieser Ansatz nicht so ohne Weiteres übernommen werden. Es existiert einfach kein universaler Startparametersatz, der für alle Datenreihen als guter Ausgangspunkt angesehen werden kann. Daher ist es nötig ein globales Optimierungsverfahren anzuwenden. Dafür soll hier ein Partikelschwarm-Algorithmus verwendet werden. Der Grund für die Wahl des Partikelschwarms und nicht des genetischen Algorithmus ist, dass dieses Verfahren ähnlich gute Ergebnisse bei weniger Rechenaufwand liefert<sup>54</sup>. Des Weiteren gibt es beim Partikelschwarm Verfahren weniger Implementationsmöglichkeiten<sup>55</sup> als beim genetischen Algorithmus, was die Wahl eines Standardverfahrens einfacher macht. Des Weiteren existiert auch noch die Möglichkeit, ein globales mit einem lokalen Optimierungsverfahren zu kombinieren. Tatsächlich ist eine solche Kombination bei verschiedenen Anwendungen schon recht erfolgreich getestet worden. So zeigen einige Studien, dass hybride Methoden aus genetischen Algorithmen und weiteren lokalen Optimierungsmethoden den einzelnen Verfahren überlegen sind<sup>56</sup>. Chelouah und Siarry (2003) stellen

---

<sup>53</sup>Siehe Gilli und Winker (2003), Winker et al. (2007), Franke (2009), Franke und Westerhoff (2012), Franke und Westerhoff (2016).

<sup>54</sup>Siehe z.B. Hassan et al. (2005), Panda und Padhy (2008)

<sup>55</sup>Insgesamt gibt es drei Parameter und die Topologie des Schwarms welche festgelegt werden müssen. Siehe Jordehi et al. (2013) für eine Übersicht von Vorteilen und Implementationsmöglichkeiten des Partikelschwarm Verfahrens.

<sup>56</sup>Siehe zu diesem Thema z.B. Durand und Alliot (1999), Fan et al. (2006). Für eine Übersicht über verschiedene hybride Methoden auf Basis von genetischen Algorithmen siehe El-Mihoub et al.

### 4.3. OPTIMIERUNGSHEURISTIKEN

ein Verfahren vor, welches mittels des genetischen Algorithmus eine vielversprechende Startposition für den Simplex sucht. Vergleiche mit anderen globalen und lokalen Verfahren an einundzwanzig Testfunktionen zeigen, dass meist gleiche oder bessere Ergebnisse bei weniger Laufzeitaufwand erreicht werden. Das Laufzeitproblem des genetischen Algorithmus sowie das Anfangswertproblem des Nelder-Mead-Simplex-Verfahrens werden somit durch den hybriden Algorithmus überwunden. Auch der Partikelschwarm-Algorithmus wurde schon in Verbindung mit dem Nelder-Mead-Simplex-Verfahren verwendet<sup>57</sup>. Fan et al. (2004) testen ein hybrides Simplex- und Partikelschwarm-Verfahren anhand einiger Testfunktionen und vergleichen die Ergebnisse mit denen anderer Standardverfahren und dem hybriden Verfahren von Chelouah und Siarry (2003). Es zeigt sich, dass der hybride Partikelschwarm das beste Verfahren für die getesteten Funktionen ist und entweder gleiche Ergebnisse bei kürzerer Laufzeit hat oder eine längere Laufzeit aufweist, dafür aber bessere Ergebnisse liefert. Wie sich allerdings herausgestellt hat, führt für die Anwendung in dieser Thesis das Hinzufügen eines lokalen Optimierungsverfahrens zu keinen signifikanten Verbesserungen, weshalb im Weiteren nur der Partikelschwarm-Algorithmus als Heuristik verwendet werden soll.

#### 4.3.2 Partikelschwarm-Verfahren

Wie der genetische Algorithmus, dessen grundlegende Idee erstmals von Turing (1950) publiziert wurde, basiert der Partikelschwarm-Algorithmus auf einem in der Natur zu beobachtenden Prozess. Mit dem Ansatz von Kennedy und Eberhart (1995) wird versucht, ein Optimierungsproblem mithilfe eines Schwarmverhaltens einzelner Individuen zu lösen. Die Idee dahinter ist, dass sich Individuen zur Lösung von Problemen in einem Schwarm organisieren und ihre individuellen Lösungen durch Kommunikation den Mitgliedern des Schwarms mitteilen. Dadurch werden gute, individuelle Lösungen an die Mitglieder des Schwarms weitergegeben. Dies geschieht so lange, bis der Schwarm bei einer letztendlich gemeinsamen Lösung konvergiert. Grundlage des

---

(2006)

<sup>57</sup>Siehe hierzu z.B. Fan et al. (2006).

Algorithmen sind also die gegenseitigen Wechselwirkungen einzelner Individuen mit dem Schwarm. Sei  $x_t^i$  die Position des Individuums  $i$  im Vektorraum der freien Parameter  $\Phi$  zum Zeitpunkt  $t$  und  $v_{t+1}^i$  die Änderung, welche  $x_t^i$  in  $x_{t+1}^i$  transformiert. Zusammen ergibt sich dann folgendes von Shi und Eberhart (1998) eingeführtes Gleichungssystem<sup>58</sup>:

$$x_{t+1}^i = x_t^i + v_{t+1}^i \quad (4.27)$$

$$v_{t+1}^i = wv_t^i + c_1 \text{rand}() (p_b^i - x_t^i) + c_2 \text{rand}() (p_b^n - x_t^i) \quad (4.28)$$

- $w, c_1, c_2$ : Optimierungsparameter
- $p_b^i$ : Beste eingenommene Position des Individuums  $i$
- $p_b^n$ : Beste Position in der Nachbarschaft des Individuums  $i$
- $\text{rand}()$ : Zufallszahl aus dem Intervall  $(0, 1)$

Die Parameter in (4.28) bestimmen dabei insgesamt die Geschwindigkeit der Konvergenz des Schwarms. Der Parameter  $w$  ist ein Gewichtungsfaktor, der den Einfluss der letzten Änderung auf neue Veränderungen beschreibt. Je größer  $w$  ist, desto explorativer bewegt sich das Individuum im Parameterraum. Durch Parameter  $c_1$  und  $c_2$  konvergiert das Individuum zur bisher besten Position, die es einmal eingenommen hat bzw. der besten Position, auf der sich ein Nachbar des Individuums befindet. Offensichtlich führen hier kleine Parameter  $c_1, c_2$  zu einem explorativeren Verhalten im Parameterraum, während größere Parameter eine schnellere Konvergenz zur Folge haben. Neben den Parametern  $w, c_1, c_2$  ist auch die Topologie des Schwarms untereinander ein weiterer Faktor, welcher die Optimierung stark beeinflusst. Hierfür existieren bereits eine große Menge möglicher Strukturen<sup>59</sup>. Unter allen Varianten sind die sogenannten "global topology"  $g_{best}$ <sup>60</sup> und "local topology"  $l_{best}$ <sup>61</sup>

<sup>58</sup>Dies ist in der Literatur unter dem Namen Inertia Weight Formel bekannt.

<sup>59</sup>So wurden unter anderem die Von Neumann Nachbarschaft (Gitter), eine Pyramidenstruktur, eine Sterntopology, verschiedene Zufallsgraphen und kleine Welt Netze nach Watts und Strogatz (1998) von Kennedy und Mendes (2002) getestet.

<sup>60</sup>Diese Topologie entspricht einem vollständig verknüpften Graphen.

<sup>61</sup>Dies wurde zusammen mit der Partikelschwarm Optimierung von Kennedy und Eberhart (1995) publiziert und entspricht einem Ring, auf dem jedes Individuum zwei Nachbarn hat.

### 4.3. OPTIMIERUNGSHEURISTIKEN

die am häufigsten benutzten. Verallgemeinert kann man sagen, dass je stärker vernetzt die Topologien sind, desto schneller fokussiert sich der Schwarm, was aber auch die Gefahr birgt, nicht aus mehr lokalen Minima herauszukommen<sup>62</sup>. Umgekehrt sorgen schwach vernetzte Topologien dafür, dass der Parameterraum besser durchsucht wird, was wiederum die Laufzeit erhöht<sup>63</sup>.

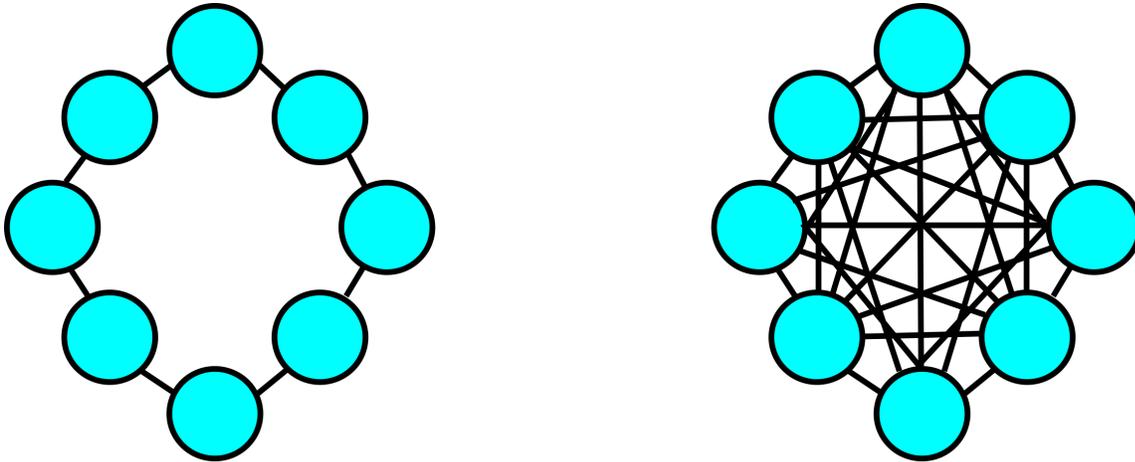


Abbildung 4.1: Grafische Darstellung der  $l_{best}$  Topologie (links) und  $g_{best}$  Topologie (rechts).

Es bleibt zu klären, welche Einstellungen sich nun für eine Optimierung eines Agentenmodells am besten eignen. Bei den Parametern  $w$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  werden in der Literatur die Werte  $w = 0.72984$ ,  $c_1 = c_2 = 1.4962$  als Standard vorgeschlagen, da sie bei den meisten Problemstellungen zufriedenstellende Ergebnisse liefern<sup>64</sup>. Bei der Topologie ist die beste Wahl nicht so einfach zu finden. Verschiedene Quellen zeigen, dass stärker vernetzte Topologien im Vergleich schlechter abschneiden als Topologien mit wenigen Nachbarn. So zeigen z.B. Kennedy und Mendes (2002), dass die  $g_{best}$  und die Sterntopologie mit am schlechtesten abschneiden und auch die zufälligen Graphen mit einer geringen Konnektivität besser performen. Auch wenn erste Tests sugge-

<sup>62</sup>Siehe z.B. Kennedy und Mendes (2002)

<sup>63</sup>Siehe z.B. Kennedy und Mendes (2002)

<sup>64</sup>Siehe z.B. Shi und Eberhart (1999), Eberhart und Shi (2000), Kennedy und Mendes (2002), Poli et al. (2007) und Bratton und Kennedy (2007).

rieren, dass auch die  $l_{best}$  Topologie alles andere als optimal ist<sup>65</sup>, so zeigen spätere Tests, dass die  $l_{best}$  Topologie mit einer erweiterten Form des Algorithmus bei den meisten Standardproblemen zufriedenstellende Ergebnisse liefert<sup>66</sup>. Da es sich nicht ad-hoc klären lässt, welche der möglichen Topologien nun für ein Agentenmodell am besten geeignet ist, gibt es zu den vielen Möglichkeiten einer festgelegten auch die Alternative eine adaptive Topologie zu verwenden<sup>67</sup>.

Im Weiteren wird der verwendete Partikelschwarm-Algorithmus genauer erläutert. Als erster Schritt erfolgt die Initialisierung des Systems nach:

- Bestimme<sup>68</sup> die Anfangspositionen  $x_0$  und Geschwindigkeiten  $v_0$ <sup>69</sup> der einzelnen Individuen  $i$

$$x_0^i = (x_{Max} - x_{Min})rand() + x_{Min} \quad (4.29)$$

$$v_0^i = 2(x_{Max} - x_{Min})rand() - (x_{Max} - x_{Min}) \quad (4.30)$$

- $x_{Max}$ ,  $x_{min}$  maximale bzw. minimaler Wert des Positionsvektors  $x$
- $rand()$  Zufallszahl uniform verteilt im Intervall  $[0, 1]$

- Die Parameter sind dabei die Standardparameter

$$w = 0.72984 \quad (4.31)$$

$$c_1 = c_2 = 1.4962 \quad (4.32)$$

- Starte mit der  $l_{best}$  Topologie

Die Bestimmung der genauen Grenzen  $x_{Max}$ ,  $x_{Min}$  ist abhängig vom jeweiligen Parametersatz des verwendeten Modells und setzt daher Kenntnisse über das System-

<sup>65</sup>Im Test von Kennedy und Mendes (2002) schneidet  $l_{best}$  noch mit am schlechtesten ab.

<sup>66</sup>Vergleiche Bratton und Kennedy (2007), welche die  $l_{best}$  Topologie sogar als Standard vorschlagen. Dies gilt vor allem, je höher die Anzahl der freien Parameter wird, da hier die Gefahr größer wird, dass die  $g_{best}$  Topologie frühzeitig in ein suboptimales lokales Minimum gerät.

<sup>67</sup>Eine sich selbst optimierende Topologie wurde bereits von Suganthan (1999) diskutiert.

<sup>68</sup>Eine uniforme Verteilung für beide wird als Standard angesehen, siehe z.B. Clerc (2010).

<sup>69</sup>Die Geschwindigkeit muss nach Eberhart und Shi (2001) dabei endliche Grenzen  $[v_{Max}, v_{Min}]$  aufweisen, da sie sonst durch Oszillationen immer größer werden kann. Die Werte dafür sind hier  $v_{Max} = x_{Max} - x_{Min}$  und  $v_{Min} = -v_{Max}$ .

### 4.3. OPTIMIERUNGSHEURISTIKEN

verhalten der Agentenmodelle voraus. Das Update der Position und Geschwindigkeit der Partikel zum Zeitpunkt  $t$  erfolgt nach:

1. Wähle eine zufällige Anzahl  $1 \leq m \leq n$  der aktuellen Nachbarn aus
2. Bestimme die beste Position  $p_b^n$  der ausgewählten Nachbarn  $m$  und update Position und Geschwindigkeit nach (4.28)
3. Berechne die Zielfunktion  $Z(x_t^i)$  der neuen Stelle
4. Ist  $Z(x_t^i) < Z(p_b^i)$  setze  $p_b^i = x_t^i$

Sollte beim Update die Position des Partikels außerhalb von  $x_{Max}$ ,  $x_{Min}$  sein, so werden diese vor der Ausführung des dritten Schrittes korrigiert, indem die Position des Partikels auf diese Grenze gesetzt wird. Zuletzt müssen noch die Regeln zur adaptiven Topologie spezifiziert werden. Dazu ist es nötig, die bis zum Zeitpunkt  $t - 1$  beste Position  $p_b$  des gesamten Partikelschwarms zu definieren. Abhängig von diesem wird nun die Topologie aktualisiert.

1. Vergleiche die Funktionswerte  $Z(x_t^i)$  und  $Z(p_b)$  und ändere je nach Zusammenhang die Anzahl der Nachbarn von  $i$ .
2. Sollte  $Z(x_t^i) < Z(p_b)$  setze  $n = 2$
3. Sonst setze  $n = n + 2$  bis maximal  $n = N$

Diese zufällige adaptive Topologie von Clerc (2010) sorgt dafür, dass nach jeder fehlgeschlagenen Iteration die Anzahl der potenziellen Nachbarn erhöht und bei jeder erfolgreichen wieder auf die Minimalanzahl gesetzt wird. Damit verbindet der Algorithmus die Vorteile der  $g_{best}$  und  $l_{best}$  Topologien. Zuletzt ist nur noch die Zahl der Partikel und ein Abbruchkriterium zu spezifizieren. Als ausreichende Anzahl der Partikel wird für die meisten Probleme bei 40-50<sup>70</sup> angegeben. Allerdings hat sich

---

<sup>70</sup>Siehe Bratton und Kennedy (2007), Clerc (2010), Zambrano-Bigiarini et al. (2013). Nach Zambrano-Bigiarini et al. (2013) ist die Zahl von 40 Partikeln zu klein für hochdimensionale Probleme mit einer Dimension  $d > 30$ . Allerdings ist das hier kein Problem, da die Parameteranzahl der Modelle immer deutlich kleiner als  $d = 30$  ist.

im Laufe der Thesis gezeigt, dass dies für das hier vorliegende MSM-Problem nicht ausreichend ist und eine Anzahl von 200 Partikel bessere und stabilere Optimierungsergebnisse liefert. Eine weitere Erhöhung der Partikelanzahl ist zwar in der Lage, die diese Ergebnisse noch zu verbessern, allerdings sind diese Verbesserungen zu gering um die deutlich erhöhte Laufzeit zu rechtfertigen. Für das ML-Verfahren wurde eine ähnliche Anzahl von Partikeln verwendet, wobei jedoch die schlechtesten  $p = 0.1$  Ergebnisse der MSM-Optimierung nicht berücksichtigt wurden, was insgesamt einer Partikelanzahl von 180 entspricht. Nur beim SMC-Verfahren wurde die Anzahl der Partikel aus Laufzeitgründen deutlich auf 20 reduziert. Das Abbruchkriterium zu spezifizieren ist nicht so trivial, da es maßgeblich vom Problem und Ziel der Optimierung abhängt. Weil das Ziel hier die Suche nach einem geeigneten Startpunkt zur weiteren Optimierung ist, sollte ein Abbruchkriterium eine ausreichende Anzahl von Iterationen des Partikelschwarm-Algorithmus sein. Ausreichend bedeutet in diesem Fall, dass sie groß genug sein muss um den Parameterraum effektiv zu durchsuchen, ohne dabei die Laufzeit zu stark zu erhöhen. Im Weiteren werden 100 Iterationen<sup>71</sup> verwendet, was mit der Anzahl von 200 Partikeln insgesamt 20000 Funktionsevaluierungen<sup>72</sup> entspricht. Ein weiteres Abbruchkriterium ist eine Nichtverbesserung des Zielfunktionswertes um einen Wert von  $0.1$ <sup>73</sup> nach 20 Iterationen des Partikelschwarms. Dies deutet nämlich darauf hin, dass ein Bereich um ein robustes Minimum gefunden wurde. Das Abbruchkriterium wird für die Optimierung am aktuellen Zeitrand nicht verändert.

---

<sup>71</sup>Es hat sich gezeigt, dass diese Anzahl an Iterationen für die MSM-Schätzung in dieser Thesis eine ausreichende Genauigkeit aufweist.

<sup>72</sup>Bei der ML- bzw. SMC-Optimierung ergeben sich analog 18000 bzw. 2000 Evaluierungen der Zielfunktion.

<sup>73</sup>Dieser Wert ist an die Genauigkeiten der Zielfunktionen in dieser Thesis angepasst.

# Kapitel 5

## Auswertungskriterien

In diesem Kapitel werden die zur Auswertung der Modelle vorgenommenen Schritte erläutert. Da die MSM-Kalibrierung und die VaR-Prognose unterschiedliche Ziele verfolgen, werden dafür auch unterschiedliche Auswertungskriterien herangezogen. Diese werden in den jeweiligen Unterkapiteln genauer beschrieben.

### 5.1 Modellkalibrierung

Bevor die Auswertung der ABM erfolgen kann, muss geprüft werden, ob die gewählten Momente für die MSM geeignet sind. Nach Grazzini und Richiardi (2015) ist eine entscheidende Bedingung für die MSM, dass die simulierten Momente stationär<sup>1</sup> und ergodisch<sup>2</sup> sind. Beide Bedingungen werden durch Anwendung des Wald und Wolfowitz (1940) Tests auf die von den ABM erzeugten Momente geprüft. Die Stationarität gewährleistet, dass die Momente der ABM zum Gleichgewicht konvergieren. Andernfalls ist ein bestimmtes Moment für die weitere Analyse nicht geeignet. Um die Stationaritätshypothese zu testen, wird eine lange Zeitreihe simuliert und diese nach Verwerfen einer Übergangsperiode in viele kleinere Fenster unterteilt.

---

<sup>1</sup>Stationarität bedeutet, dass die Dichteverteilung eines Prozesses gegenüber einer Verschiebung invariant ist und damit die Momente des Prozesses konstant sind.

<sup>2</sup>Ergodizität liegt vor, wenn ein System asymptotisch unabhängig ist. Dies bedeutet, dass ein ergodisches System nicht vom Anfangszustand abhängt.

Dann werden die Momente der vollständigen Zeitreihe und der kleineren Fenster bestimmt. Im Falle der Stationarität sollten die Momente der kleineren Fenster zufällig um die Momente der gesamten Zeitreihe verteilt sein. Um ein eindeutiges Gleichgewicht zu gewährleisten muss, unter der Annahme, dass ein Moment stationär ist, anschließend auch auf Ergodizität getestet werden. Dazu wird wieder, nachdem eine Übergangsperiode verworfen wurde, eine lange Zeitreihe erstellt und in eine Anzahl kleinerer Fenster  $g$  unterteilt. Als Nächstes wird die gleiche Anzahl kleinerer Fenster  $h$  erstellt, wobei für jedes Fenster ein andere Zufallsseed verwendet wird. Im Anschluss werden die Momente für alle Fenster  $g$  und  $h$  berechnet. Anschließend wird eine Vereinigung  $u$  aller Momente gebildet und in aufsteigender Reihenfolge sortiert. Im Falle der Ergodizität sind die Momente von  $g$  und  $h$  zufällig in der Vereinigung  $u$  verteilt. Zur Durchführung des Stationaritätstest, wird in Anlehnung an Grazzini (2012) und Ji et al. (2019) eine Zeitreihe mit  $T = 1.000.000$  Datenpunkten simuliert und in  $W = 1.000$  Fenster der Länge  $L = 1.000$  unterteilt. Der Ergodizitätstest wird ebenfalls mit  $T = 1.000.000$  Datenpunkten durchgeführt, die in  $W = 1.000$  Fenster ( $g$ ) der Länge  $L = 1.000$  unterteilt werden. Zusätzlich werden  $S = 1.000$  Zeitreihen ( $h$ ) der Länge  $L = 1.000$  simuliert, die mit unterschiedlichen Zufallsseeds initialisiert werden<sup>3</sup>. Stationarität und Ergodizität müssen für alle Momente jeder ABM-Variante einzeln getestet werden. Anschließend werden zur Bestimmung der Güte des Modells zwei Kriterien herangezogen. Das Erste zu testende Kriterium ist, wie sich die Zielfunktion unter der Änderung einzelner Parameter verhält. Dazu werden die Parameter jeweils schrittweise auf  $0.1 \Phi_i$  verringert bzw. auf  $10 \Phi_i$  erhöht<sup>4</sup>. Durch einen Vergleich, der die Änderungen einer Parameterverschiebung auf die Zielfunktion untersucht, soll festgestellt werden, welche Parameter des Modells besonders relevant sind<sup>5</sup>. Sollten Parameter nicht oder kaum relevant sein, so können sie möglicherweise ganz aus dem Modell entfernt werden. Außerdem kann dadurch geprüft werden, ob am Ende der Optimierung zumindest ein lokales Minimum erreicht werden konnte. Dies lässt sich leicht feststellen, da in dem Fall jed-

---

<sup>3</sup>Alle Simulationen werden mit einer Übergangsperiode von 100 Datenpunkten durchgeführt.

<sup>4</sup>Das  $i$  steht hier für die Dimension, also den  $i$ -ten Parameter für den eine Verschiebung im Parameterraum durchgeführt wird.

<sup>5</sup>Siehe Franke und Westerhoff (2016) für eine ähnliche Anwendung.

## 5.1. MODELLKALIBRIERUNG

wede Verschiebung des Parametersatzes eine Verschlechterung der Zielfunktion nach sich ziehen würde. Darüber hinaus soll noch die Robustheit der Optimierung geprüft werden. Dazu wird mit dem optimierten Parametersatz eine Renditezeitreihe der Länge  $T = 14341$ <sup>6</sup> erzeugt. Anschließend wird die Optimierung mit den selben Einstellungen, welche für die originale Schätzung der Systemparameter verwendet wurden, erneut durchgeführt. Sollten der sich daraus ergebene Parametersatz sich nicht signifikant von dem original optimierten Parametersatz unterscheiden, so kann die Optimierung als robust angesehen werden. Als letztes wird noch ein Kriterium zum Vergleich mit den empirischen Momenten benötigt. Nach Franke und Westerhoff (2012) und Ji et al. (2019) kann dies auf Grundlage des für die Optimierung ohnehin benötigten Bootstraps erfolgen. Dazu werden die mit dem Bootstrap erstellten Zeitreihen als alternative Ausprägungen des Prozesses angesehen, der für die Erzeugung der empirischen Zeitreihe verantwortlich ist. Unter dieser Annahme führt eine Anwendung der Zielfunktion in (4.13) auf die Momente der Bootstrapzeitreihen zu einer Zielfunktionswertverteilung der empirischen Momente. Daraus lässt sich nun im Weiteren ein Test konstruieren, der die empirischen und simulierten Zielfunktionswerte vergleicht und quantifiziert, welcher Anteil der simulierten Verteilung sich innerhalb des  $q = 0.95$  Intervalls der empirischen Verteilung befindet<sup>7</sup>. Befinden sich die Zielfunktionswerte eines Sets simulierter Momente innerhalb dieser Quantil-Spanne, bedeutet dies, dass diese Momente sich nicht von ihren empirischen Entsprechungen unterscheiden lassen und daher als gleichwertig betrachtet werden können. Sollte also ein großer Anteil der Zielfunktionswerte der simulierten Momente eines optimierten Parametersets unterhalb des empirischen Quantilwertes liegen, so kann dieses Parameterset als gute Repräsentation des Daten generierenden Prozess der empirischen Zeitreihe angesehen werden. Zusammengefasst ist die Nullhypothese des Tests also, dass die simulierte Zielfunktionsverteilung eines Parametersets gleich der empirischen Verteilung ist. Zur Ablehnung der Nullhypothese muss daher eine signifikante Anzahl von simulierten Zielfunktionswerten außerhalb

---

<sup>6</sup>Dies entspricht der Anzahl der empirischen Renditebeobachtungen des Kalibrierungszeitraums.

<sup>7</sup>Alternativ könnte man aus dem Bootstrap auch direkt eine Verteilung des empirischen Momente hergeleitet werden. Dies hat aber den Nachteil, dass die Kovarianz der Momente vernachlässigt wird.

des  $q = 0.95$  Quantils der empirischen Verteilung liegen. Der  $p$ -Wert, nachdem diese Entscheidung gefällt wird, ist dann der Anteil der simulierten Zielfunktionswerte innerhalb des  $q = 0.95$  Quantils. Dieser Test kann auch auf einzelne Momente angewendet werden, indem mithilfe der spezifischen inversen Momentvarianz eine separate Zielfunktion für die einzelnen Momente erstellt wird. Insgesamt soll mit dem Test die Güte der Abbildung des gesamten Momentvektors inklusive der Kovarianz zwischen den Momenten sowie die Güte der Replikation der einzelnen Momente überprüft werden. Beim Durchführen der Tests muss darauf geachtet werden, dass dieselben Spezifikationen wie bei der Optimierung benutzt werden. Also werden für alle Tests dieselben Momente und deren Varianzen sowie eine Simulationsanzahl  $S = 500$ , der Simulationsdauer  $D = 10 T$  gewählt.

## 5.2 Value-at-Risk Schätzung

Der VaR ist ein wichtiges Risikomaß in der Finanzwirtschaft. Er gibt die Verlusthöhe an, die mit einer gegebenen Wahrscheinlichkeit  $1 - p$  nicht überschritten wird. Mathematisch ist der VaR als  $p$ -Quantil der Renditeverteilung bestimmt, also der Wert unter dem  $p \cdot 100\%$  aller Werte liegen. Eine genaue Abschätzung des VaR ist in der Praxis sehr wichtig, da eine Unterschätzung dieses Wertes zu einem höheren Verlustrisiko und damit möglicherweise zu hohen Verlusten führt, während eine Überschätzung eine zu hohe Kapitalunterlegung zur Absicherung des Risikos nach sich zieht. Um die Güte von Modellen zur VaR-Vorhersage zu evaluieren, gibt es in der Literatur mehrere Backtesting-Verfahren.

### 5.2.1 Standard Verfahren

Zu den Standardverfahren und am häufigsten verwendeten Tests der Bewertung von VaR-Prognosen gehört das POF-Verfahren (Proportion of Failures) von Kupiec (1995) und dessen Erweiterung von Christoffersen (1998).

Das POF-Verfahren von Kupiec (1995) testet die empirische Anzahl der Werte, welche die VaR Prognose unterschreiten gegenüber den zu erwartenden Unterschreitun-

## 5.2. VALUE-AT-RISK SCHÄTZUNG

gen. Die Nullhypothese des Tests geht dabei von der Gleichheit der beobachteten und erwarteten Unterschreitungen aus. Bei zu vielen oder zu wenigen Unterschreitungen lehnt der Test die Gültigkeit des Modells ab. Formal lässt sich die Teststatistik wie folgt herleiten. Für einen Zeitraum der Länge  $T$  sei  $VaR_p$  die entsprechende VaR-Schätzung zum Quantil  $p$  und  $I_t \in \{0, 1\}$  ein Indikator, der angibt, ob eine Rendite  $r_t$  zum Zeitpunkt  $t$  den VaR unterschreitet, es gilt:

$$I_t = \begin{cases} 0 & \text{für } r_t \geq VaR_p \\ 1 & \text{für } r_t < VaR_p \end{cases} \quad (5.1)$$

- $r_t$ : Rendite zum Zeitpunkt  $t$
- $VaR_p$ : VaR des  $p$  Quantils

Die Anzahl aller Unterschreitungen ergibt sich dann durch  $N = \sum_{i=1}^T I_t$ . Die Nullhypothese lautet  $H_0 : p = N/T$  und wird gegen die Alternativhypothese  $H_1 : p \neq N/T$  getestet. Sollte die Nullhypothese zutreffen, ergibt sich unter Annahme einer Binomialverteilung für die Likelihood-Funktion:

$$LF_0 = (1 - p)^{T-N} \cdot p^N \quad (5.2)$$

- $p$ : Zugrundeliegendes Quantil
- $T$ : Gesamtanzahl der Beobachtungen
- $N$ : Anzahl Überschreitungen

Äquivalent dazu wird die Likelihood-Funktion der empirischen Daten gebildet:

$$LF_1 = \left(1 - \frac{N}{T}\right)^{T-N} \cdot \left(\frac{N}{T}\right)^N \quad (5.3)$$

Die Teststatistik wird nun durch einen Likelihood-Ratio-Test gebildet nach:

$$LR_{pof} = -2 \log \left( \frac{LF_0}{LF_1} \right) = 2 \log \left( \frac{(1 - \frac{N}{T})^{T-N} \cdot (\frac{N}{T})^N}{(1 - p)^{T-N} \cdot p^N} \right) \quad (5.4)$$

Da die Teststatistik einer  $\chi_1^2$  Verteilung folgt, gilt ein Modell als abgelehnt, wenn seine Teststatistik über dem Quantil  $Q_{\chi_1^2}(0.95) \approx 3.84$  der  $\chi_1^2$  Verteilung liegt<sup>8</sup>. Der

---

<sup>8</sup>Für die ausführliche Herleitung der Teststatistik siehe Christoffersen (1998).

Test von Kupiec (1995) hat allerdings die Schwäche, dass er nur die Häufigkeit der Unterschreitungen detektiert, nicht aber ihre zeitliche Abfolge. Dies ist insofern von Bedeutung, da in der Praxis VaR Unterschreitungen durch Krisen und das daraufhin folgenden Volatilitätsclustering häufig in kurzen Abfolgen auftreten<sup>9</sup>. Diese Beobachtung hat auch praktische Auswirkungen auf das Risikomanagement, da eine kurze Abfolge von hohen Verlusten das Insolvenzrisiko nochmal erhöht. Deshalb ist es sinnvoll, die VaR-Prognose auch auf eine Häufung von Überschreitungen zu untersuchen. Ein erweitertes Verfahren, das dies berücksichtigt, ist der Unabhängigkeitstest von Christoffersen (1998). Hier wird getestet, ob eine Unterschreitung des VaR zum Zeitpunkt  $t$  unabhängig vom Zeitpunkt  $t - 1$  passiert. Seien  $I_t, I_{t-1} \in \{0, 1\}$  Indikatoren nach (5.1) für eine Unterschreitung des VaR zum Zeitpunkt  $t$  bzw.  $t - 1$ . und  $N_{I_{t-1}, I_t}$  die Anzahl der beobachteten Datenpaare. Betrachtet man die zeitliche Abfolge der Indikatorzustände  $I_t$  nun als Markovkette erster Ordnung, dann ergibt sich für den Übergang vom Zustand  $I_{t-1}$  zum Zustand  $I_t$  folgende Übergangsmatrix:

$$M = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - p_{01} & p_{01} \\ 1 - p_{11} & p_{11} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

- $p_{AB}$ : Wahrscheinlichkeit, dass auf eine Beobachtung  $A$  eine Beobachtung  $B$  folgt

Aus (5.5) lassen sich nun relativ einfach die bedingten Wahrscheinlichkeiten einer Unterschreitung ableiten.

$$p_{01} = \frac{N_{01}}{N_{00} + N_{01}} \quad p_{11} = \frac{N_{11}}{N_{10} + N_{11}} \quad (5.6)$$

- $N_{AB}$ : Anzahl der Ereignisse, dass Beobachtung  $A$  auf Beobachtung  $B$  folgt

Sollten die Unterschreitungen unabhängig voneinander sein, so muss  $p = N/T = p_{01} = p_{11}$  gelten. Der Test von Christoffersen (1998) prüft nun genau diese Nullhypothese  $H_0 : p = p_{01} = p_{11}$  gegen die Alternativhypothesen  $H_1 : p \neq p_{01} \neq p_{11}$  von zu

---

<sup>9</sup>Siehe dazu eine Untersuchung von VaR Unterschreitungen amerikanischer Banken von Berkowitz und O'Brien (2002)

## 5.2. VALUE-AT-RISK SCHÄTZUNG

vielen ( $p_{11} > p_{01}$ ) oder zu wenigen ( $p_{11} < p_{01}$ ) aufeinanderfolgenden Unterschreitungen. Die Teststatistik wird dabei ähnlich wie beim Kupiec (1995) Test hergeleitet. Angenommen, die Nullhypothese trifft zu, dann ergeben sich für die Übergangsmatrix in (5.5) die gleichen Übergangswahrscheinlichkeiten  $p$  und für die Likelihood-Funktion ergibt sich:

$$LF_0 = (1 - p)^{(N_{00}+N_{10})} \cdot p^{(N_{01}+N_{11})} \quad (5.7)$$

Und äquivalent gilt für Likelihood-Funktion der empirischen Beobachtungen:

$$LF_1 = (1 - p_{01})^{N_{00}} \cdot p_{01}^{N_{01}} \cdot (1 - p_{11})^{N_{10}} \cdot p_{11}^{N_{11}} \quad (5.8)$$

Die Teststatistik wird wieder durch einen Likelihood-Ratio-Test gebildet:

$$LR_{ind} = 2 \cdot \log \left( \frac{(1 - p_{01})^{N_{00}} \cdot p_{01}^{N_{01}} \cdot (1 - p_{11})^{N_{10}} \cdot p_{11}^{N_{11}}}{(1 - p)^{(T-N)} \cdot p^N} \right) \quad (5.9)$$

Auch diese Teststatistik folgt einer  $\chi_1^2$  Verteilung und lehnt ein Modell ab, wenn seine Teststatistik über dem Quantil  $Q_{\chi_1^2}(0.95) \approx 3.84$  der  $\chi_1^2$  Verteilung liegt. Da ein gutes VaR-Modell sowohl die richtige Anzahl an Unterschreitungen sowie deren Unabhängigkeit reproduzieren sollte, ist es zweckmäßig, einen Test zu definieren, der beide Eigenschaften überprüft. Dafür bietet sich der Joint-Test von Christoffersen (1998) an, welchen man durch Addition der Teststatistiken des POF- und Unabhängigkeitstest in (5.4, 5.9) erhält.

$$LR_{cc} = LR_{pof} + LR_{ind} \quad (5.10)$$

Die Statistik dieses Tests folgt einer  $\chi_2^2$  Verteilung und ein Modell wird somit abgelehnt, wenn seine Teststatistik über dem Quantil  $Q_{\chi_2^2}(0.95) \approx 5.9$  der  $\chi_2^2$  Verteilung liegt. Da die Möglichkeit besteht, dass ein Modell zwar den Joint-Test besteht, aber entweder der POF-Test oder Unabhängigkeitstest abgelehnt wird<sup>10</sup>, ist es nötig alle drei Tests durchzuführen.

---

<sup>10</sup>Siehe Campbell (2005).

## 5.2.2 Erweiterte Verfahren

Die Methode von Christoffersen (1998) hat allerdings die Schwäche, dass nur auf eine Abhängigkeit von direkt aufeinanderfolgenden VaR Unterschreitungen getestet wird und es somit nach Hurlin et al. (2007) nicht möglich ist, komplexere Abhängigkeitsstrukturen zu detektieren. Dies ist vor allem deshalb von Bedeutung, da nach Nieto und Ruiz (2016) in gerade Krisenzeiten VaR-Unterschreitungen Abhängigkeiten höherer Ordnung aufweisen. Hierzu existieren grundsätzlich einige unterschiedliche Ansätze, wobei diese zusätzlich auch noch in ihrer genauen Implementation variieren können. In der Thesis von Moys (2018) werden diese unterschiedlichen Verfahren zusammengefasst<sup>11</sup> und bezüglich ihrer Güte zur Detektion höherer Abhängigkeit von VaR-Unterschreitungen an künstlichen Daten für verschiedene Stichprobengrößen und VaR-Quantile untersucht. Insgesamt kommt die Untersuchung zum Schluss, dass kein eindeutig bestes Verfahren für alle Situationen existiert, sondern die Güte je nach Datenlänge, VaR-Niveau und Stärke des Clustering variiert. Von daher wird von einer Anwendung dieser erweiterten Methoden im Rahmen dieser Thesis abgesehen. Die bisher vorgestellten statistischen Tests eignen sich zwar um festzustellen, ob ein Modell zur VaR-Prognose überhaupt tauglich ist, sind aber leider weder geeignet, um eine Aussage darüber zu treffen, welches von mehreren VaR-Modellen nun die beste Prognose liefert, noch lassen sie eine Abschätzung des zu erwartenden Verlust zu. Deshalb kann es auch noch hilfreich sein, einen Test zu haben, mit dem sich der erwartete Verlust prognostizieren lässt<sup>12</sup>. Anhand einer vorher definierten Verlustfunktion ist es dann möglich die Güte verschiedener VaR-Modelle miteinander zu vergleichen. Allerdings wird auch dieser Ansatz nicht weiter verfolgt, da hier nur die Tauglichkeit von ABM zur VaR-Prognose untersucht werden soll.

---

<sup>11</sup>Neben der Standardmethode von Christoffersen (1998) werden auch regressionbasierte Verfahren von Christoffersen und Diebold (2000), Clements und Taylor (2003), Engle und Manganelli (2004) und Dumitrescu et al. (2012) sowie durationsbasierte Verfahren von Christoffersen und Pelletier (2004), Haas (2005), Candelon et al. (2011), Dumitrescu et al. (2013) und Ziggel et al. (2014) im Detail erläutert.

<sup>12</sup>Eine solche Vorgehensweise wurde von Lopez (1998) vorgeschlagen und in der Literatur als Alternative bzw. Erweiterung der statistischen Tests angesehen. Siehe z.B. Campbell (2005), Niepola (2009). Für weitere mögliche Definitionen einer VaR-Verlustfunktion siehe Sarma et al. (2003), Caporin (2008), Abad et al. (2014).

# Kapitel 6

## Benchmarkmodelle

### 6.1 Grundidee

In diesem Kapitel werden die verschiedenen Benchmarkmodelle vorgestellt, an denen die Performance der agentenbasierten Modelle im weiteren Verlauf der Thesis evaluiert werden soll.

### 6.2 GARCH-Modelle

GARCH-Modelle sind in der Praxis ein weitverbreitetes Tool zur VaR-Prognose<sup>1</sup>. Der Vorteil des GARCH-Modells gegenüber dem historischen VaR ist, dass eine Anpassung der Volatilitätprognose unter Veränderungen deutlich schneller stattfindet. Daher ist ein GARCH-Modell eine gute Benchmark zur Evaluation der Performance von Multiagentenmodellen. Das allgemeine GARCH(P,Q)-Modell geht auf die Arbeit von Bollerslev (1986) zurück. Sei  $r$  eine Zeitreihe von Renditen, welche sich aus einer Linearkombination eines Sets von Variablen  $V$ , einer Störgröße  $\epsilon$  und einer Konstante  $\alpha$  beschreiben lässt. Für die Rendite  $r_t$  zum Zeitpunkt  $t$  ergibt sich dann folgende Darstellung:

---

<sup>1</sup>Für Studien zur VaR-Prognose mit GARCH-Modellen, siehe z.B. Mittnik und Paoletta (2000), Angelidis et al. (2004), Bekiros und Georgoutsos (2005), So und Philip (2006), Fan et al. (2008)

$$r_t = \alpha + LK(r_t|V) + \sigma_t \epsilon_t \quad (6.1)$$

- $\alpha$ : Konstante der Linearkombination
- $LK(r_t|V)$ : Linearkombination von Renditen  $r_t$  aus den Variablen des Sets  $V$
- $\sigma_t$ : Standardabweichung der Störgröße  $\epsilon$  zum Zeitpunkt  $t$

Das Set  $V$  in (6.1) kann dabei z.B die Linearkombination eines autoregressiven Prozesses<sup>2</sup>  $LK(r_t|V) = \sum_i \gamma_i r_{t-i}$  oder eines Sets erklärender Variablen<sup>3</sup>  $LK(r_t|V) = \sum_i \beta_i x_i$  sein. Grundlage des GARCH(P,Q)-Modells ist die Annahme einer zeitvariablen Varianz der Störgröße, deren Stärke von den vorher beobachteten Ausprägungen abhängt. Die zeitliche Varianz hängt dabei von zwei Prozessen ab. Der Erste ist der sogenannte ARCH-Effekt<sup>4</sup>, welcher die Varianz in Abhängigkeit von vorherigen Ausprägungen der Störgröße modelliert.

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^Q a_i \epsilon_{t-i}^2 \quad (6.2)$$

- $a_0$ : Konstante des ARCH-Prozesses
- $a_i$ : Koeffizient zur Lag-Ordnung  $i$  der Störgröße  $\epsilon_{t-i}^2$
- $Q$ : Anzahl der Lag-Ordnungen

$Q$  wird auch als Ordnung des ARCH(Q)-Prozesses bezeichnet. Diese gibt an, bis zu welcher Lag-Ordnung die früheren Ausprägungen der Störgröße  $\epsilon$  noch Auswirkungen auf die Varianz  $\sigma_t^2$  haben. Neben diesem ARCH-Effekt hängt die Varianz noch vom GARCH-Effekt ab. Dieser beschreibt die gegenwärtige Varianz der Störgröße in Abhängigkeit von ihrer vergangenen Varianz.

---

<sup>2</sup>Siehe Engle (1982).

<sup>3</sup>Siehe Bollerslev (1986).

<sup>4</sup>Dieser Ansatz zur Modellierung einer zeitabhängigen Varianz geht auf die Arbeit von Engle (1982) zurück.

## 6.2. GARCH-MODELLE

$$\sigma_t^2 = b_0 + \sum_{i=1}^P b_i \sigma_{t-i}^2 \quad (6.3)$$

- $b_0$ : Konstante des GARCH-Prozesses
- $b_i$ : Koeffizient zur Lag-Ordnung  $i$  der Varianz  $\sigma_{t-i}^2$
- $P$ : Anzahl der Lag-Ordnungen

Die Ordnung  $P$  des GARCH-Prozesses gibt hierbei analog zum ARCH-Prozess den Einfluss der Lag-Ordnungen vergangener Ausprägungen der Varianz an. Insgesamt ergibt sich für die Varianz  $\sigma_t^2$  eines GARCH(P,Q)-Modells:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^Q a_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^P b_i \sigma_{t-i}^2 \quad (6.4)$$

- $\omega = a_0 + b_0$ : Konstante des gesamten Prozesses

Die Schätzung des Satzes aller freien Parameter  $\Theta$  erfolgt dann mittels des Maximum-Likelihood-Verfahrens. Es wird der Parametersatz gesucht, welcher das Auftreten der Störgrößen  $\epsilon$  am besten erklärt. Die zugehörige Log-Likelihood-Funktion  $LLF$  bildet sich dann nach:

$$LLF(\Theta) = \sum_{t=1}^T \log(f_D(\epsilon_t)) \quad (6.5)$$

- $T$ : Anzahl der Datenpunkte  $y_t$
- $f_D(\epsilon_t)$ : Dichtefunktion von  $\epsilon$

Der genaue Aufbau der Maximum-Likelihood-Funktion hängt dabei von der für die Störgröße  $\epsilon$  verwendeten Dichtefunktion  $f_D(\epsilon)$  ab. Häufig benutzte Verteilungsfunktionen hierfür sind die Normalverteilung<sup>5</sup> oder die t-Verteilung<sup>6</sup>. Im Weiteren werden das GARCH(1,1)- und GARCH(2,2)-Modell<sup>7</sup> sowohl mit normalverteilter als auch mit t-verteilter Störgröße  $\epsilon$  als Benchmark herangezogen. Da bei dieser Anwendung

---

<sup>5</sup>Vorgeschlagen von Engle (1982).

<sup>6</sup>Vorgeschlagen von Bollerslev (1987).

<sup>7</sup>Zwar können auch GARCH-Modelle höherer Ordnungen benutzt werden, allerdings wird die Verbesserung mit jeder weiteren Lag-Ordnung immer kleiner.

auch keine erklärenden Variablen vorkommen, vereinfachen sich die Gleichungen in (6.1, 6.4) insgesamt zu:

$$r_t = \alpha + \sigma_t \epsilon_t \quad (6.6)$$

$$\sigma_t^2 = \begin{cases} \omega + a\epsilon_{t-1}^2 + b\sigma_{t-1}^2 & GARCH(1,1) \\ \omega + a_1\epsilon_{t-1}^2 + a_2\epsilon_{t-2}^2 + b_1\sigma_{t-1}^2 + b_2\sigma_{t-2}^2 & GARCH(2,2) \end{cases} \quad (6.7)$$

Und für die Maximum-Likelihood-Funktion in (6.5) ergibt sich für normalverteilte bzw. t-verteilter Störgröße  $\epsilon$  dann:

$$LLF(\alpha, \omega, a, b) = -\frac{1}{2} \left( T \log(2\pi) + \sum_{t=1}^T \frac{\epsilon_t^2}{\sigma_t^2} + \sum_{t=1}^T \log(\sigma_t^2) \right) \quad (6.8)$$

$$LLF(\alpha, \omega, a, b, n) = T \left[ \log \left( \Gamma \left( \frac{n+1}{2} \right) \right) - \log \left( \Gamma \left( \frac{n}{2} \right) \right) - \log(\pi(n-2)) \right] - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[ \log(\sigma_t^2) + (n+1) \log \left( 1 + \frac{\epsilon_t^2}{\sigma_t(n-2)} \right) \right] \quad (6.9)$$

- $n$ : Freiheitsgerade der t-Verteilung
- $\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} \exp(-t) dt$ : Gamma-Funktion

Für den Benchmarkvergleich wird das GARCH(1,1)- und GARCH(2,2)-Modell durch die Maximierung von (6.8, 6.9) an der jeweiligen Zeitreihe angepasst und mit dem gefundenen Parametersatz  $\Theta$  dann Simulationen nach (6.6, 6.7) durchgeführt. Zum besseren Vergleich wird dabei dieselbe Fensterlänge wie bei den Agentenmodellen verwendet. Anschließend werden die Auswertungen durchgeführt und deren Ergebnisse verglichen.

# Kapitel 7

## Verwendete Daten und Simulationsaufbau

In diesem Kapitel werden die für die verschiedenen Simulationen verwendeten Daten sowie der gesamte Simulationsaufbau der Modell- und VaR Schätzung detailliert beschreiben. In Abbildung (7.1) ist der Renditeverlauf des S&P 500 für den verwendeten Datensatz zu sehen, welcher den Zeitraum von 1. Januar 1950 bis 30. Juni 2020 umfasst.

Der vollständige Datensatz aus Abbildung (7.1) wurde zum Zwecke dieser Untersuchung in drei Bereiche aufgeteilt. Der Bereich für die Modellschätzung, reicht vom 1. Januar 1950 bis zum 31. Dezember 2006. Dieser Zeitraum sollte genug Beobachtungen beinhalten, um eine für den S&P 500 generelle Anpassung der Modelle zu erreichen, welche wiederum Grundlage der VaR-Schätzungen sind<sup>1</sup>. Der für die VaR-Schätzungen verwendete Bereich wird nach der National Bureau of Economic Research (NBER) Klassifikation für Expansionen und Rezessionen in zwei Phasen aufgeteilt. Die erste Phase beinhaltet die Expansionszeiträume vom 1. Januar 2007 bis zum 30. November 2007 und vom 1. Juli 2009 bis zum 31. Januar 2020, während die zweite Phase die Rezessionszeiträume vom 1. Dezember 2007 bis zum 30. Juni 2009 sowie vom 1. Februar 2020 bis zum 30. Juni 2020 umfasst. Insgesamt soll

---

<sup>1</sup>Je nach Methode werden allerdings einige Parameter der Modelle mit Hilfe eines rollierenden Fensters neu geschätzt. Dies wird im Rahmen der Auswertung noch ausführlicher beschrieben.

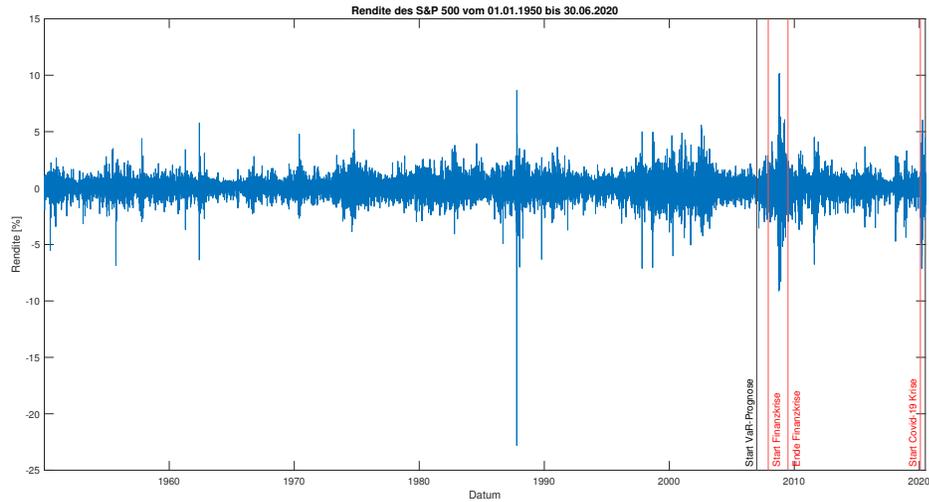


Abbildung 7.1: Renditeverlauf des S&P 500 für den gesamten hier verwendeten Datensatz vom 1. Januar 1950 bis 30. Juni 2020. Der Bereich der Modellschätzung umfasst dabei den Zeitraum vom 1. Januar 1950 bis 31. Dezember 2006. Die beiden Bereiche der VaR-Prognose, gekennzeichnet durch die rote bzw. grüne vertikale Linie, umfassen die Expansionszeiträume vom 1. Januar 2007 bis zum 30. November 2007 und vom 1. Juli 2009 bis zum 31. Januar 2020 sowie die Rezessionszeiträume vom 1. Dezember 2007 bis zum 30. Juni 2009 sowie vom 1. Februar 2020 bis zum 30. Juni 2020.

überprüft werden, wie gut die Prognosen der Modelle während Krisenzeiten und normalen Zeiten abschneiden.

## 7.1 Modellkalibrierung

Um eine möglichst hohe Genauigkeit der anzupassenden Momente und eine möglichst generelle Parameterabschätzung der Modelle zu gewährleisten, werden als Datengrundlage Tagesdaten des S&P 500 im Zeitraum vom 1. Januar 1950 bis 31. Dezember 2006 verwendet. Das entspricht einer Anzahl von  $T = 14341$  Renditebeobachtungen. Der S&P 500 wurde als Datengrundlage für die Modellschätzung gewählt, da erstens gute Datenaufzeichnungen über einen relativ langen Zeitraum vorhanden und zwei-

## 7.1. MODELLKALIBRIERUNG

tens diese ebenfalls leicht verfügbar sind. Der dritte Grund ist, dass die gewählten Momente deutlich ausgeprägt in der Zeitreihe des S&P 500 auftreten. Dies wird in Abbildung 7.2 nochmal visualisiert. Dort sind Fat-Tails und Volatilitätsclustering klar zu erkennen.

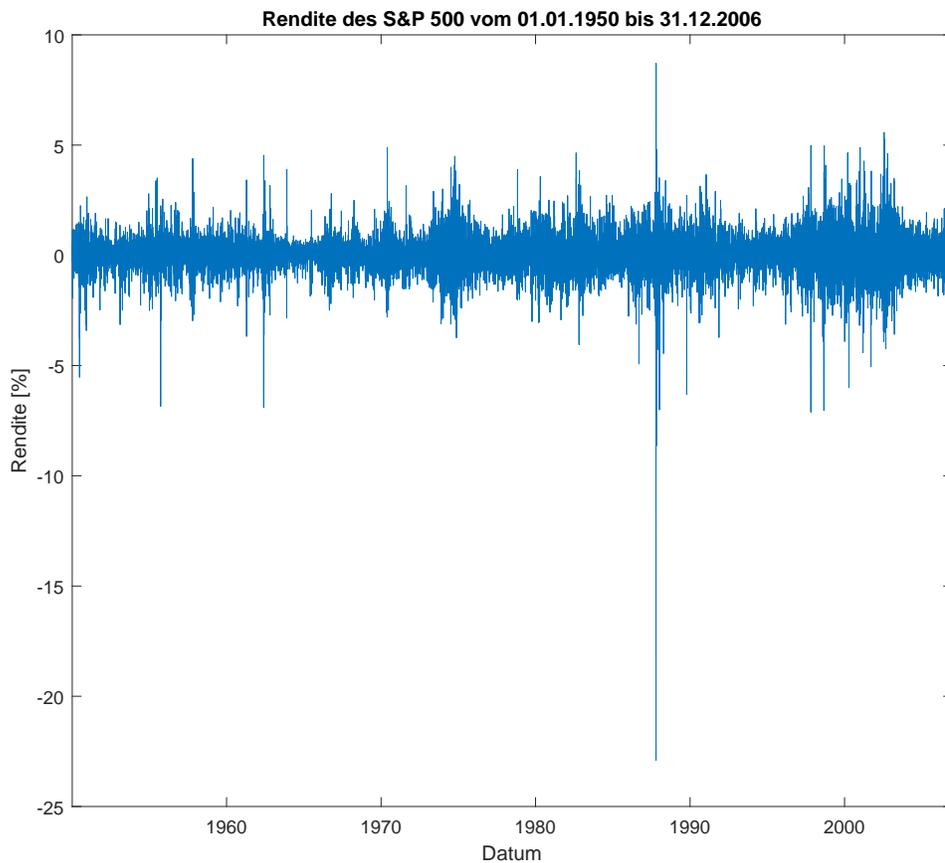


Abbildung 7.2: Renditeverlauf des S&P 500 für den Bereich der Modellkalibrierung.

In Tabelle 7.1 werden die einzelnen Momente und deren Standardabweichung dargestellt.

Vor dem Start der eigentlichen Modellschätzung müssen noch die Simulations- und Bootstrapparameter bestimmt werden. Die Simulationsanzahl beträgt  $S = 500$  und

Tabelle 7.1: Auflistung der zur Modellkalibrierung verwendeten Momente.

- $r, |r|$ : Rendite, absolute Rendite
- $\sigma(r)$ : Standardabweichung der Rendite
- $H(|r|, q)$ : Hill-Schätzer des  $q$  Verteilungsanteils der absoluten Rendite
- $\rho(|r|, \tau)$ : Autokorrelation der absoluten Rendite zur Lag-Ordnung  $\tau$
- $CVaR(r, p)$ : Conditional-Value-at-Risk zum Konfidenzniveau  $p$
- $\bar{V}(r, p)$ : Durchschnittlicher Abstand der  $VaR_p$  Unterschreitungen
- $V(r, p)$ : Standardabweichung der  $VaR_p$  Unterschreitungen

Stylized-Facts	Moment	Wert
Gesamtvolatilität	$100 \cdot \sigma(r)$	0.895
Fat-Tails	$H( r , 0.05)$	0.300
Volatilitätsclustering	$\rho( r , \{5, \dots, 15\})$	0.160
	$\rho( r , \{20, \dots, 30\})$	0.127
	$\rho( r , \{45, \dots, 55\})$	0.102
VaR bezogene Momente	$100 \cdot CVaR(r, 0.05)$	-2.03
	$\bar{V}(r, 0.05)$	19.8
	$\sigma(V(r, 0.05))$	38.1

die Simulationsdauer  $D = 10 T^2$ . Die Länge der gebootstrapten Zeitreihen entspricht der Länge der Originalzeitreihe und für die Anzahl der Bootstraps wird mit 500 der gleiche Wert wie für die Simulationsanzahl gewählt. Die Blocklänge des Bootstraps beträgt  $B = 1000$ . Diese Länge sollte ausreichend groß sein und gleichzeitig auch sicherstellen, dass die gebootstrapten Zeitreihen genug Unterschiede aufweisen. Des Weiteren wird durch eine Blocklänge von  $B = 1000$  sichergestellt, dass die Langzeitkorrelation der empirischen Zeitreihe durch das Bootstrapping nicht verloren geht. Der eigentliche Ablauf der Modellkalibrierung ist wie folgt:

1. Erfassen der Momente und Erstellen ihrer Varianzen und Kovarianzen durch Bootstrapping
2. Bilden der Gewichtungsmatrix
3. Auswählen des Agentenmodells und Bestimmen der Parametergrenzen

---

<sup>2</sup>Dieser Zusammenhang zwischen simulierten und empirischen Daten wird bereits von Lee und Ingram (1991) und Duffie und Singleton (1993) vorgeschlagen und auch meist bei der Kalibrierung von Agentenmodellen verwendet. Siehe dazu Franke (2009), Franke und Westerhoff (2012), Franke und Westerhoff (2016).

## 7.2. VAR-SCHÄTZUNG

4. Durchführen der Partikelschwarm-Optimierung bis eines der Abbruchkriterien erreicht wird

Im Anschluss an die Kalibrierung werden dann, die im Kapitel 5 „Auswertungskriterien“ vorgestellten, Tests durchgeführt, mit denen die Güte der Kalibrierung untersucht wird.

## 7.2 VaR-Schätzung

Für das Anfertigen und Backtesting einer VaR-Schätzung wird eine andere Datengrundlage als bei der Modellkalibrierung gewählt. Da untersucht werden soll, ob mit Agentenmodellen präzise VaR-Schätzungen sowohl in normalen als auch in Krisenzeiten möglich sind, muss eine entsprechende Datengrundlage ausgewählt werden. Die Einteilung in normale und Krisenzeiten erfolgt dabei nach der NBER Klassifikation für Expansionen und Rezessionen. Wie die Abbildung 7.3 verdeutlicht, erfüllt die Rendite des S&P 500 vom 1. Dezember 2007 bis 30. Juni 2009 sowie vom 1. Februar 2020 bis 30. Juni 2020 mit einer erhöhten Volatilität, extremeren Renditebeobachtungen und stärker ausgeprägtem Volatilitätsclustering die typischen Bedingungen für Krisenverhalten. Zum Anfang des Jahres 2007 ist die Volatilität noch recht schwach, zur Mitte des Jahres 2007 verstärkt sie sich allerdings, was als Vorzeichen der aufkommenden Finanzkrise angesehen werden kann. Nach der Pleite des Finanzinstitutes Lehman Brothers im September 2008, welche den Beginn der Finanzkrise markiert, erhöht sich die Volatilität des S&P 500 noch einmal deutlich. Diese Phase hält etwa bis Mitte 2009 an, wonach sich die Volatilität wieder dem Niveau vor der Krise annähert. Zum Frühjahr 2020 gibt es wieder einen abrupten Anstieg der Volatilität, welcher sich auf die Covid-19 Krise zurückführen lässt. Im Gegensatz dazu zeigt die Rendite des S&P 500 vom 1. Januar 2007 bis 30. November 2007 und 1. Juli 2009 bis 31. Januar 2020 eine recht gleichmäßige Volatilität, wobei es Anstiege zum Frühjahr 2010 und Ende des Jahres 2011, welche sich auf die griechische Schuldenkrise zurückführen lassen, sowie Ende des Jahres 2015 bzw. Anfang des Jahres 2016 gibt. Diese Anstiege sind allerdings im Vergleich mit denen

im Rezessionszeitraum relativ klein. Von daher kann dies als ein Zeitraum normaler Schwankungen angesehen werden.

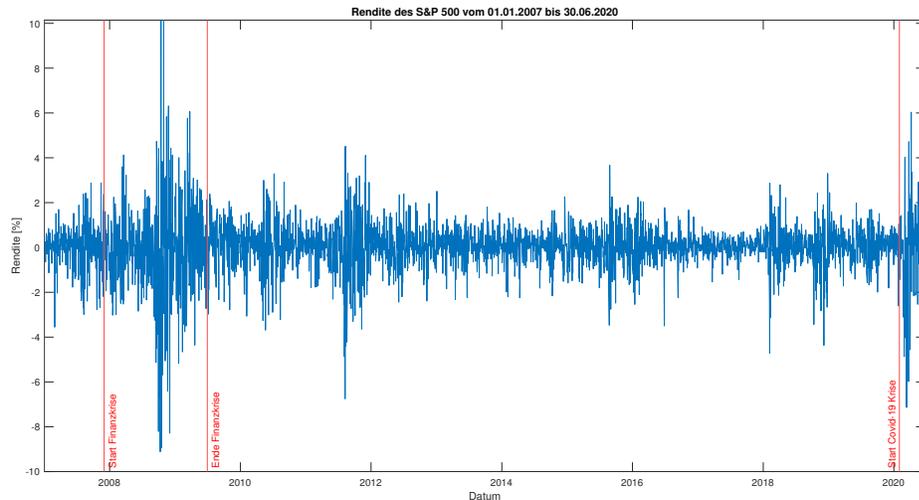


Abbildung 7.3: Renditeverlauf des S&P 500 für den VaR-Prognosebereich. Die Expansionsphase umfasst die Zeiträume 1. Januar 2007 bis 30. November 2007 und 1. Juli 2009 bis 31. Januar 2020, während die Rezessionsphase die Handelstage vom 1. Dezember 2007 bis 30. Juni 2009 und vom 1. Februar 2020 bis 30. Juni 2020 beinhaltet.

Zum Durchführen der VaR-Schätzung wird die Zeitreihe des S&P 500 in Abbildung 7.3, welche insgesamt eine Länge von  $T = 3394$  Datenpunkten, was eine Zeitraum von etwa 15 Jahren entspricht, umfasst, in mehrere kleinere Zeitfenster zerlegt<sup>3</sup>, auf denen dann die Parameterschätzung für die VaR-Prognose erfolgen soll. Nach erfolgter Optimierung und VaR-Schätzung wird das Zeitfenster dann um einen Tag verschoben. Insgesamt liegt bei der VaR-Schätzung also eine rollierende Optimierung vor. Neben der Performance der Modelle in der Expansions- bzw. Rezessionsphase soll auch noch untersucht werden, ob sich für die verschiedenen Phasen ein spezifisches Agentenverhalten beobachten lässt.

<sup>3</sup>Wobei am Anfang das Fenster noch vor dem Jahr 2007 beginnt und damit noch im ersten Schätzbereich liegt. Das ist nötig, da die erste Out-of-Sample-Prognose genau am 01. Januar 2007 stattfindet.

# Kapitel 8

## Auswertung MSM Kalibrierung

Dieses Kapitel befasst sich mit der Auswertung des MSM Kalibrierung<sup>1</sup>. Nachdem die Definition der Parametergrenzen der Optimierung erfolgt ist, wird als Erstes eine qualitative Auswertung des Modellverhaltens durchgeführt. Dadurch lässt sich bereits abschätzen, ob das ABM überhaupt in der Lage ist, empirische Renditen und die damit verbundenen Stylized-Facts abzubilden. Des Weiteren wird ein erster Einblick in das Systemverhalten gegeben. Im Anschluss an die qualitative Auswertung erfolgt dann eine quantitative Analyse nach den im Kapitel 5 „Auswertungskriterien“ eingeführten Charakteristiken. Modelle bzw. Modellspezifikationen, die sich hierbei gut eignen, die Stylized-Facts abzubilden, werden dann im Weiteren zur VaR-Prognose herangezogen.

### 8.1 Modell von Franke und Westerhoff (2016), der BHR- und BR-Ansatz

Als Erstes soll der Herdentriebsansatz und der Bias-Reversionansatz des Modells von Franke und Westerhoff (2016) untersucht werden.

In den Tabellen 8.1 sind die verwendeten Parametergrenzen abgebildet. Diese bil-

---

<sup>1</sup>Teile der hier präsentierten Ergebnisse sind auch bereits in Tubbenhauer et al. (2021) publiziert worden.

den den Rahmen der Optimierung. Im Vergleich zum BHR-Modell sind die oberen Grenzwerte der Parameter beim BR-Modell etwas großzügiger gewählt. Der Grund dafür ist, dass beim BHR-Modell ein Trend zu größeren Parameterwerten bei gleichzeitiger Erhöhung der Zielfunktion zu beobachten war. Da dies bei BR-Modell nicht vorkam, mussten hier die Grenzwerte nicht so eng gewählt werden.

Tabelle 8.1: Obere und untere Parametergrenzen bei der Optimierung des BHR- und BR-Modells.

Parameter	BHR		BR	
	U. Grenze	O. Grenze	U. Grenze	O. Grenze
$\phi$	0.01	0.1	0.01	0.1
$\chi$	1	10	1	10
$\alpha_0$	0.1	25	0.1	250
$\alpha_m$	1	500	1	5000
$\sigma_f$	0.025	2.5	0.025	2.5
$\sigma_c$	0.025	2.5	0.025	2.5
$\alpha_n$	0.1	25		

Die Abbildung 8.1 zeigt die generierten Rendite des BHR-Modells. Das Modell befindet sich fast immer vollständig in einer der beiden Marktphasen. Eine Phase, in der beide Strategien annähernd gleich stark vertreten sind, kommt nur sehr kurzzeitig vor. Dabei wird das System größtenteils von Fundamentalisten dominiert und wechselt nur für relativ kurzfristige Zeiträume in die von Technikern dominierte Phase. Allerdings kommt es durchaus vor, dass das Modell auch für einen längeren Zeitraum von Trendfolgern dominiert wird. Insgesamt ist die Variation der Volatilität merkbar kleiner als beim empirischen S&P 500 und ähnelt einem 2-Phasen-Varianzmodell. Vor allem in der von Fundamentalisten dominierten Phase bleibt die Volatilität über einen langen Zeitraum annähernd gleich. In der von Trendfolgern dominierten Phase ist die Variation der Volatilität, ausgelöst durch schnelle Wechsel der Marktphase oder leichte Variation des Marktanteils, etwas ausgeprägter. Des Weiteren zeigt das Modell ein deutliches Volatilitätsclustering und Fat-Tail verteilte Renditen. Eine Erklärung für dieses Systemverhalten kann durch ein Betrachten der jeweiligen Phasenräume in Abbildung 8.3 gefunden werden. Daraus wird ersichtlich, dass der Herdenfaktor nicht

## 8.1. MODELL VON Franke und Westerhoff (2016), DER BHR- UND BR-ANSATZ

### Verlauf von Rendite und Marktanteil des Herdenmodells

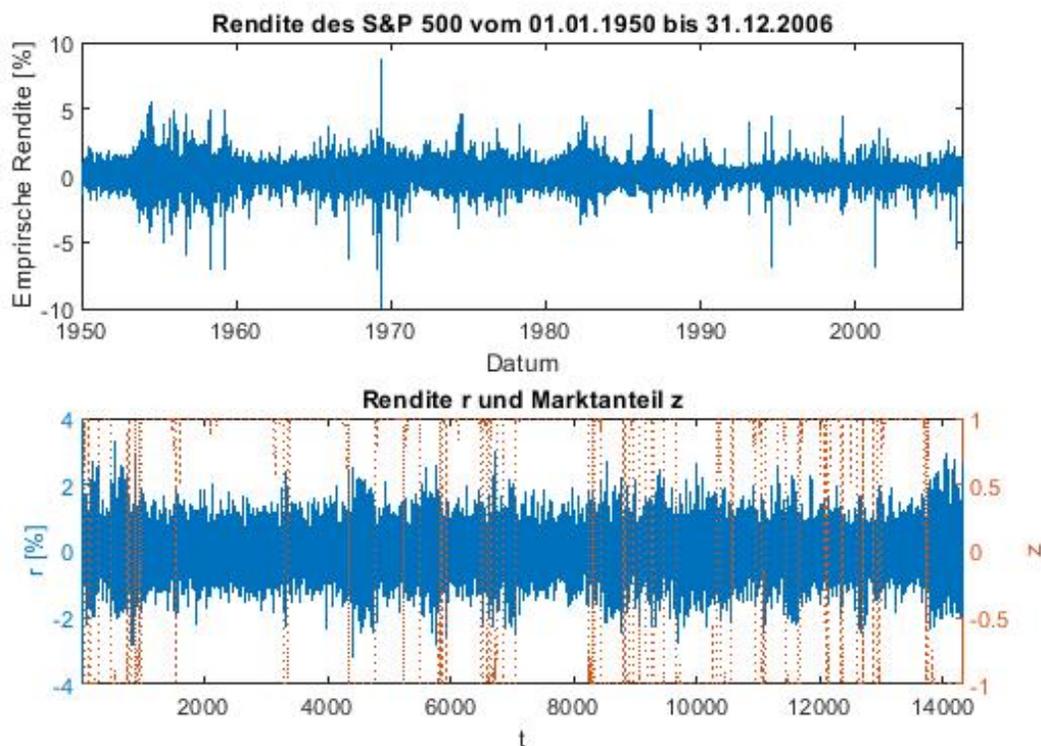


Abbildung 8.1: Vergleich der empirischen (oben) und simulierten Rendite (unten) für das BHR-Modell.

unbedingt nötig ist, um die Stylized-Facts des Systems grundsätzlich abzubilden. Die Rendite des BR-Modells zeigt dasselbe Verhalten wie beim BHR-Modell, was daran liegt, dass beide Modelle annähernd dasselbe Phasenraumverhalten aufweisen. In Abbildung 8.4 kann als kleiner Unterschied allerdings leicht weniger Variation des Marktanteils in der Trendphase beobachtet werden, was in einer einheitlicheren Varianz in dieser Phase deutlich wird. Dieser leichte Unterschied lässt sich mit einem Vergleich der Nullklinen im Phasenraum in erklären.

Wie Abbildung 8.3 zeigt, verläuft die Nullkline für fast den gesamten Definitionsbereich des Marktanteils  $z$  annähernd parallel ober- bzw. unterhalb der Nulllinie des Preises. Für  $z \rightarrow -1$  und  $z \rightarrow 1$  allerdings strebt die Nullkline fast senkrecht zur

## Verlauf von Rendite und Marktanteil des Bias-Reversionsmodells

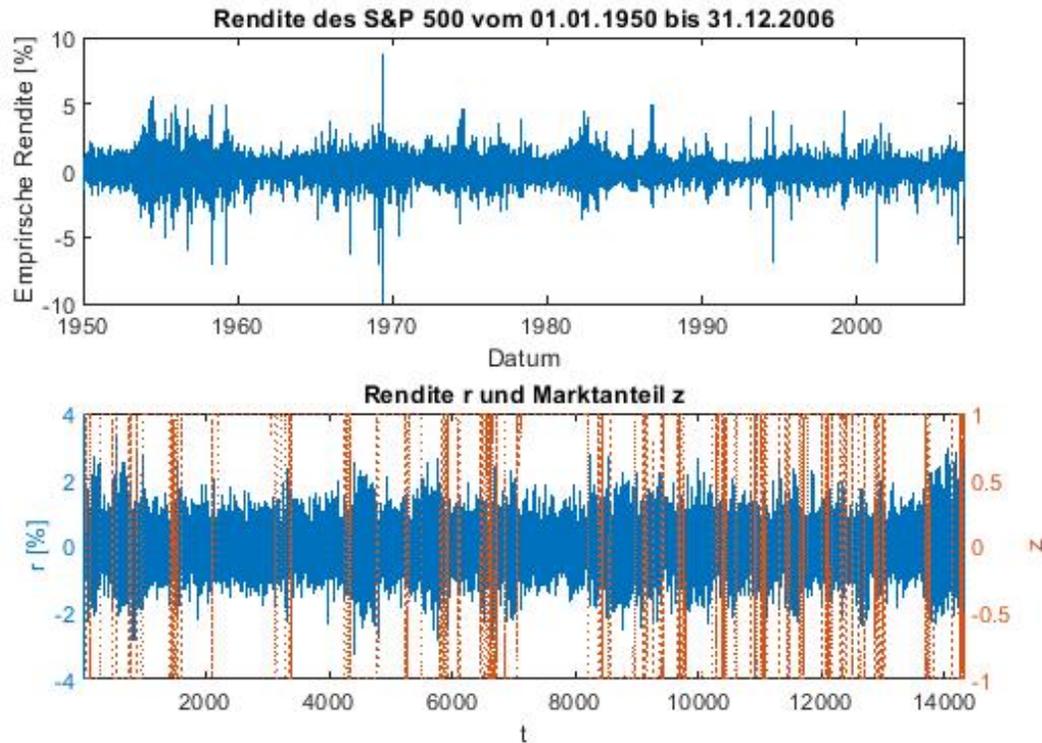


Abbildung 8.2: Vergleich der empirischen (oben) und simulierten Rendite (unten) für das BR-Modell.

Nulllinie des Preises gegen den Fixpunkt bzw. plus und minus unendlich. Da das System immer zur Nullkline strebt, führt dies dazu, dass der Preis meist um einen bestimmten Wert kleiner bzw. größer Null verweilt<sup>2</sup> und sich nur beim Passieren des Fixpunktes stärker ändert<sup>3</sup>, was durch den Preispfad in Abbildung 8.3 bestätigt wird. Die Erklärung, warum das Modell länger in der von Fundamentalisten als in der von Trendfolgern dominierten Phase verweilt, findet sich in den unterschiedlichen Volatilitäten der Phasen<sup>4</sup>. Dadurch, dass die Standardabweichung im Trendregime

<sup>2</sup>In diesem Fall ist die Fundamentalstrategie dominant.

<sup>3</sup>Hier dominiert dann die Technikerstrategie.

<sup>4</sup>Eine andere theoretisch mögliche Erklärung würden die Parameter  $\phi$  und  $\chi$  liefern. Allerdings

Phasenraumdiagramm sowie Preis- und Marktanteilverlauf des Herdenmodells

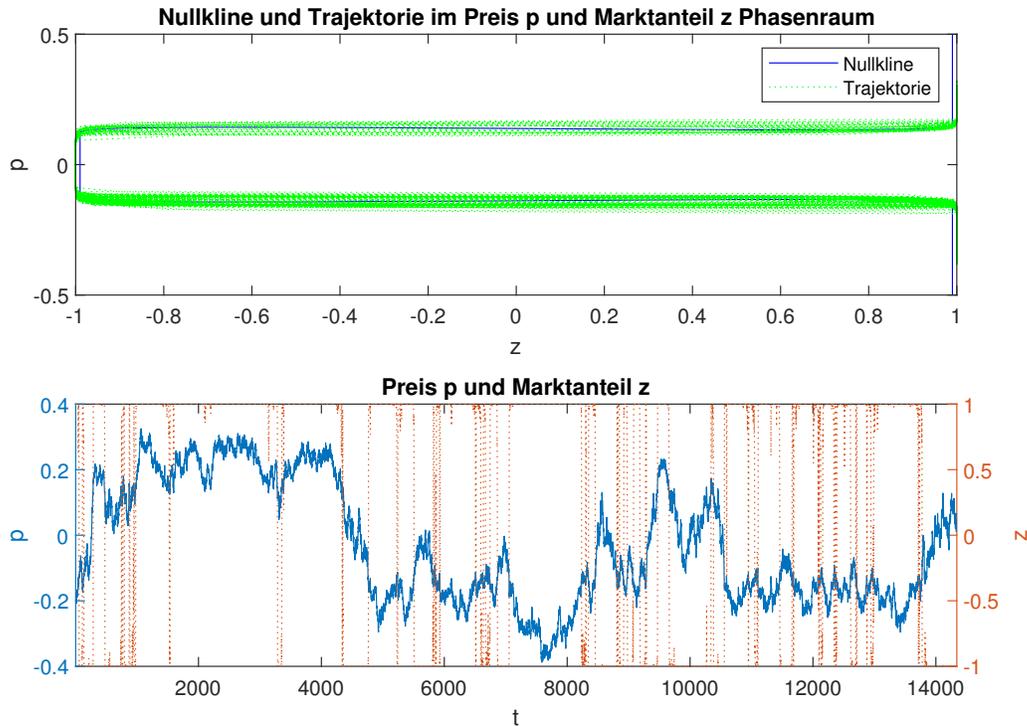


Abbildung 8.3: Lage der Nullklinen im Marktanteil-Preis-Phasenraum  $P(z, p)$  für das BHR-Modell.

mehr als doppelt so hoch wie im Fundamentalregime ist, steigt auch die Wahrscheinlichkeit für einen großen Preissprung, welcher letztendlich zum Regimewechsel führt. In Abbildung 8.4 ist gut erkennbar, dass die Nullkline des BR-Modells an beiden Phasenübergängen flacher verläuft und dort daher weniger Variation des Marktanteils möglich ist. Wie beim BHR-Modell folgt aus den Nullklinen in Abbildung 8.4 ebenfalls, dass der Preis meist um einen bestimmten Wert kleiner oder größer Null liegt und sich nur beim Passieren des Fixpunktes stärker ändert. Der einzige Unterschied ist, dass die Nullkline fast vollständig parallel zu den Phasenraumdimensionen

---

ist der Einfluss dieser Parameter nach Tabelle 8.4 auf die maximalen Preisdifferenzen als sehr viel kleiner zu bewerten als der Einfluss des Zufallsanteils.

Phasenraumdiagramm sowie Preis- und Marktanteilverlauf des Bias-Reversionsmodells

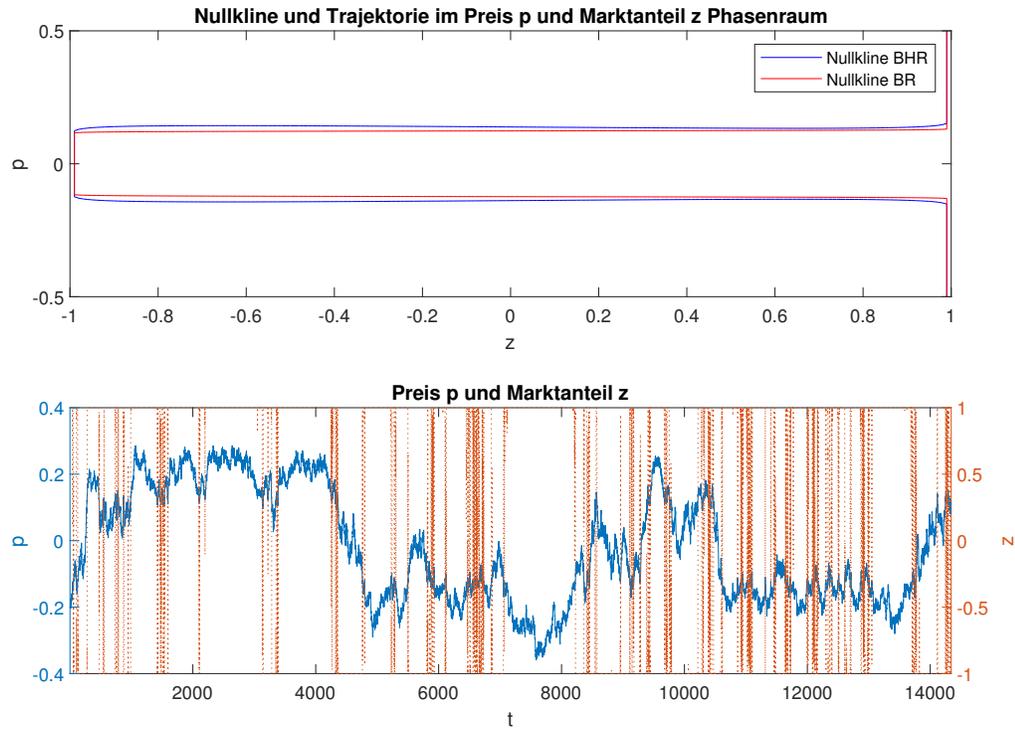


Abbildung 8.4: Lage der Nullkline im Marktanteil-Preis-Phasenraum  $P(z, p)$  für das BR-Modell.

verläuft. Dies ist der Grund, warum beim BR-Modell weniger Variation des Marktanteils und der Volatilität beobachtet werden kann.

### 8.1.1 Endwert der Optimierung und Analyse der zugehörigen Parameter

Bevor die Ergebnisse der Optimierung genauer untersucht werden können, muss erst überprüft werden, ob die benötigten Bedingungen der Stationarität und Ergodizität auch vorhanden sind. Die Testergebnisse dazu werden in Tabelle 8.2 präsentiert. Tabelle 8.2 zeigt, dass für jedes Moment der BHR- und BR-Modelle weder Stati-

8.1. MODELL VON Franke und Westerhoff (2016), DER BHR- UND BR-ANSATZ

Tabelle 8.2: Ergebnisse des Stationaritäts- und Ergodizitätstests nach Wald und Wolfowitz (1940) für alle Momente des BHR- und BR-Modells.

Signifikanzniveaus für die Ablehnung der Nullhypothese der Stationarität bzw. Ergodizität: (\*) p=0.1, (\*\*) p=0.05 (\*\*\*) p=0.01.

- $|r|_t$ : Absolute Rendite
- $H(|r|, q)$ : Hill-Schätzer des  $q$  Verteilungsanteils der absoluten Rendite
- $\rho(|r|, \tau)$ : Autokorrelation der absoluten Rendite zur Lag-Ordnung  $\tau$
- $CVaR(r, p)$ : CVaR zum Konfidenzniveau  $p$
- $\bar{V}(r, p)$ : Durchschnittlicher Abstand der  $VaR_p$  Unterschreitungen
- $V(r, p)$ : Standardabweichung der  $VaR_p$  Unterschreitungen

Momente	BHR		BR	
	Stationarität	Ergodizität	Stationarität	Ergodizität
$100 \cdot \sigma(r)$	0.601	0.876	0.672	0.671
$H( r , 0.05)$	0.645	0.841	0.887	0.434
$\rho( r , \{5, \dots, 15\})$	0.925	0.517	0.218	0.202
$\rho( r , \{20, \dots, 30\})$	0.669	0.383	0.715	0.911
$\rho( r , \{45, \dots, 55\})$	0.460	0.359	0.182	0.314
$100 \cdot CVaR(r, 0.05)$	0.436	0.146	0.575	0.576
$\bar{V}(r, 0.05)$	0.560	0.0634*	1	0.112
$\sigma(V(r, 0.05))$	0.985	0.488	0.410	0.517

onärität noch Ergodizität mit ausreichender Genauigkeit abgelehnt werden kann. In Tabelle 8.3 werden die Zielfunktionsendwerte der Zielfunktion in (4.13) der optimierten Parametersätze verglichen. Median, Mittelwert und Standardabweichung sind dabei über die Endwerte des Partikelschwarms gebildet worden. Zur Reduktion von Ausreißern sind die Partikel, deren Zielfunktionen Werte größer als das  $p = 0.90$  Quantil aller Endwerte aufweisen, für die Auswertung nicht berücksichtigt worden<sup>5</sup>. Diese Herangehensweise wird auch bei allen folgenden Modellen verwendet.

Aus Tabelle 8.3 lässt sich ableiten, dass der Großteil der Partikel ein lokales Minimum oder wenigstens mehrere äquivalente lokale Minima gefunden hat. Des Weiteren zeigt das BHR-Modell zwar eine leicht bessere Anpassung als das BR-Modell, aller-

<sup>5</sup>Eine einseitige Aussortierung der größten Werte ist sinnvoll, da die Zielfunktionswerte der Partikel eine deutliche Rechtsschiefe aufweisen. Es existieren also extreme Abweichungen nach oben, während signifikant kleinere Endwerte nicht auftreten.

Tabelle 8.3: Mittelwert, Median und Standardabweichung der Zielfunktionswerte des BHR- und BR-Modells nach der Optimierung.

	BHR	BR
Median	1.89	2.31
Mittelwert	1.90	2.52
Standardabweichung	0.166	0.616

dings sind die Verschlechterungen, welche durch die Exklusion des Parameters  $\alpha_n$  entstehen, insgesamt relativ gering. Damit bestätigt sich der Eindruck aus den Abbildungen 8.1 und 8.2, dass ein Herdentriebsparameter zur adäquaten Abbildung der Stylized-Facts nicht unbedingt nötig ist. Um genau zu überprüfen, ob der sich der Schwarm fast vollständig auf ein Minimum zusammengezogen hat oder ob die Partikel auf verschiedene Minima verteilt sind, müssen Werte der einzelnen Parameter über die Partikel des Schwarms in Tabelle (8.4) betrachtet werden.

Tabelle 8.4: Mittelwert (MW), Median (MD) und Standardabweichung (SD) der Parameter des BHR- und BR-Modells nach der Optimierung.

Parameter	BHR			BR		
	MW	MD	SD	MW	MD	SD
$\phi$	0.0860	0.0860	0.00215	0.0992	0.0989	0.00156
$\chi$	6.45	6.27	1.20	2.64	3.39	2.40
$\alpha_0$	9.17	9.17	0.456	55.4	56.5	10.3
$\alpha_m$	473	473	19.7	3390	3453	446
$\sigma_f$	0.627	0.627	0.00153	0.622	0.626	0.0371
$\sigma_c$	1.46	1.46	0.00594	1.47	1.46	0.186
$\alpha_n$	3.35	3.24	0.411			

Aus der Tabelle 8.4 kann entnommen werden, dass sich die Parameter über den Schwarm kaum voneinander unterscheiden. Die geringe Standardabweichung der Parameter suggeriert, dass durch den Großteil des Schwarms insgesamt ein robustes, lokales Minimum gefunden werden konnte. Trotzdem ist eine genauere Betrachtung der einzelnen Parameter zum Verständnis hilfreich, da dieses Ergebnis nicht für jeden einzelnen Parameter so vorhersehbar war. Die Parameter  $\sigma_f$  und  $\sigma_c$  zeigen deutlich die kleinsten Abweichungen. Dies war auch so zu erwarten, da diese die Volatilität

### 8.1. MODELL VON Franke und Westerhoff (2016), DER BHR- UND BR-ANSATZ

in den beiden Phasen bestimmen und zu jedem Volatilitätswert ein eindeutiger Parameterwert zugeordnet werden kann. Dem hingegen beeinflussen die Parameter  $\phi$  und  $\chi$  nur die Autokorrelation der Rendite direkt, welche nicht als repräsentatives Moment in die letztendliche Zielfunktion eingegangen ist. Deshalb war die Vermutung, dass es hier größere Abweichungen geben könnte. Gegenüber den Parametern  $\sigma_f$  und  $\sigma_c$  ist auch der Fall, allerdings weist die Standardabweichung immer noch die selbe Größenordnung wie der Mittelwert bzw. der Median auf<sup>6</sup>, womit die Abweichung immer noch relativ moderat ausfällt. Beim BHR-Modell gibt es für die drei Parameter  $\alpha_0$ ,  $\alpha_n$  und  $\alpha_m$  theoretisch eine ganze Menge an Einstellungen, welche zu einem ähnlichen Systemverhalten führen können. Von daher ist die kaum vorhandene Diversität<sup>7</sup> dieser Parameter ebenfalls ein wenig überraschend, da theoretisch eine Änderung eines Parameters leicht durch eine Änderung der zwei verbliebenen Parameter kompensiert werden kann. Beim BR-Modell ist die Abweichung der Parameter  $\alpha_0$  und  $\alpha_m$  relativ gesehen sogar etwas größer, was ebenfalls ein wenig unerwartet ist, da durch die Streichung des Parameters  $\alpha_n$  die Möglichkeit eine Parameteränderung zu kompensieren gesunken ist. Der Grund für diese große Ähnlichkeit der Parameter liegt an der recht engen Wahl der Parametergrenzen in Tabelle (8.1). Mit großzügiger gewählten Grenzen würden mehr äquivalente lokale Minima existieren, was dann zu einer größeren Variation innerhalb der einzelnen Parameter führt. Allerdings hat sich beim BHR-Modell gezeigt, dass durch weiter gewählte Grenzen die Parameter  $\alpha_0$ ,  $\alpha_n$  und  $\alpha_m$  nur gegen größere Werte konvergieren, wodurch sich allerdings die Endwerte der Zielfunktion verschlechtern. Dies bedeutet, dass für größere Werte der Parameter  $\alpha_0$ ,  $\alpha_n$  und  $\alpha_m$  die Zielfunktion flacher wird und Änderungen der Parameter kleinere Auswirkungen haben. Das führt dann zu einer größeren Fläche mit ähnlich niedrigen Zielfunktionswerten, welche durch den Optimierungsalgorithmus natürlich einfacher gefunden wird. Von daher ist insgesamt also eine engere Setzung der Grenzen durchaus sinnvoll. Da dieses Problem beim BR-Modell nicht vorlag, wurden hierfür größere Grenzwerte für  $\alpha_0$  und  $\alpha_m$  gewählt, was wiederum die relativ

---

<sup>6</sup>Für  $\phi$  ist die Standardabweichung sogar um eine vollständige Größenordnung kleiner.

<sup>7</sup>Die Standardabweichung ist für alle drei Parameter eine Größenordnung kleiner als der Mittelwert bzw. der Median.

höhere Standardabweichung bei diesen Parametern erklärt.

### 8.1.2 Güte der Abbildung der Momente

Da der Endwert der Optimierung allerdings nur eine begrenzte Aussagekraft über die Genauigkeit der Abbildung der einzelnen Momente oder deren Gesamtheit hat, ist es notwendig, die Güte der Momentabbildung noch einmal genauer zu überprüfen. Zu diesem Zweck wird der Verteilungstest von Franke und Westerhoff (2012) auf die einzelnen Momente sowie deren Gesamtverteilung angewandt.

Tabelle 8.5: Vergleich der empirischen und simulierten Momente sowie Güte der Momentabbildung des BHR- und BR-Modells. Die Güte der Momentabbildung wird dabei anhand der p-Werte des Verteilungstests von Franke und Westerhoff (2012) bestimmt.

Signifikanzniveau zur Ablehnung der Nullhypothese von identischen Verteilungen: (\*) p=0.1, (\*\*) p=0.05 (\*\*\*) p=0.01.

- $|r|$ : Absolute Rendite
- $H(|r|, q)$ : Hill-Schätzer des  $q$  Verteilungsanteils der absoluten Rendite
- $\rho(|r|, \tau)$ : Autokorrelation der absoluten Rendite zur Lag-Ordnung  $\tau$
- $CVaR(r, p)$ : CVaR zum Konfidenzniveau  $p$
- $\bar{V}(r, p)$ : Durchschnittlicher Abstand der  $VaR_p$  Unterschreitungen
- $V(r, p)$ : Standardabweichung der  $VaR_p$  Unterschreitungen

Momente	empirisch	BHR		BR	
		simuliert	p-Wert	simuliert	p-Wert
$100 \cdot \sigma(r)$	0.895	0.844	0.960	0.854	0.978
$H( r , 0.05)$	0.300	0.291	0.916	0.296	0.936
$\rho( r , \{5, \dots, 15\})$	0.160	0.148	0.936	0.144	0.926
$\rho( r , \{20, \dots, 30\})$	0.127	0.118	0.923	0.115	0.916
$\rho( r , \{45, \dots, 55\})$	0.102	0.0901	0.932	0.0864	0.920
$100 \cdot CVaR(r, 0.05)$	-2.03	-2.00	0.992	-2.02	0.998
$\bar{V}(r, 0.05)$	19.8	22.8	0.868	22.3	0.900
$\sigma(V(r, 0.05))$	38.1	41.4	0.940	40.0	0.956
Gesamt			0.731		0.771

Grundsätzlich bestätigt die Tabelle 8.5 die aus den vorigen Ergebnissen gezogene

Erkenntnis, dass beide Modelle die gewählten Momente gut abbilden. Sowohl die Gesamtverteilung als auch die einzelnen Momente sind von ihren empirischen Entsprechungen nicht zu unterscheiden. Entgegen den Ergebnissen aus Tabelle 8.3 bildet das BR-Modell die Zielfunktionsverteilung sogar genauer ab, womit das Entfernen des Herdenfaktors  $\alpha_n$  die Anpassung sogar noch verbessert.

### 8.1.3 Robustheit der MSM Schätzung

Zu guter Letzt soll nochmal überprüft werden, wie robust die MSM Optimierung ist. Um diese Frage zu beantworten, wird die Güte des gefundenen lokalen Optimums überprüft, indem die Effekte von Parameteränderungen auf die Zielfunktion untersucht werden. Genauer gesagt wird ein spezifischer Parameter ausgewählt und mit Werten zwischen 0.1 und 10 multipliziert. Mit diesen abgeänderten Parameterwerten wird dann die Zielfunktion erneut bestimmt. Dies wird für jeden der optimierten Parameter wiederholt. Damit das aufgefundene Minimum als robust angesehen werden kann, müssen sich die Zielfunktionswerte bei einer lokalen Änderung merkbar verschlechtern. Des Weiteren wird untersucht, ob die Optimierung in der Lage ist, einen ausgewählten, unterliegenden Parametersatz abzubilden. Dazu wird mit dem optimierten Parametersatz eine Renditezeitreihe, welche die gleiche Länge wie der empirische Datensatz  $T = 14,341$  aufweist, simuliert und die MSM Schätzung daran durchgeführt<sup>8</sup>. Sollte die MSM Methode in der Lage sein, eine zuverlässige Schätzung zu liefern, so dürfen die neu geschätzte Parameter nicht allzu weit vom wahren Parametersatz<sup>9</sup> abweichen.

Aus den Abbildungen 8.5 und 8.6 wird ersichtlich, dass sich durch eine Parameterverschiebung der Zielfunktionswert für beide Modelle nur verschlechtert. Dies gilt generell zwar für jeden einzelnen Parameter, allerdings reagieren einige Parameter stärker auf die Verschiebungen. Im Allgemeinen gilt, dass Systemparameter, welche

---

<sup>8</sup>Siehe auch Chen und Lux (2018) und Platt (2020) für eine Anwendung dieser Analyse. Eine vollständige Monte Carlo Analyse ist für die MSM Methode aus Laufzeitgründen leider nicht durchführbar.

<sup>9</sup>Im Weiteren werden in diesem Kontext die an den empirischen Daten geschätzten Parameter als der wahre Parametersatz bezeichnet.

MSM Zielfunktionsänderung des BHR-Modells

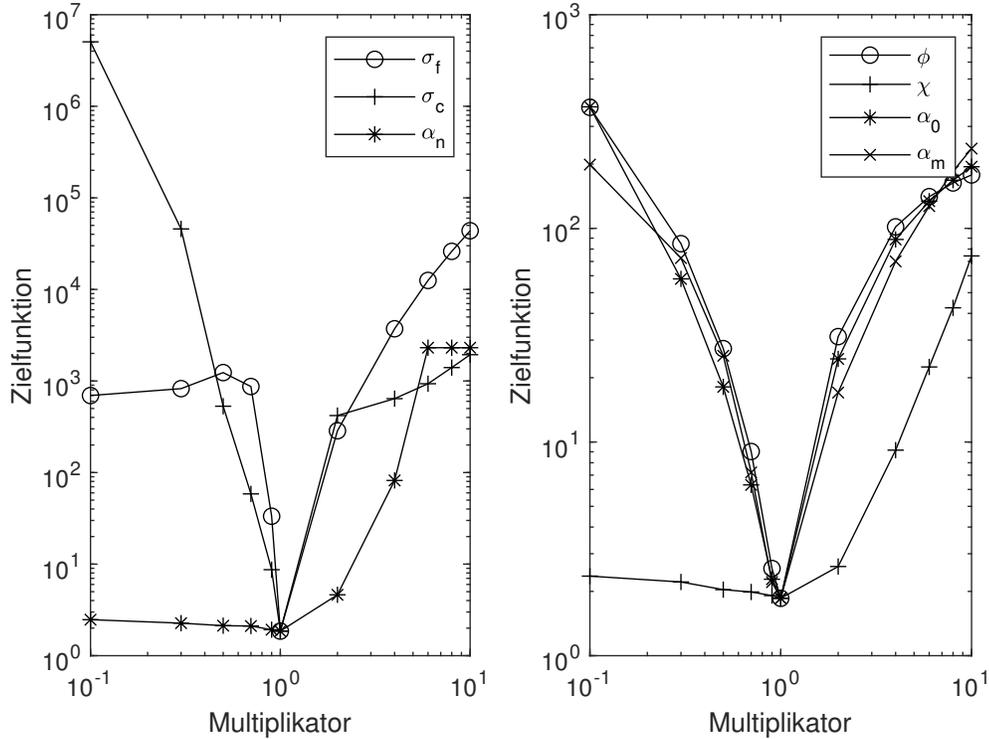


Abbildung 8.5: Verlauf der MSM Zielfunktion des BHR-Modells unter Variation der Parameter  $\sigma_f$ ,  $\sigma_c$ ,  $\alpha_n$  (links) und  $\phi$ ,  $\chi$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_m$  (rechts).

die größte Veränderung bei einer Verschiebung aufweisen, als für das Systemverhalten besonders wichtig angesehen werden können. Besonders stark wirkt sich die Verschiebung dabei erwartungsgemäß auf die Volatilitätsparameter  $\sigma_f$  und  $\sigma_c$  aus. Auch die Parameter  $\phi$ ,  $\alpha_0$  und  $\alpha_m$  weisen eine eindeutige Verschlechterung bei einer Verschiebung aus, wobei diese allerdings im Vergleich mit  $\sigma_f$  und  $\sigma_c$  etwas schwächer ausfällt. Ein gänzlich anderes Verhalten zeigen die Parameter  $\chi$ ,  $\alpha_n$ . Im BHR-Modell tritt eine größere Verschlechterung des Zielfunktionswertes für  $\alpha_n$  und  $\chi$  nur bei einer Erhöhung des Parameterwertes ein. Für  $\alpha_n$  ist dies kein unerwartetes Ergebnis, da das BHR-Modell bei kleinen  $\alpha_n$  Werten dem BR-Modell gleicht. Weniger offensichtlich ist die Erklärung für  $\chi$ . Da  $\chi$  sich auf keines der betrachteten Momente direkt

### MSM Zielfunktionsänderung des BR-Modells

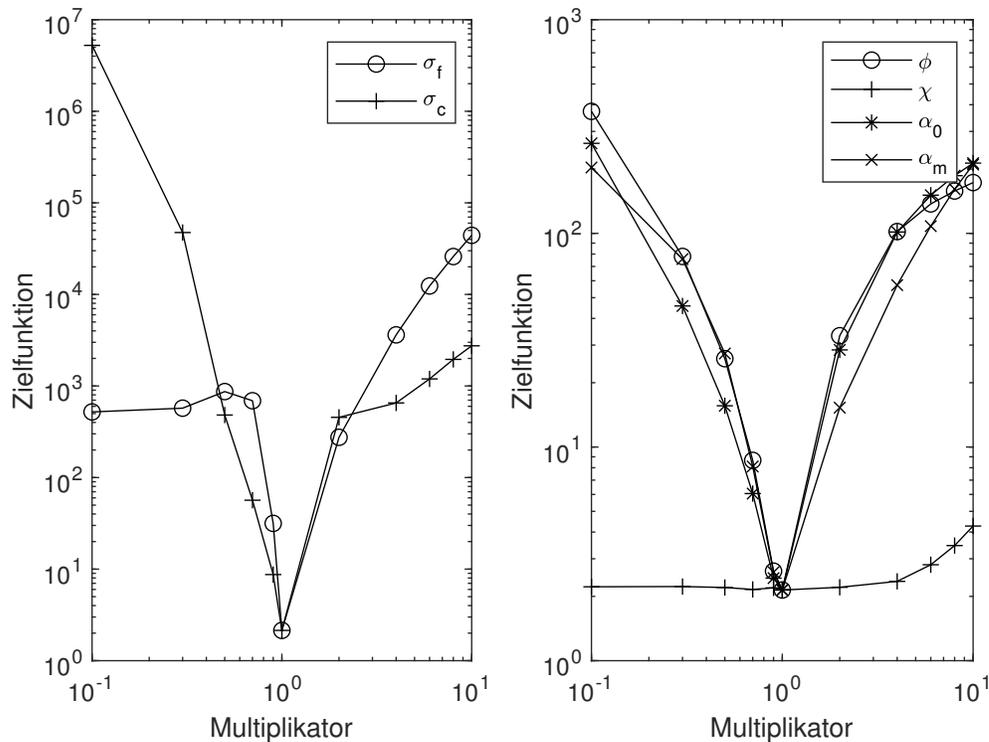


Abbildung 8.6: Verlauf der MSM Zielfunktion des BR-Modells unter Variation der Parameter  $\sigma_f$ ,  $\sigma_c$  (links) und  $\phi$ ,  $\chi$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_m$  (rechts).

auswirkt, existiert hier einfach ein großer Bereich, indem sich Änderungen nur minimal auswirken. Für das BR-Modell ist dies sogar noch extremer zu beobachten. Eine Änderung von  $\chi$  hat hier fast überhaupt keine Auswirkungen.

Tabelle 8.6 zeigt, dass die Abweichung zwischen dem wahren Parametersatz und den Medianwerten des Schwarms für beide Modelle relativ gering ist. Dabei sind die Abweichung bei den Voltilitätsparametern  $\sigma_f$  und  $\sigma_c$  am kleinsten, was wiederum konsistent mit den Ergebnissen aus den Abbildungen 8.5 und 8.6 ist. Bevor ein endgültiger Schluss über die Robustheit der MSM Schätzung gezogen werden kann, muss noch sichergestellt werden, dass die Ergebnisse in Tabelle 8.6 auch zuverlässig replizierbar sind. Normalerweise wäre hierfür eine Monte Carlo Simulation

Tabelle 8.6: Vergleich der wahren und optimierten Parameter für das BHR- und BR-Modell. Als für die Optimierung repräsentative Werte sind hierbei die Mediane der Zielfunktionswerte (ZFW) und Parameter dargestellt.

Parameter	BHR		BR	
	wahr	optimiert	wahr	optimiert
ZFW		2.71		5.33
$\phi$	0.0858	0.100	0.0992	0.0397
$\chi$	5.72	1.12	1.11	1.32
$\alpha_0$	9.60	4.00	47.7	94.0
$\alpha_m$	500	417	3116	1999
$\sigma_f$	0.626	0.660	0.621	0.623
$\sigma_c$	1.45	1.48	1.47	1.44
$\alpha_n$	3.45	3.94		

Tabelle 8.7: Vergleich der wahren und optimierten Parameter für das BHR- und BR-Modell im Fall  $\sigma_f > \sigma_c$ . Als für die Optimierung repräsentative Werte sind hierbei die Mediane der Zielfunktionswerte (ZFW) und Parameter dargestellt.

Parameter	BHR		BR	
	wahr	optimiert	wahr	optimiert
ZFW		16.9		30.3
$\phi$	0.0858	0.100	0.0992	0.100
$\chi$	5.72	9.96	1.11	6.23
$\alpha_0$	9.60	21.2	47.7	219
$\alpha_m$	500	210	3116	4245
$\sigma_f$	0.626	1.52	0.621	1.40
$\sigma_c$	1.45	0.657	1.47	0.64
$\alpha_n$	3.45	5.54		

vonnöten, welche allerdings aus Laufzeitgründen nicht durchführbar ist. Auf Grund der Modellstruktur sowie der gewählten Grenzen in Tabelle 8.1 kann es für jedes Modell allerdings nur ein weiteres Minimum mit  $\sigma_f > \sigma_c$  existieren, welches das Potential besitzt die Momente ebenfalls gut abzubilden. Um die Güte dieser Abbildung zu überprüfen, wird eine zusätzliche MSM Optimierung mit der Beschränkung  $\sigma_f > \sigma_c$  durchgeführt. Damit ist sichergestellt, dass dieses alternative Minimum auch aufgefunden wird. In Tabelle 8.7 sind die Parameter- und Zielfunktionswerte dieses

## 8.2. *MODELL VON Franke und Westerhoff (2012), DER GEWINNANSATZ*

alternativen Minimums dargestellt. Wie zu erwarten, weichen die Parameter in diesem Fall deutlich vom wahren Parametersatz ab. Des Weiteren fällt auf, dass die Zielfunktionswerte des alternativen Minimums für beide Modelle deutlich schlechter ausfallen. Damit kann ausgeschlossen werden, dass diese Minima die Momente ähnlich gut oder besser abbilden als die Minima aus Tabelle 8.6. Insgesamt kann von daher die MSM Optimierung für das BHR- und BR-Modell hier als robust angesehen werden.

### 8.1.4 **Zusammenfassung der wichtigsten Optimierungsergebnisse**

Grundsätzlich kann die Optimierung von agentenbasierten Modellen nach der Methode der simulierten Momente an den Beispielen des BHR- und BR-Modells von Franke und Westerhoff (2016) als erfolgreich betrachtet werden. Spezifisch geht aus den Optimierungsergebnissen hervor, dass die verwendete Optimierungsheuristik imstande ist, ein ausreichend robustes (lokales) Minimum zu finden, welches die Momente gut abbildet. Eine Schwäche der hier gezeigten Ergebnisse ist jedoch, dass zwar die Momente gut repliziert werden, aber die Variabilität der Varianz deutlich geringer ausfällt als dies bei den empirischen Renditen der Fall ist. Das optimierte Modellverhalten ähnelt eher einem 2-Phasenmodell, was zu Problemen bei der Prognosegenauigkeit führen kann, da sich das Modell am aktuellen Rand mit hoher Wahrscheinlichkeit in einer der beiden Phasen befindet. Dies würde dann ebenfalls eine zweiphasige VaR-Prognose generieren.

## 8.2 **Modell von Franke und Westerhoff (2012), der Gewinnansatz**

In diesem Kapitel werden die Optimierungsergebnisse des Gewinnmodells, Gewinn-Biasmodells und Gewinn-Herdenmodells von Franke und Westerhoff (2012) präsentiert. Die Tabelle 8.8 zeigt die zur Optimierung verwendeten Parametergrenzen.

## KAPITEL 8. AUSWERTUNG MSM KALIBRIERUNG

Tabelle 8.8: Obere und untere Parametergrenzen bei der Optimierung des G-, GB- und GH-Modells.

Parameter	G		GB		GH	
	U. Grz.	O. Grz.	U. Grz.	O. Grz.	U. Grz.	O. Grz.
$\phi$	0.001	1	0.001	1	0.01	0.1
$\chi$	0.01	10	0.01	10	1	10
$\beta$	1	10000	1	10000	1	10000
$\eta$	0.001	0.999	0.001	0.999	0.001	0.999
$\sigma_f$	0.025	2.5	0.025	2.5	0.025	2.5
$\sigma_c$	0.025	2.5	0.025	2.5	0.025	2.5
$\alpha_0$			-25	25		
$\alpha_n$					0.05	50

Verlauf von Rendite, Preis und Marktanteil des Gewinnmodells

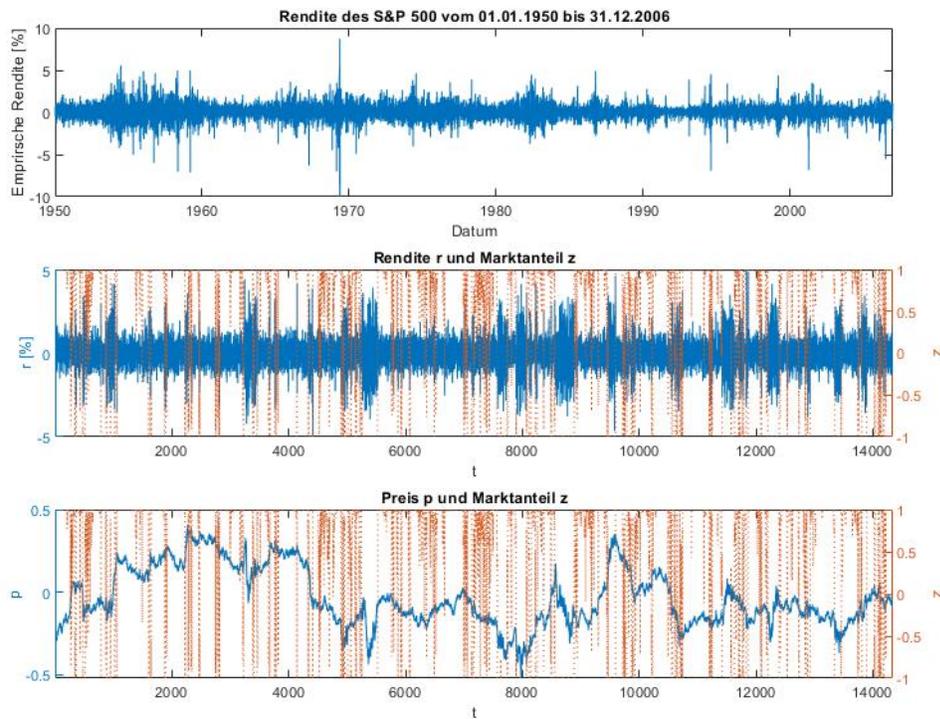


Abbildung 8.7: Vergleich der empirischen (oben) und simulierten Rendite des G-Modells im stabilen Fall (mittig) sowie Darstellung der dazugehörigen simulierten Preiszeitreihe (unten).

## 8.2. MODELL VON Franke und Westerhoff (2012), DER GEWINNANSATZ

Durch die Wahl der Parametergrenzen für  $\phi$  und  $\chi$  wird ein instabiles Systemverhalten nach (3.22, 3.23) (G- und GH-Modell) und (3.29, 3.30) (GB-Modell) von vorneherein ausgeschlossen.

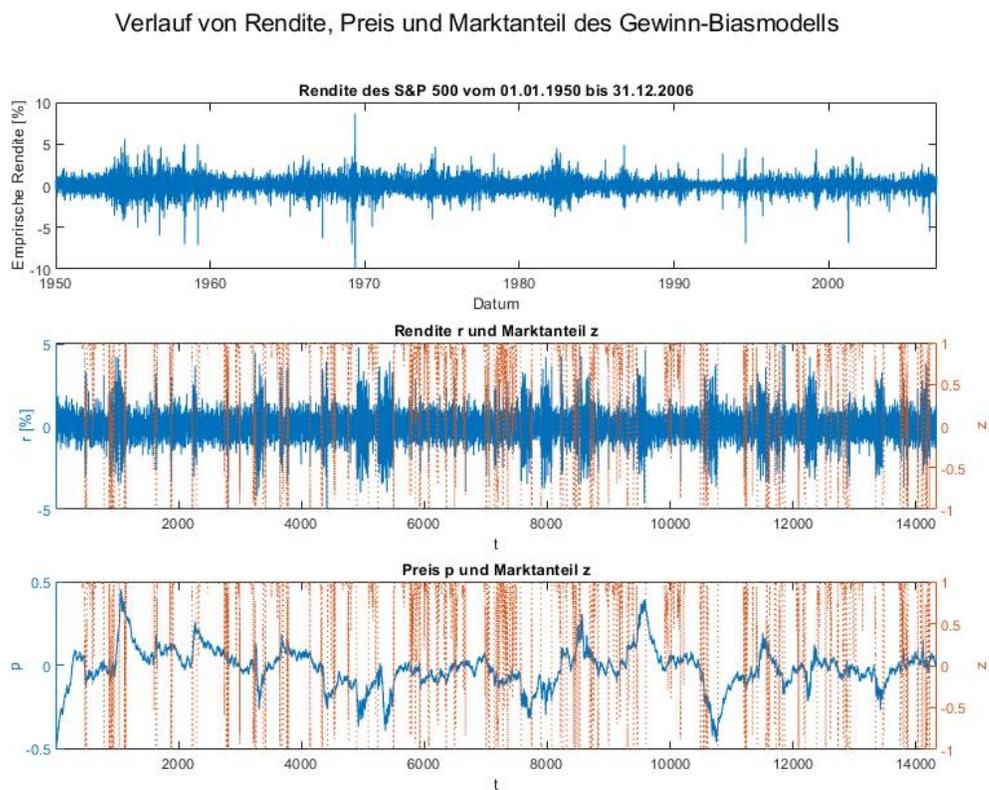


Abbildung 8.8: Vergleich der empirischen (oben) und simulierten Rendite des GB-Modells im stabilen Fall (mittig) sowie Darstellung der dazugehörigen simulierten Preiszeitreihe (unten).

Zuerst sollen wieder die vom Modell nach der Optimierung generierten Renditen untersucht werden. Wie in den Abbildungen 8.7-8.9 zu sehen, gleicht die simulierte Rendite denen der vorherigen Modelle. Es bildet sich wieder ein 2-Phasenmodell heraus, wobei das 2-Phasenverhalten hier nochmal stärker ausgeprägt ist. Zusammen mit den vorherigen Ergebnissen deutet dies darauf hin, dass die Definition des Zufallseinflusses in der Preisgleichung in (3.1) hauptverantwortlich für das resultierende

2-Phasenverhalten der Renditezeitreihe ist.

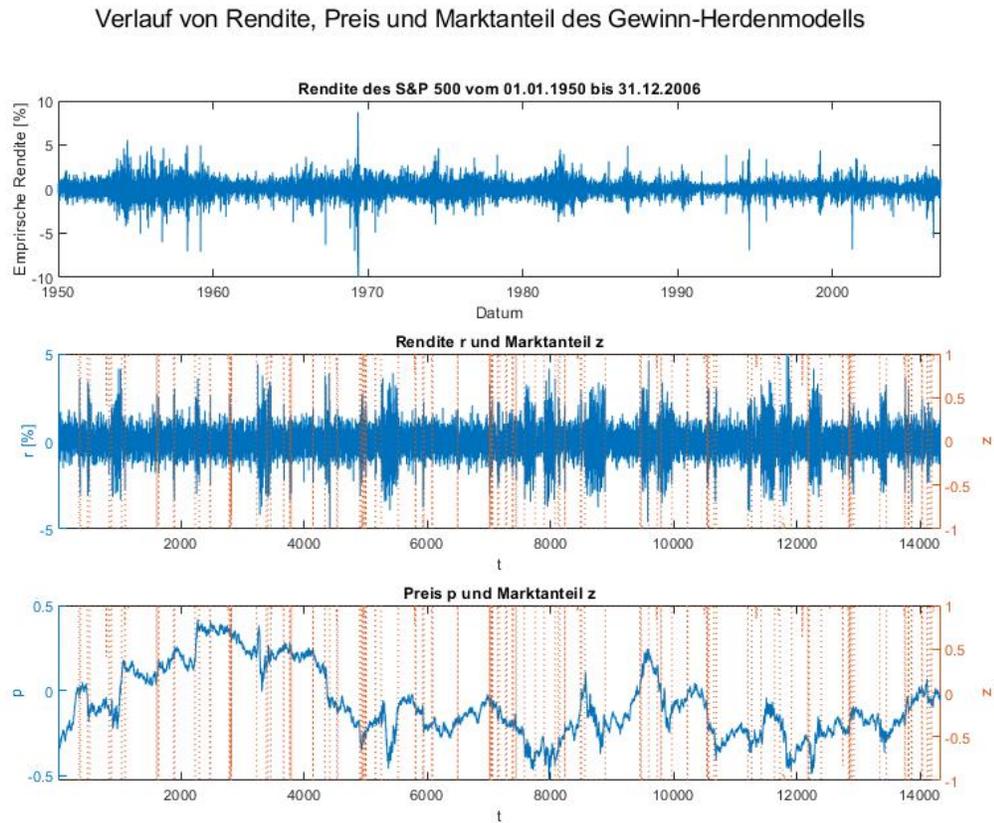


Abbildung 8.9: Vergleich der empirischen (oben) und simulierten Rendite des GH-Modells im stabilen Fall (mittig) sowie Darstellung der dazugehörigen simulierten Preiszeitreihe (unten).

### 8.2.1 Endwert der Optimierung und Analyse der zugehörigen Parameter

Auch hier werden zunächst die Bedingungen der Stationarität und Ergodizität überprüft. Die Testergebnisse dazu sind in Tabelle 8.9 gezeigt. Zwar kommen hier Ablehnungen häufiger vor als beim BHR- und BR-Modell, insgesamt ist die Anzahl

8.2. *MODELL VON Franke und Westerhoff (2012), DER GEWINNANSATZ*

Tabelle 8.9: Ergebnisse des Stationaritäts- (Stat) und Ergodizitätstests (Ergo) nach Wald und Wolfowitz (1940) für alle Momente des G-, GB- und GH-Modells.

Signifikanzniveaus für die Ablehnung der Nullhypothese der Stationarität bzw. Ergodizität: (\*) p=0.1, (\*\*) p=0.05 (\*\*\*) p=0.01.

- $|r|_t$ : Absolute Rendite
- $H(|r|, q)$ : Hill-Schätzer des  $q$  Verteilungsanteils der absoluten Rendite
- $\rho(|r|, \tau)$ : Autokorrelation der absoluten Rendite zur Lag-Ordnung  $\tau$
- $CVaR(r, p)$ : CVaR zum Konfidenzniveau  $p$
- $\bar{V}(r, p)$ : Durchschnittlicher Abstand der  $VaR_p$  Unterschreitungen
- $V(r, p)$ : Standardabweichung der  $VaR_p$  Unterschreitungen

Momente	G		GB		GH	
	Stat	Ergo	Stat	Ergo	Stat	Ergo
$100 \cdot \sigma(r)$	0.0432**	0.408	0.618	0.946	0.403	0.704
$H( r , 0.05)$	0.192	0.219	0.391	1	0.218	0.704
$\rho( r , \{5, \dots, 15\})$	0.408	0.0516*	0.645	0.219	0.0940*	0.607
$\rho( r , \{20, \dots, 30\})$	0.342	0.671	0.0312**	0.982	0.908	0.187
$\rho( r , \{45, \dots, 55\})$	0.848	0.639	0.0785*	0.293	0.452	0.0239**
$100 \cdot CVaR(r, 0.05)$	0.0666*	0.460	0.307	1	0.0232**	0.0772*
$\bar{V}(r, 0.05)$	0.191	0.336	0.506	0.546	0.108	0.546
$\sigma(V(r, 0.05))$	0.553	0.946	0.108	0.946	0.677	0.254

der Ablehnungen aber immer noch relativ gering. Des Weiteren existiert keine Ablehnungen auf dem  $p = 0.01$  Niveau. Demnach können auch für die Momente der G-, GB- und GH-Modelle Stationarität und Ergodizität insgesamt nicht abgelehnt werden. In Tabelle 8.10 sind die Median, Mittelwert und Standardabweichung Zielfunktionsendwerte der Zielfunktion in (4.13) für die einzelnen Modelle aufgeführt. Die Medianwerte sind mit denen der BHR- und BR-Modelle vergleichbar. Daraus lässt sich entnehmen, dass durch die Optimierung für alle drei Modelle mindestens ein adäquates Minimum mit äquivalentem Zielfunktionswert gefunden wird. Allerdings fällt auf, dass Mittelwert und Standardabweichung der GB- und GH-Modelle deutlich größer ist, was auf eine Zielfunktion mit mehreren lokalen Minima hinweist. Dies wird durch die Ergebnisse der Tabelle 8.11 bestätigt.

Für die Parameter  $\sigma_f$ ,  $\sigma_c$  und  $\eta$  sind Standardabweichungen beim GB- und GH-

Tabelle 8.10: Mittelwert, Median und Standardabweichung der Zielfunktionswerte des G-, GB- und GH-Modells nach der Optimierung.

	G	GB	GH
Median	2.30	2.33	2.09
Mittelwert	2.39	16.5	72.5
Standardabweichung	0.228	46.1	175

Modell deutlich höher. Da sich nach den Abbildungen 8.10-8.12 selbst eine kleinere Änderung dieser Parameter sehr stark auf die Zielfunktion auswirkt, lassen sich damit die höheren Standardabweichungen der GB- und GH-Modelle aus Tabelle 8.10 erklären. Insgesamt kann allerdings für alle drei Modelle der Schluss gezogen werden, dass durch die Optimierung ein robustes, lokales Minimum gefunden werden konnte.

Tabelle 8.11: Median (MD), Mittelwert (MW) und Standardabweichung (SD) des G-, GB- und GH-Modells nach der Optimierung.

Para.	G			GB			GH		
	MD	MW	SD	MD	MW	SD	MD	MW	SD
$\phi$	0.0806	0.0783	0.0303	0.160	0.172	0.097	0.0790	0.0766	0.0129
$\chi$	9.06	8.80	1.22	7.55	7.52	1.37	9.56	9.12	1.28
$\beta$	4302	4567	1108	6642	6559	1579	7834	7573	1335
$\eta$	0.991	0.991	0.0003	0.991	0.974	0.084	0.991	0.944	0.151
$\sigma_f$	0.611	0.611	0.002	0.610	0.626	0.161	0.617	0.774	0.379
$\sigma_c$	1.44	1.44	0.005	1.44	1.42	0.146	1.43	1.31	0.269
$\alpha_0$				1.95	1.92	2.61			
$\alpha_n$							9.94	11.2	5.19

Wie bereits festgestellt wurde gilt, je kleiner die Volatilität der Parameter  $\sigma_f$  und  $\sigma_c$  ist, desto robuster ist das Minimum. Da diese Parameter, wie auch schon beim BHR- und BR-Modell, den beiden Phasen eine eindeutige Volatilität zuordnen, hat sich dieser Zusammenhang erwartbar bestätigt. Für den Parameter  $\eta$  kann sogar ein Randoptimum beobachtet werden. Dies ist auch der Grund, warum hier die Volatilität relativ gering ist und eine erhöhte Volatilität mit einem höheren Zielfunktionswert korreliert. Ein möglicher Grund für diese Beobachtung ist, dass  $\eta$  die Strategiewechselwahrscheinlichkeit der Agenten und damit das Volatilitätsclustering

beeinflusst und bereits kleine Änderungen von  $\eta$  diese stark verändern<sup>10</sup>. Da eine hohe Volatilität von  $\eta$  mit erhöhten Volatilitäten von  $\sigma_f$  und  $\sigma_c$  einhergeht, ist eine andere Möglichkeit, dass die Modelle abweichende Strategievolatilitäten durch eine Änderung von  $\eta$  kompensieren<sup>11</sup>. Die anderen gemeinsamen Parameter  $\phi$ ,  $\chi$ ,  $\beta$  sowie der Parameter  $\alpha_n$  des GH-Modells zeigen eine etwas höhere, untereinander vergleichbare relative Volatilität. Allerdings ist diese immer noch kleiner als der Parameterwert, womit keiner der Parameter von vorneherein für die Optimierung als unwichtig angesehen werden kann. Einzig für den Bias  $\alpha_0$  des GB-Modells gilt das nicht und zusammen mit dem, im Vergleich zum Basismodell, erhöhten Zielfunktionswert aus Tabelle 8.10 kann somit durch dessen Einführung keine Verbesserung erreicht werden.

### 8.2.2 Güte der Abbildung der Momente

Im Allgemeinen bestätigt die Tabelle 8.12 die Ergebnisse aus Tabelle 8.10. Alle Modelle bilden sowohl die Momente als auch die Gesamtverteilung gut ab, wobei auch hier das GH-Modell am besten und das GB-Modell am schlechtesten abschneidet. Schaut man sich allerdings die Abbildung der einzelnen Momente an, so fällt auf, dass das GB-Modell diese insgesamt am besten abbildet, womit sich die schlechtere Gesamtabbildung nur auf eine weniger genaue Replikation der Kovarianzen zurückführen lässt. Insgesamt wird bei den Gewinnmodellen eine ähnliche Anpassungsgüte wie bei den BHR- und BR-Modellen erreicht.

---

<sup>10</sup>Je höher  $\eta$  ist, desto weniger stark wirken sich aktuelle Gewinne aus, womit die Agenten weniger dazu neigen ihre Strategie zu wechseln, während für niedrigere Werte von  $\eta$  genau das Gegenteil passiert.

<sup>11</sup>Eine Erhöhung bzw. Verringerung von  $\sigma_f$  oder  $\sigma_c$  kann z.B. durch geringere bzw. höhere Aufenthaltsdauer im Fundamental- oder Technikerregime kompensiert werden.

Tabelle 8.12: Vergleich der empirischen (emp) und simulierten (sim) Momente sowie Güte der Momentabbildung für das G-, GB- und GH-Modell. Die Güte der Momentabbildung wird dabei anhand der p-Werte des Verteilungstests von Franke und Westerhoff (2012) bestimmt.

- $|r|$ : Absolute Rendite
- $H(|r|, q)$ : Hill-Schätzer des  $q$  Verteilungsanteils der absoluten Rendite
- $\rho(|r|, \tau)$ : Autokorrelation der absoluten Rendite zur Lag-Ordnung  $\tau$
- $CVaR(r, p)$ : CVaR zum Konfidenzniveau  $p$
- $\bar{V}(r, p)$ : Durchschnittlicher Abstand der  $VaR_p$  Unterschreitungen
- $V(r, p)$ : Standardabweichung der  $VaR_p$  Unterschreitungen

Momente	emp	G		GB		GH	
		sim	p-Wert	sim	p-Wert	sim	p-Wert
$100 \cdot \sigma(r)$	0.895	0.839	0.968	0.840	0.980	0.843	0.979
$H( r , 0.05)$	0.300	0.294	0.944	0.296	0.959	0.293	0.933
$\rho( r , \{5, \dots, 15\})$	0.160	0.144	0.913	0.147	0.913	0.146	0.930
$\rho( r , \{20, \dots, 30\})$	0.127	0.116	0.897	0.117	0.895	0.116	0.903
$\rho( r , \{45, \dots, 55\})$	0.102	0.0866	0.903	0.0866	0.908	0.0870	0.908
$100 \cdot CVaR(r, 0.05)$	-2.03	-2.01	0.997	-2.01	0.999	-2.01	0.996
$\bar{V}(r, 0.05)$	19.8	23.0	0.861	23.1	0.863	23.0	0.862
$\sigma(V(r, 0.05))$	38.1	41.2	0.942	41.4	0.955	41.0	0.944
Gesamt			0.731		0.727		0.750

### 8.2.3 Zuverlässigkeit der MSM Schätzung

Aus den Abbildungen 8.10-8.12 geht hervor, dass sich durch eine Parameterverschiebung für alle Modelle eine Verschlechterung des Zielfunktionswerts ergibt. Am stärksten wirkt sich eine Verschiebung bei den Volatilitätsparametern  $\sigma_f$  und  $\sigma_c$  aus, womit diese Parameter erwartungsgemäß für alle Modelle die größte Bedeutung haben. Der Parameter  $\eta$  zeigt wiederum ein deutliches Randoptimum. Eine starke Verschlechterung der Zielfunktion tritt selbst bei relativ kleinen Parameterverringerungen ein, wobei größere Abweichungen sich im Vergleich dazu allerdings nicht viel stärker auswirken. Insgesamt bestätigt sich damit, was bereits aus den Ergebnissen der Tabelle 8.11 vermuten ließ.  $\phi$  und  $\chi$  haben in allen drei Modellen die Tendenz, sich stärker auf die Zielfunktion bei einer Erhöhung des Parameter-

### MSM Zielfunktionsänderung des G-Modells

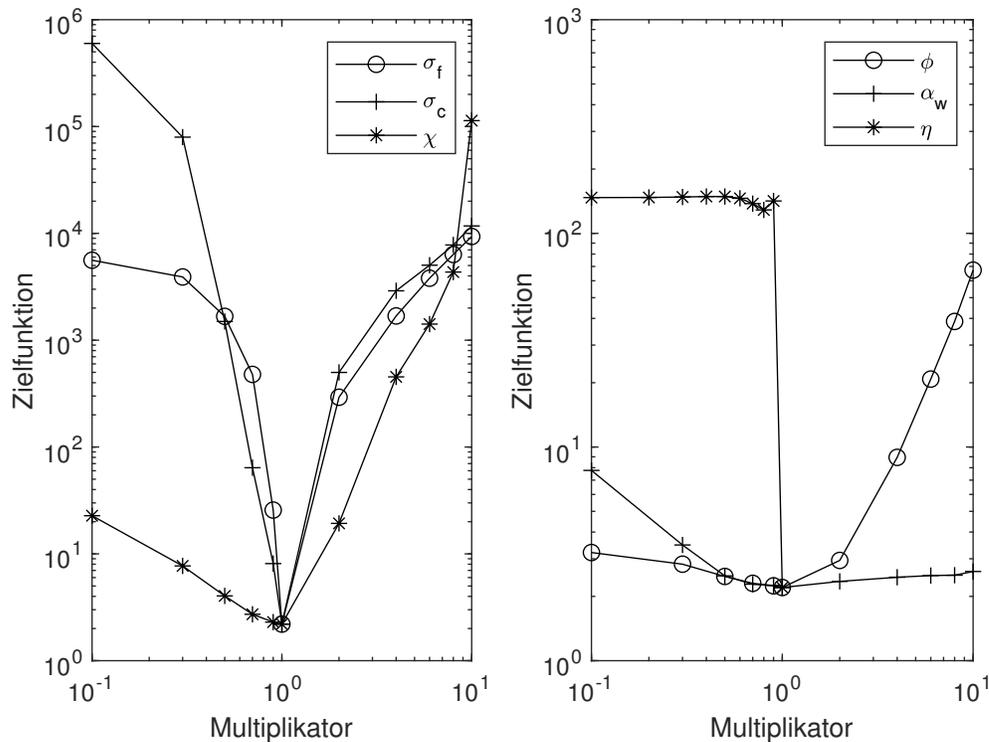


Abbildung 8.10: Verlauf der MSM Zielfunktion des G-Modells unter Variation der Parameter  $\sigma_f$ ,  $\sigma_c$ ,  $\chi$  (links) und  $\phi$ ,  $\alpha_w$ ,  $\eta$  (rechts).

wertes auszuwirken, wobei die Auswirkungen von  $\chi$  größtenteils stärker ausfallen. Der Grund hierfür ist, dass  $\phi$  und  $\chi$  in den Gewinnmodellen auch Einfluss auf die Strategieauswahl und damit das Volatilitätsclustering haben. Eine Verschiebung des Gewinneinflussparameters  $\alpha_w$  hingegen ändert die Zielfunktion des G-Modells kaum. Dies gilt allerdings nicht für das GB- und GH-Modell, in denen die Auswirkungen von  $\alpha_w$  deutlich stärker ist. Dies ist auf die Wirkung der zusätzliche Parameter  $\alpha_0$  und  $\alpha_n$  zurückzuführen, welche ein Gegengewicht zu  $\alpha_w$  in darstellen. Des Weiteren kann beobachtet werden, dass  $\alpha_w$  die Zielfunktion bei einer Verringerung stärker erhöht. Das liegt daran, dass eine Verkleinerung von  $\alpha_w$  zu eher gleichverteilten Strategieanteilen führt, während eine Erhöhung nur die Auswirkung von kleineren Gewinndifferenzen

MSM Zielfunktionsänderung des GB-Modells

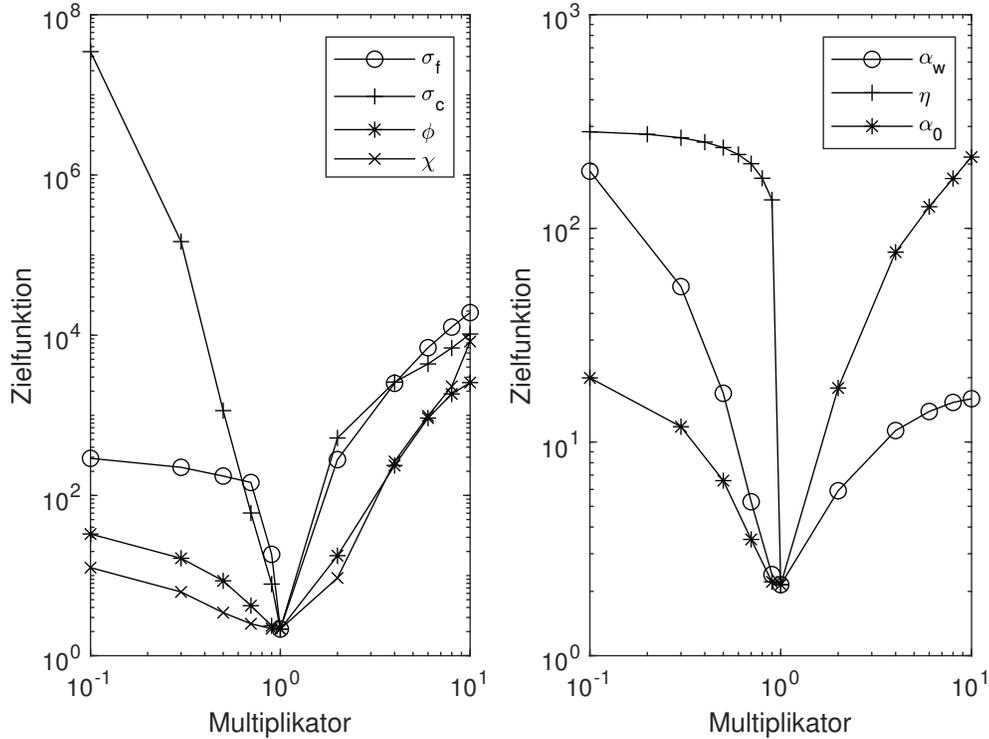


Abbildung 8.11: Verlauf der MSM Zielfunktion des GB-Modells unter Variation der Parameter  $\sigma_f$ ,  $\sigma_c$ ,  $\phi$ ,  $\chi$  (links) und  $\alpha_w$ ,  $\eta$ ,  $\alpha_0$  (rechts).

beeinflusst. Auch die zusätzlichen Parameter  $\alpha_0$  und  $\alpha_n$  zeigen deutlich Auswirkungen auf die Zielfunktion, womit der Schluss nahe liegt, dass beide Erweiterungen des G-Modells nicht redundant sind. Dies war nach den Ergebnissen aus Tabelle 8.11 für den Parameter  $\alpha_0$  nicht unbedingt zu erwarten. Des Weiteren ist zu beobachten, dass der Parameter  $\alpha_n$  nur bei einer Erhöhung größere Auswirkungen auf die Zielfunktion zeigt. Der Grund hierfür ist, dass für kleine Werte von  $\alpha_w$  das GH-Modell dem G-Modell gleich, während für hohe  $\alpha_w$  Werte kein Strategiewechsel und damit auch kein Volatilitätsclustering mehr vorliegt.

Tabelle 8.13 zeigt, dass die Abweichung zwischen dem wahren Parametersatz und den Medianwerten des Schwarms für alle Modelle relativ gering ist, wobei hier im

### MSM Zielfunktionsänderung des GH-Modells

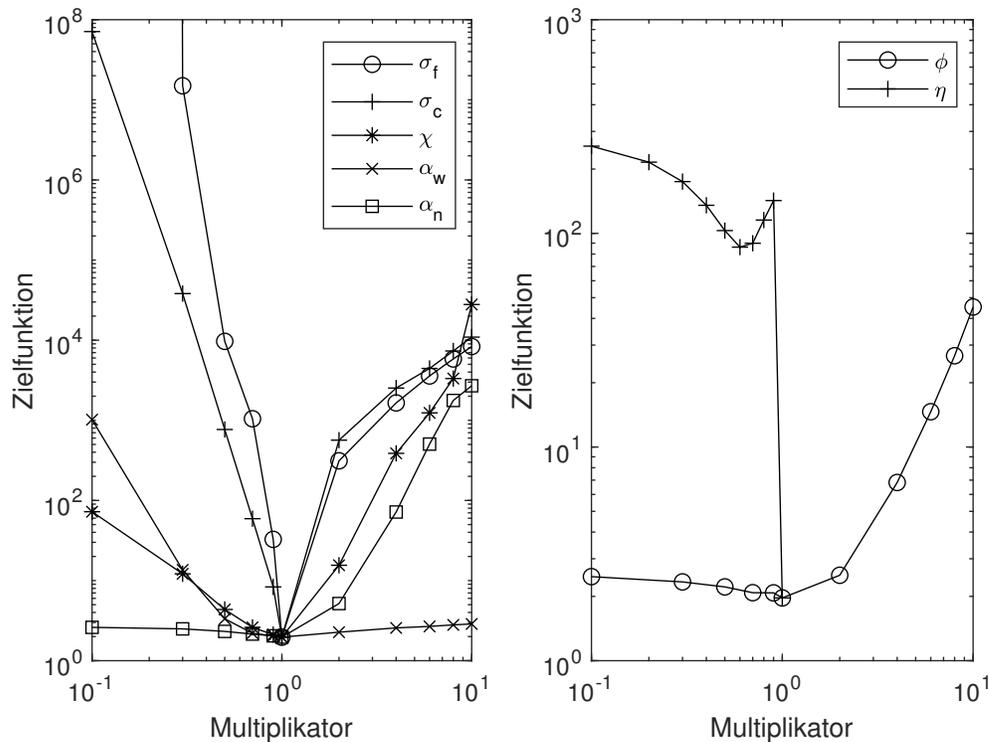


Abbildung 8.12: Verlauf der MSM Zielfunktion des GH-Modells unter Variation der Parameter  $\sigma_f$ ,  $\sigma_c$ ,  $\chi$ ,  $\alpha_w$ ,  $\alpha_0$  (links) und  $\phi$ ,  $\eta$  (rechts).

Gegensatz zu den Ergebnissen aus Tabelle 8.11 das GB- und GH-Modell eine bessere Anpassung aufweisen. Dabei sind die Abweichung bei den Voltilitätsparametern  $\sigma_f$  und  $\sigma_c$  am kleinsten, was wiederum konsistent mit den Ergebnissen aus den Abbildungen 8.10-8.12 ist. Zuletzt soll noch die Robustheit der MSM Schätzung untersucht werden. Da auch für die gewinnbasierten Modelle weitere lokale Minima mit  $\sigma_f > \sigma_c$  existieren können, muss hier ebenfalls eine zusätzliche MSM Optimierung mit der Beschränkung  $\sigma_f > \sigma_c$  durchgeführt werden. In Tabelle 8.14 sind die Parameter- und Zielfunktionswerte dieses alternativen Minima dargestellt. Auch für die gewinnbasierten Modelle weisen die alternativen Minima eine deutlich schlechter Abbildung der Momente auf. Von daher kann für auch die Gewinnmodelle von Franke und

Tabelle 8.13: Vergleich der wahren und optimierten Parameter für das G-, GB- und GH-Modell. Als für die Optimierung repräsentative Werte sind hierbei die Mediane der Zielfunktionswerte (ZFW) und Parameter dargestellt.

Parameter	G		GB		GH	
	wahr	optimiert	wahr	optimiert	wahr	optimiert
ZFW		3.22		1.35		1.48
$\phi$	0.102	0.0847	0.169	0.302	0.0800	0.303
$\chi$	9.82	8.90	7.00	6.72	9.37	7.67
$\beta$	4207	3404	6783	9717	8308	6105
$\eta$	0.991	0.980	0.991	0.992	0.991	0.986
$\sigma_f$	0.611	0.595	0.612	0.615	0.617	0.615
$\sigma_c$	1.44	1.33	1.44	1.47	1.43	1.42
$\alpha_0$			2.52	10.9		
$\alpha_n$					9.92	12.0

Westerhoff (2012) von einer robusten MSM Optimierung ausgegangen werden.

Tabelle 8.14: Vergleich der wahren und optimierten Parameter für das G-, GB- und GH-Modell im Fall  $\sigma_f > \sigma_c$ . Als für die Optimierung repräsentative Werte sind hierbei die Mediane der Zielfunktionswerte (ZFW) und Parameter dargestellt.

Parameter	G		GB		GH	
	wahr	optimiert	wahr	optimiert	wahr	optimiert
ZFW		9.73		11.5		24.9
$\phi$	0.102	0.0330	0.169	0.463	0.0800	0.877
$\chi$	9.82	9.97	7.00	1.02	9.37	4.51
$\beta$	4207	827	6783	6873	8308	8142
$\eta$	0.991	0.992	0.991	0.982	0.991	0.784
$\sigma_f$	0.611	1.56	0.612	1.49	0.617	1.49
$\sigma_c$	1.44	0.621	1.44	0.636	1.43	0.644
$\alpha_0$			2.52	19.1		
$\alpha_n$					9.92	33.6

### 8.2.4 Zusammenfassung der wichtigsten Optimierungsergebnisse

Zusammenfassend kann die Optimierung als erfolgreich angesehen werden. Auch hier wird für jede Modellvariation ein robustes, lokales Minimum aufgefunden, welches die Momente gut abbildet. Allerdings haben auch die gewinnbasierten Modelle von Franke und Westerhoff (2012) ebenfalls die Schwäche, dass die Momente zwar gut repliziert werden, aber die Variabilität der Varianz deutlich geringer ausfällt als dies bei den empirischen Renditen der Fall ist.

## 8.3 Modell von Brock und Hommes (1998)

In diesem Kapitel werden die MSM-Optimierungsergebnisse der Modellvarianten von Brock und Hommes (1998) untersucht. Die Tabelle 8.15 zeigt die zur Optimierung verwendeten Parametergrenzen.

Tabelle 8.15: Obere und untere Parametergrenzen bei der Optimierung der Modelle von Brock und Hommes (1998).

Parameter	F		T		FT	
	U. Grz.	O. Grz.	U. Grz.	O. Grz.	U. Grz.	O. Grz.
$v$	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0
$g$	0.001	0.1	0.001	0.1	0.001	0.1
$\lambda$	1	10000	1	10000	1	10000
$\beta$	1	10000	1	10000	1	10000
$\eta$	0.001	0.999	0.001	0.999	0.001	0.999
$\sigma_f$	0.001	0.1			0.001	0.1
$\sigma_c$	0.001	0.1			0.001	0.1
$\sigma_g$			0.001	0.01		
$\sigma_r$			0.01	10	0.01	10

Durch die obere Grenze von  $g = 0.1$  ist auch die Stabilitätsbedingung in (3.52) für alle Modellvarianten von Brock und Hommes (1998) erfüllt, da für die sichere Gewinnrate der risikolosen Investitionsmöglichkeit  $R > 1$  gelten muss. Damit ist die Stabilität des Systems immer vorhanden.

Verlauf von Rendite, Preis und Marktanteil des Fraktionsmodells

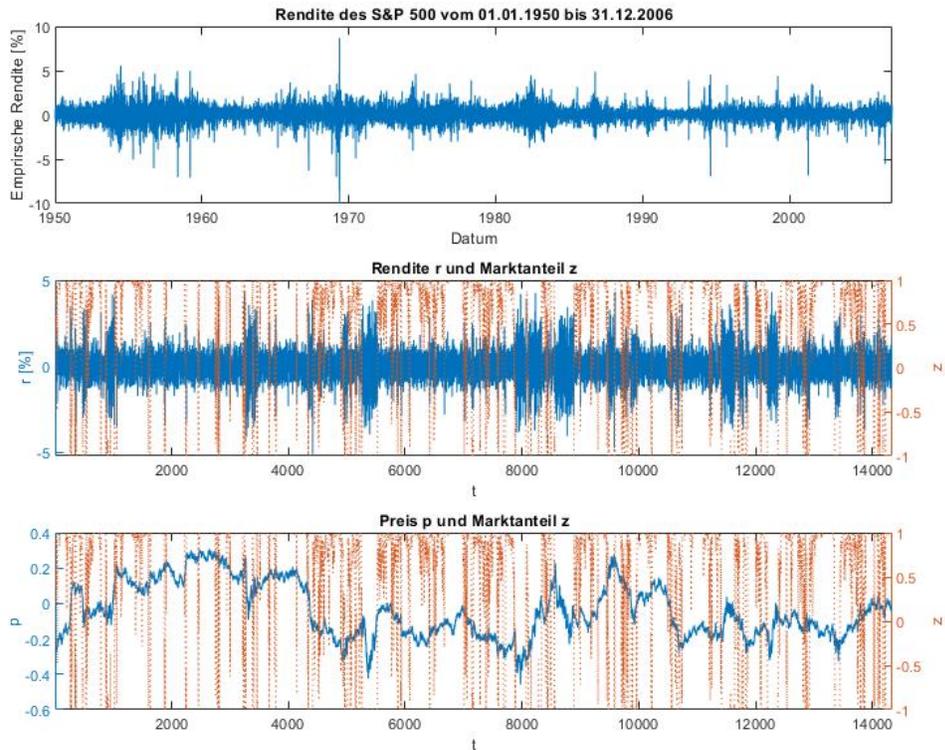


Abbildung 8.13: Vergleich der empirischen (oben) und simulierten Rendite des F-Modells (mittig) sowie Darstellung der dazugehörigen simulierten Preiszeitreihe (unten).

Wie in den Abbildungen 8.13-8.15 zu sehen, gleicht die simulierte Rendite des F- und FT-Modells der Rendite der gewinnbasierten ABM von Franke und Westerhoff (2012). Da diese Modelle eine ähnliche Struktur aufweisen, ist dies auch nicht weiter verwunderlich. Einzig beim T-Modell kann kein Volatilitätsclustering beobachtet werden, was vermuten lässt, dass der darin verwendete Zufallseinfluss für eine adäquate Abbildung der Stylized-Facts von empirischen Renditen nicht geeignet ist. Insgesamt verstärkt sich damit der Eindruck, dass die Definition des Zufallseinflusses in der Preisgleichung hauptverantwortlich für die Güte der Renditeabbildung ist.

### 8.3. MODELL VON Brock und Hommes (1998)

Verlauf von Rendite, Preis und Marktanteil des Turnovermodells

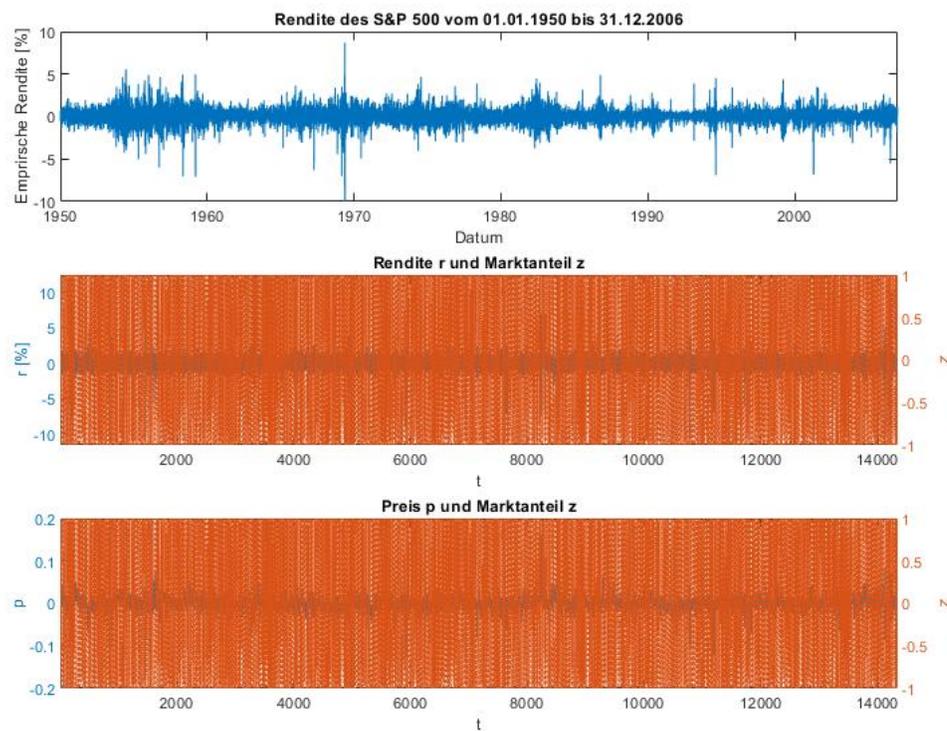


Abbildung 8.14: Vergleich der empirischen (oben) und simulierten Rendite des T-Modells (mittig) sowie Darstellung der dazugehörigen simulierten Preiszeitreihe (unten).

Verlauf von Rendite, Preis und Marktanteil des Kombinationsmodells

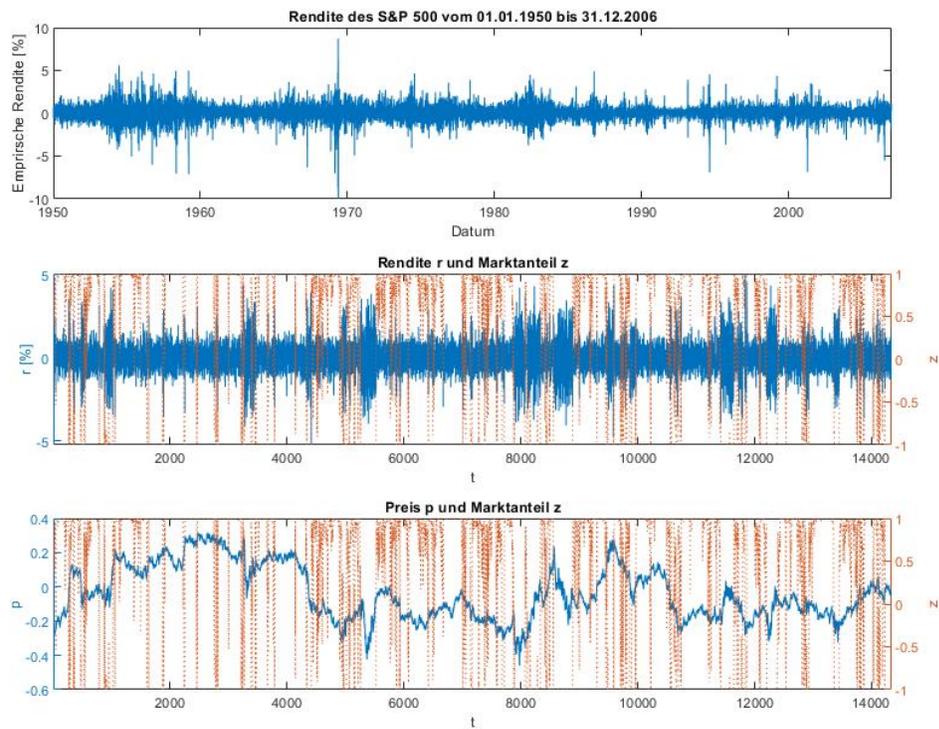


Abbildung 8.15: Vergleich der empirischen (oben) und simulierten Renditen des FT-Modells (mittig) sowie Darstellung der dazugehörigen simulierten Preiszeitreihe (unten).

### 8.3.1 Endwert der Optimierung und Analyse der zugehörigen Parameter

Tabelle 8.16: Ergebnisse des Stationaritäts- (Stat) und Ergodizitätstests (Ergo) nach Wald und Wolfowitz (1940) für alle Momente der Modelle von Brock und Hommes (1998).

Signifikanzniveaus für die Ablehnung der Nullhypothese der Stationarität bzw. Ergodizität: (\*)  $p=0.1$ , (\*\*)  $p=0.05$  (\*\*\*)  $p=0.01$ .

- $|r|$ : Absolute Rendite
- $H(|r|, q)$ : Hill-Schätzer des  $q$  Verteilungsanteils der absoluten Rendite
- $\rho(|r|, \tau)$ : Autokorrelation der absoluten Rendite zur Lag-Ordnung  $\tau$
- $CVaR(r, p)$ : CVaR zum Konfidenzniveau  $p$
- $\bar{V}(r, p)$ : Durchschnittlicher Abstand der  $VaR_p$  Unterschreitungen
- $\sigma(V(r, p))$ : Standardabweichung der  $VaR_p$  Unterschreitungen

Momente	F		T		FT	
	Stat	Ergo	Stat	Ergo	Stat	Ergo
$100 \cdot \sigma(r)$	0.129	0.517	0.410	0.946	0.0450**	0.911
$H( r , 0.05)$	0.465	0.408	0.0686*	0.336	0.658	0.0573*
$\rho( r , \{5, \dots, 15\})$	0.202	0.841	1	0.254	0.310	0.704
$\rho( r , \{20, \dots, 30\})$	0.173	0.704	0.602	0.408	0.0138**	0.383
$\rho( r , \{45, \dots, 55\})$	0.200	0.576	0.899	0.187	0.490	0.103
$100 \cdot CVaR(r, 0.05)$	0.749	0.336	0.138	1	0.653	0.383
$\bar{V}(r, 0.05)$	0.109	0.187	0.370	0.982	0.0533*	0.982
$\sigma(V(r, 0.05))$	0.135	0.0268**	0.0272**	0.840	0.713	0.911

Nach Tabelle 8.16 ist Anzahl der Ablehnung zwar etwas höher als beim BHR- und BR-Modell, allerdings ist auch hier die Ablehnungsrate immer noch relativ gering<sup>12</sup>. Da zusätzlich auch hier keine Ablehnung auf dem  $p = 0.01$  Niveau existiert, können auch für die Momente der F-, T- und FT-Modelle Stationarität und Ergodizität nicht abgelehnt werden. Die Zielfunktionsendwerte der Optimierung in Tabelle 8.17 bestätigen nochmal quantitativ, was bereits qualitativ aus dem Vergleich der simulierten Renditen in Abbildung 8.13-8.15 zu entnehmen war, nämlich dass die Opti-

<sup>12</sup>Insgesamt ist die Anzahl der Ablehnungen sogar etwas geringer als beim G-, GB- und GH-Modell.

mierung des T-Modells nicht erfolgreich ist. Des Weiteren fallen die relativ hohen Differenzen zwischen Median und Mittelwert sowie die hohe Standardabweichung auf, was darauf hinweist, dass eine signifikante Anzahl von Partikel das Minimum nicht auffindet. Damit ist das Minimum für das F- und FT-Modell deutlich weniger eindeutig ausgeprägt als es bei den gewinnbasierten ABM von Franke und Westerhoff (2012) der Fall war. Außerdem sind die Medianwerte der F- und FT-Modelle etwas höher als die der vorherigen ABM, was auf eine leicht schlechtere Abbildung der Momente hindeutet.

Tabelle 8.17: Mittelwert, Median und Standardabweichung der Zielfunktionswerte der Modelle von Brock und Hommes (1998) nach der Optimierung.

	F	T	FT
Median	3.12	126	3.05
Mittelwert	20.6	233	151
Standardabweichung	43.5	318	374

Tabelle 8.18: Median (MD), Mittelwert (MW) und Standardabweichung (SD) der Parameter der Modelle von Brock und Hommes (1998) nach der Optimierung.

Parameter	F			FT		
	MW	MD	SD	MW	MD	SD
$v$	$3.06 \cdot 10^{-8}$	0.00522	0.0446	$2.22 \cdot 10^{-11}$	0.0481	0.172
$g$	0.0100	0.0109	0.0105	0.00124	0.00891	0.0173
$\lambda$	1184	2102	2209	3598	3851	1758
$\beta$	4476	4684	1776	7370	6849	2022
$\eta$	0.993	0.990	0.0214	0.992	0.974	0.0840
$\sigma_f$	0.00611	0.00614	$2.04 \cdot 10^{-4}$	0.00612	0.00688	0.00227
$\sigma_c$	0.0144	0.0144	0.00131	0.0144	0.0130	0.00321
$\sigma_r$				0.0955	0.114	0.139

Da die MSM-Optimierung des T-Modells ohnehin nicht in der Lage ist, die empirische Rendite adäquat zu replizieren, ist eine genauere Evaluierung der Optimierung sinnlos, weshalb das T-Modell hier nicht weiter untersucht werden soll. Was die Parameter der beiden anderen Modellvarianten angeht, so zeigen diese ein ähnliches Verhalten

### 8.3. MODELL VON Brock und Hommes (1998)

wie bei den gewinnorientierten Modellen von Franke und Westerhoff (2012). Größere Abweichungen treten einzig bei dem Fundamentalparameter  $v$  auf. Der Grund für die hohen Differenzen zwischen Mittelwert und Median bzw. die relativ hohe Standardabweichung beim Parameter  $v$  ist, dass hier ein Randoptimum bei  $v \approx 0$  vorliegt. Solange der Parameter  $v$  klein genug ist, ändert sich das Systemverhalten kaum, so dass ein großer Parameterbereich für  $v \ll 1$  existiert, in dem die Zielfunktion kaum auf Änderungen des Parameters reagiert.

#### 8.3.2 Güte der Abbildung der Momente

Tabelle 8.19: Vergleich der empirischen und simulierten Momente sowie Güte der Momentabbildung für die Modelle von Brock und Hommes (1998). Die Güte der Momentabbildung wird dabei anhand der p-Werte des Verteilungstests von Franke und Westerhoff (2012) bestimmt.

- $|r|$ : Absolute Rendite
- $H(|r|, q)$ : Hill-Schätzer des  $q$  Verteilungsanteils der absoluten Rendite
- $\rho(|r|, \tau)$ : Autokorrelation der absoluten Rendite zur Lag-Ordnung  $\tau$
- $CVaR(r, p)$ : CVaR zum Konfidenzniveau  $p$
- $\bar{V}(r, p)$ : Durchschnittlicher Abstand der  $VaR_p$  Unterschreitungen
- $V(r, p)$ : Standardabweichung der  $VaR_p$  Unterschreitungen

Momente	empirisch	F		FT	
		simuliert	p-Wert	simuliert	p-Wert
$100 \cdot \sigma(r)$	0.895	0.821	0.901	0.824	0.919
$H( r , 0.05)$	0.300	0.293	0.938	0.295	0.931
$\rho( r , \{5, \dots, 15\})$	0.160	0.142	0.886	0.143	0.878
$\rho( r , \{20, \dots, 30\})$	0.127	0.113	0.866	0.113	0.862
$\rho( r , \{45, \dots, 55\})$	0.102	0.0856	0.883	0.0850	0.875
$100 \cdot CVaR(r, 0.05)$	-2.03	-2.00	0.992	-2.01	0.992
$\bar{V}(r, 0.05)$	19.8	24.2	0.769	24.0	0.756
$\sigma(V(r, 0.05))$	38.1	42.2	0.894	42.0	0.919
Gesamt			0.716		0.685

Die Anpassung der Momente in Tabelle 8.19 bestätigt die bisherigen Ergebnisse. Sowohl das F- als auch das FT-Modell bilden die Momente sowie deren Gesamtver-

teilung gut ab, wobei das F-Modell eine bessere Anpassungsgüte zeigt. Damit konnte durch die Erweiterung des F-Modells keine Verbesserung erreicht werden. Insgesamt ist die Anpassungsgüte der Momente des F-Modells, wie es bereits die Tabelle 8.17 suggeriert, allerdings leicht geringer als die der vorherigen ABM.

### 8.3.3 Zuverlässigkeit der MSM Schätzung

MSM Zielfunktionsänderung des Fraktionsmodells

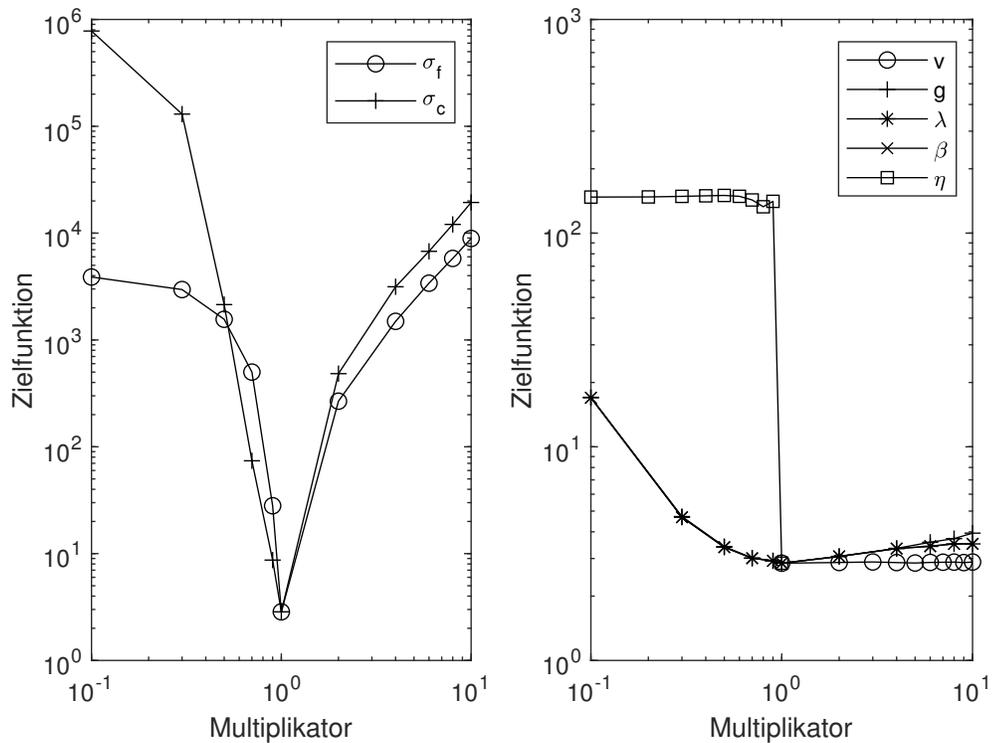


Abbildung 8.16: Verlauf der MSM Zielfunktion des F-Modells unter Variation der Parameter  $\sigma_f$ ,  $\sigma_c$  (links) und  $v$ ,  $g$ ,  $\lambda$ ,  $\beta$ ,  $\eta$  (rechts).

Aus den Abbildungen 8.16-8.17 kann entnommen werden, dass auch für die F- und FT-Modelle durch eine Parameterverschiebung nur eine Verschlechterung des Zielfunktionswerts eintritt. Die Auswirkungen sind bei den Volatilitätsparametern  $\sigma_f$

### MSM Zielfunktionsänderung des Kombinationsmodells

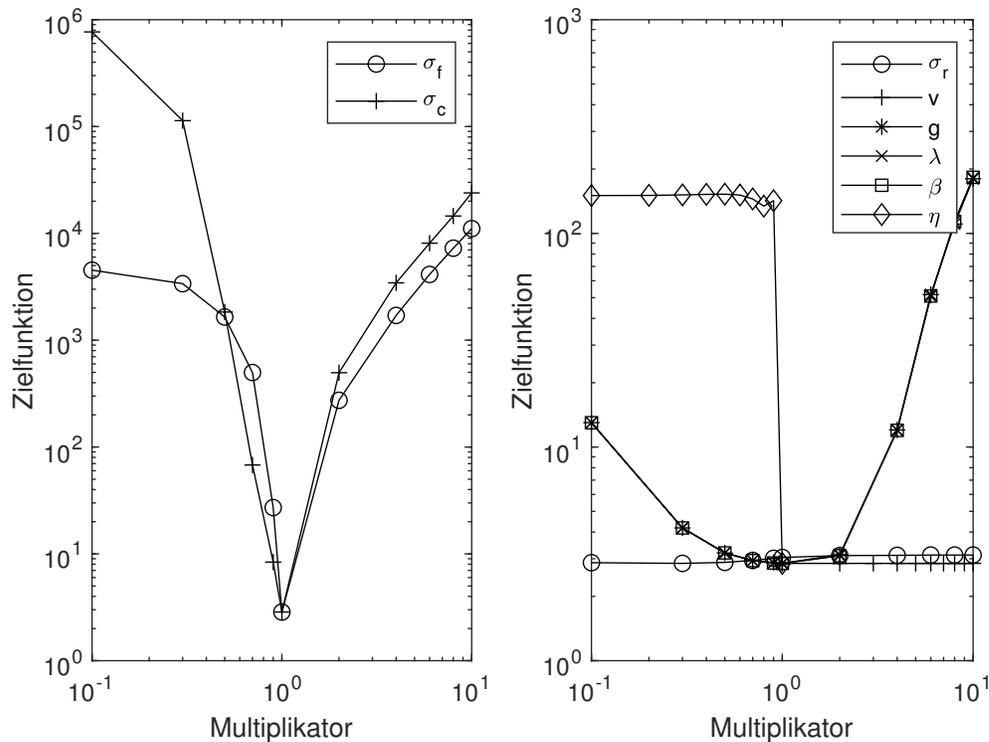


Abbildung 8.17: Verlauf der MSM Zielfunktion des FT-Modells unter Variation der Parameter  $\sigma_f$ ,  $\sigma_c$  (links) und  $\sigma_r$ ,  $v$ ,  $g$ ,  $\lambda$ ,  $\beta$ ,  $\eta$  (rechts).

und  $\sigma_c$  dabei wieder erwartungsgemäß am deutlichsten ausgeprägt. Auch für den Parameter  $\eta$  lässt sich wieder ein Randoptimum mit einer deutlichen Verschlechterung der Zielfunktion bei nur geringen Abweichungen beobachten. Die restlichen Parameter zeigen eher geringe Auswirkungen. Dabei kann für die Parameter  $g$ ,  $\lambda$  und  $\beta$  ein fast gleiches Verhalten beobachtet werden. Die genauen Auswirkungen sind dabei jedoch modellabhängig. Während im F-Modell die Parametersensitivität bei einer Verringerung deutlich größer ist, ist dies beim FT-Modell genau umgekehrt. Der Parameter  $v$  ist in beiden Modellen sehr niedrig ( $v \approx 0$ ) und zeigt ebenfalls ein Randoptimum, wobei eine Erhöhung hier fast keine Auswirkungen auf den Zielfunktionswert hat. Des Weiteren wirkt sich der Parameter  $\sigma_r$  im FT-Modell nur minimal

auf die Zielfunktion aus, was die Beobachtung bestätigt, dass die Einführung des zusätzlichen Volatilitätsparameter  $\sigma_r$  fast keine Auswirkungen auf die Funktionsweise des zugrunde liegenden F-Modells hat.

Tabelle 8.20: Vergleich der wahren und optimierten Parameter für das F- und FT-Modell. Als für die Optimierung repräsentative Werte sind hierbei die Mediane der Zielfunktionswerte (ZFW) und Parameter dargestellt.

Parameter	F		FT	
	wahr	optimiert	wahr	optimiert
ZFW		3.27		3.74
$v$	$2.7 \cdot 10^{-7}$	0.00133	0	$2.02 \cdot 10^{-6}$
$g$	0.00581	0.0334	0.00102	0.0974
$\lambda$	1284	44.8	3665	9376
$\beta$	3718	9964	8534	909
$\eta$	0.992	0.992	0.992	0.991
$\sigma_f$	0.00611	0.00628	0.00610	0.00589
$\sigma_c$	0.0144	0.0148	0.0144	0.0137
$\sigma_r$			0.154	0.0104

Tabelle 8.21: Vergleich der wahren und optimierten Parameter für das F- und FT-Modell im Fall  $\sigma_f > \sigma_c$ . Als für die Optimierung repräsentative Werte sind hierbei die Mediane der Zielfunktionswerte (ZFW) und Parameter dargestellt.

Parameter	F		FT	
	wahr	optimiert	wahr	optimiert
ZFW		10.9		2.26
$v$	$2.7 \cdot 10^{-7}$	0	0	$3.25 \cdot 10^{-6}$
$g$	0.00581	0.00103	0.00102	0.00107
$\lambda$	1284	8354	3665	4015
$\beta$	3718	1982	8534	5486
$\eta$	0.992	0.992	0.992	0.993
$\sigma_f$	0.00611	0.0144	0.00610	0.0144
$\sigma_c$	0.0144	0.00604	0.0144	0.00594
$\sigma_r$			0.154	0.0106

Wie in Tabelle 8.20 zu sehen, sind die Abweichung zwischen dem wahren Parametersatz und den Medianwerten des Schwarms für beide Modelle relativ gering. Die

### 8.3. MODELL VON Brock und Hommes (1998)

Abweichung ist dabei bei den Volatilitätsparametern  $\sigma_f$ ,  $\sigma_c$  und  $\eta$  am kleinsten, was konsistent zu den Ergebnissen aus den Abbildungen 8.16-8.17 ist. Die Abweichungen bei den anderen Parametern sind etwas größer, wobei sich die Gründe dafür leicht erklären lassen. Für die Parameter  $\lambda$  und  $\beta$  liegen die größeren Abweichungen daran, dass beide Parameter in einer multiplikativen Beziehung zueinander stehen und somit eine Abweichung bei einem Parameter durch den anderen kompensiert werden kann. Des Weiteren weisen die Parameter  $\lambda$  und  $\beta$  sowohl im F- und FT-Modell eine eher geringe Sensitivität auf. Dasselbe kann für den Parameter  $g$  beobachtet werden, auch hier ist die Sensitivität recht gering. Bei  $v$  ist es nur die Bedingung  $v \ll 1$  von Bedeutung, sodass Abweichungen nur wenig Einfluss haben, solange diese Bedingung erfüllt ist. Der Parameter  $\sigma_r$  hat wiederum kaum Einfluss auf das Verhalten des FT-Modells, was eine gute Anpassung des wahren Wertes fast unmöglich macht. Zuletzt soll wieder die Robustheit der MSM Schätzung untersucht werden. Da auch für die hier untersuchten Modelle weitere lokale Minima mit  $\sigma_f > \sigma_c$  existieren können, muss ebenfalls eine zusätzliche MSM Optimierung mit der Beschränkung  $\sigma_f > \sigma_c$  durchgeführt werden. In Tabelle 8.21 sind die Parameter- und Zielfunktionswerte dieser alternativen Minima dargestellt. Für das F-Modell weist das alternative Minimum, wie erwartet, eine schlechtere Abbildung der Momente auf. Dies ist beim FT-Modell allerdings nicht der Fall. Hier verbessert sich der Zielfunktionswert für  $\sigma_f > \sigma_c$  leicht, was darauf schließen lässt, dass bei diesem Modell die Zielfunktionsminima für  $\sigma_c > \sigma_f$  und  $\sigma_f > \sigma_c$  in etwa äquivalent sind. Insgesamt kann aber auch für die Modelle von Brock und Hommes (1998) die MSM Optimierung als robust angesehen werden.

#### 8.3.4 Zusammenfassung der wichtigsten Optimierungsergebnisse

Auch für das Modell von Brock und Hommes (1998) kann die Optimierung insgesamt als größtenteils erfolgreich angesehen werden, wobei dies hier aber nur für die F- und FT-Variante gilt. Nur für diese beiden Varianten kann ein robustes, lokales Minimum aufgefunden werden, welches die Momente gut abbildet. Das T-Modell hingegen ist

nicht in der Lage die empirischen Momente zu replizieren. Allerdings besitzt auch das Modell von Brock und Hommes (1998) dieselbe Schwäche wie die vorherigen ABM. Auch hier ist die Variabilität der Varianz deutlich geringer als bei den empirischen Renditen.

## 8.4 Modell von Lux et al. (2005)

In diesem Absatz werden die Ergebnisse des Modells von Lux et al. (2005) präsentiert. In der Tabelle 8.22 sind die Parametergrenzen der Optimierung gegeben, wobei der Parameter  $n$  der Freiheitsgrad der t-verteilter Zufallsgröße ist und von daher nur bei dieser Modellspezifikation benötigt wird. Die untere Grenze von  $n$  wurde dabei so gewählt, dass nur Werte von  $n > 2$  möglich sind, womit die Existenz des zweiten Verteilungsmoments garantiert ist<sup>13</sup>. Des Weiteren sind die oberen Grenzen für  $\alpha_f$  und  $\alpha_r$  kleiner gewählt worden als es theoretisch nötig ist<sup>14</sup>. Dies ist aus Gründen der Optimierungsgeschwindigkeit erfolgt. Es hat sich gezeigt, dass eine obere Grenze von  $\alpha_{f,r} > 100$  nur zu kleinen Unterschieden im Systemverhalten führt, allerdings die Geschwindigkeit der Optimierung merkbar verringert.

Tabelle 8.22: Obere und untere Parametergrenzen bei der Optimierung des Modells von Lux et al. (2005).

Parameter	U. Grenze	O. Grenze
$\alpha_f$	1.01	100
$\alpha_r$	1.01	100
$\delta$	$10^{-9}$	0.001
$r_0$	$2.5 \cdot 10^{-4}$	2.5
$n$	2.01	20

Die Abbildung 8.18 und 8.19 zeigen die Renditeverläufe der verschiedenen Modellvarianten nach Abschluss der Optimierung.

Grundsätzlich zeigt sich in den Abbildungen 8.18 und 8.19, dass die Renditeverläufe dieses ABM eine deutlich höhere Variation der Volatilität aufweisen als die der vorherigen ABM.

<sup>13</sup>Der Grund hierfür ist, dass die Volatilität eines der anzupassenden Momente ist.

<sup>14</sup>Für die obere Grenze von  $\delta = 0.001$  ergibt sich ein theoretischer Maximalwert von  $\alpha_{f,r} = 1000$ .

#### 8.4. MODELL VON Lux et al. (2005)

Verlauf von Rendite und Marktanteil des Modells von Lux et al. (2005)

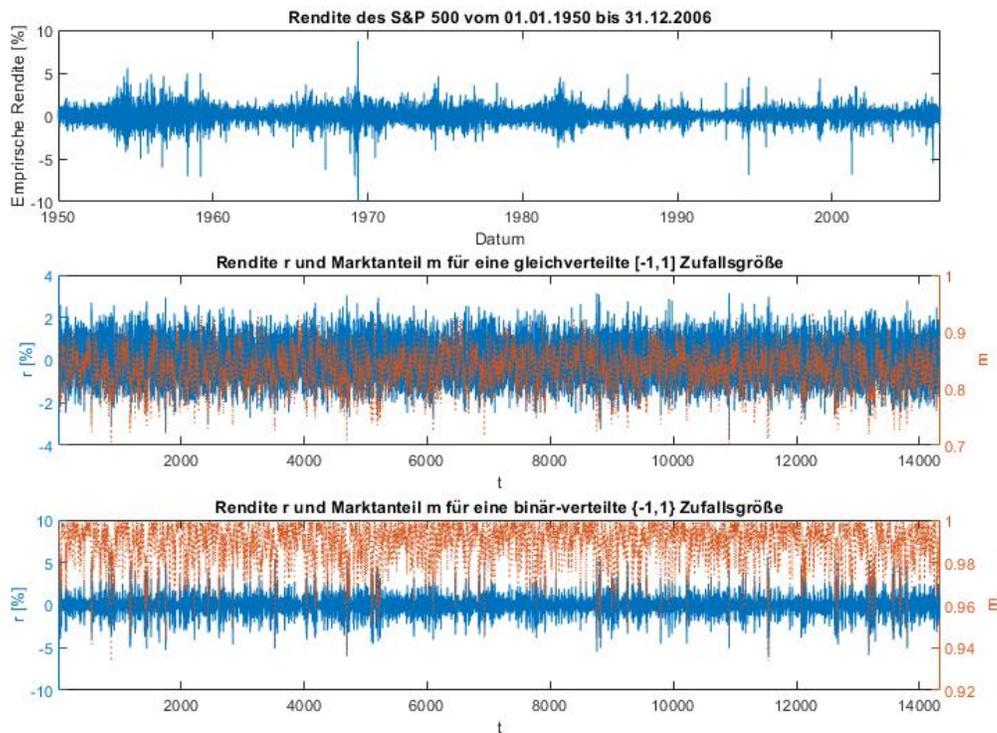


Abbildung 8.18: Vergleich der empirischen (oben) und simulierten Rendite für das Modell von Lux et al. (2005) mit gleichverteilter (mittig) und binär-verteilter (unten) Zufallsgröße.

rigen Modelle, womit sie also diesen Aspekt der empirischen Rendite besser abbilden. Der Grund darin liegt in der höheren Variabilität des Marktanteils. Des Weiteren kann in der Abbildung 8.18 der Einfluss der Zufallsgröße auf die Rendite beobachtet werden. Eine gleichverteilte  $[-1, 1]$  Zufallsgröße führt auch zu einer annähernd gleichverteilten Rendite, die kein Volatilitätsclustering oder Fat-Tails aufweist. Im Gegensatz dazu führt eine  $\{-1, 1\}$  binär-verteilte Zufallsvariable dazu, dass die Fat-Tails zu stark ausgeprägt sind, während das Volatilitätsclustering nur schwach vorhanden ist. Wird eine normalverteilte Zufallsgröße verwendet, verbessert sich, im Vergleich

Verlauf von Rendite und Marktanteil des Modells von Lux et al. (2005)

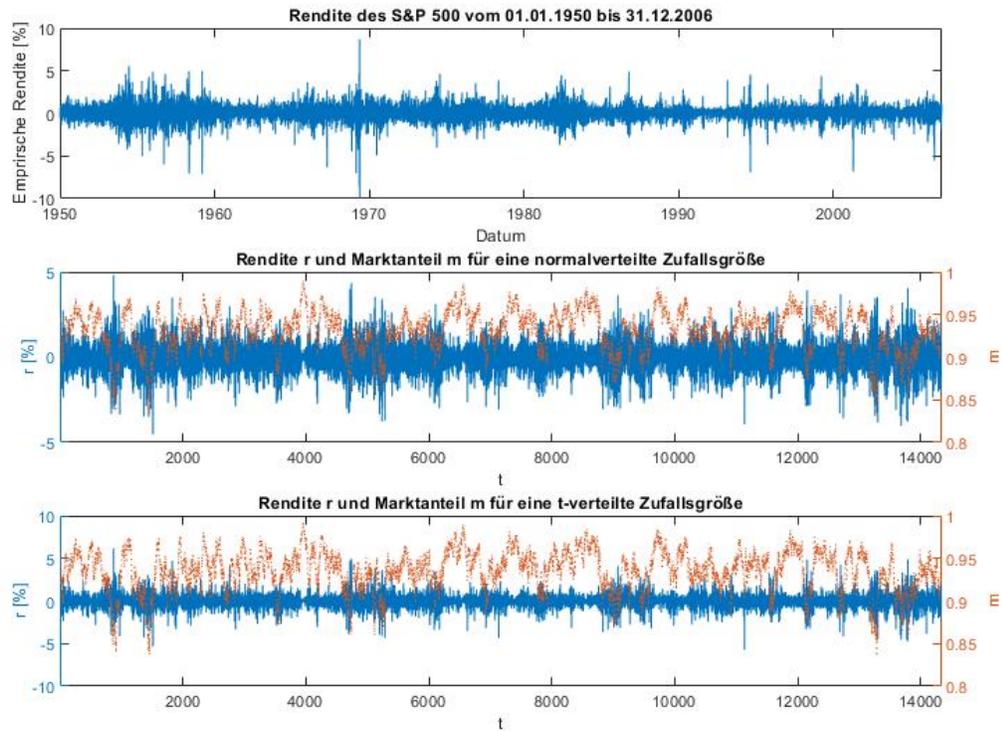


Abbildung 8.19: Vergleich der empirischen (oben) und simulierten Rendite für das Modell von Lux et al. (2005) mit normalverteillter (mittig oben) und t-verteilter (mittig unten) Zufallsgröße.

mit der binär-verteilten Zufallsgröße, die Abbildung des Volatilitätsclustering. Die Fat-Tails sind dagegen allerdings schwächer ausgeprägt als es in der Realität der Fall ist. Einen guten Kompromiss dazu stellt eine t-Verteilung dar, welche sowohl Fat-Tails als auch Volatilitätsclustering in ähnlicher Stärke generiert, wie sie die empirische Rendite aufweist. Hinzukommt, dass die Variabilität der Volatilität dabei nicht verloren geht. Außerdem können in Abbildungen 8.18-8.20 Unterschiede in der Verteilung des Marktanteils beobachtet werden. Zwar ist der Marktanteil für alle Verteilungen weit im von Fundamentalisten dominierten Bereich lokalisiert, allerdings

#### 8.4. MODELL VON Lux et al. (2005)

ergeben sich für die binär- und gleichverteilte Zufallsgröße deutlich unterschiedliche Marktanteilsverteilungen, während bei der normal- und t-verteilten Zufallsgröße eine nahezu identische Verteilung vorliegt. Dies erklärt auch, warum sich für die Normal- und t-Verteilung ein fast identisches Systemverhalten ergibt.

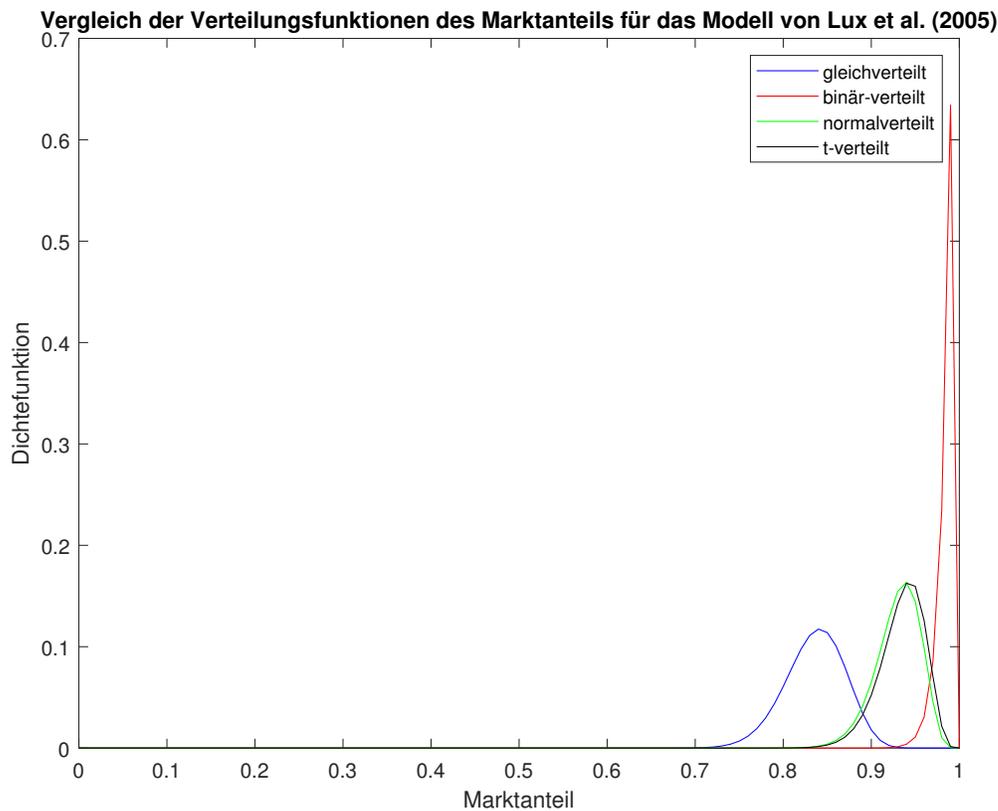


Abbildung 8.20: Vergleich der Verteilungsfunktion des Marktanteils für das Modell von Lux et al. (2005) für die verschiedenen Zufallsverteilungen.

Betrachtet man zusätzlich noch die Preiszeitreihen des Modells von Lux et al. (2005) in Abbildung 8.21, fällt sofort ein Unterschied zu den vorherigen Modellen auf. Anders als bei allen Modellvariationen von Franke und Westerhoff (2012, 2016) und Brock und Hommes (1998) gibt es beim Preisverlauf in Abbildung 8.21 keinen Rückkehreffekt zum Fundamentalwert und die Preisbewegung gleicht eher einem

Random-Walk. Dies liegt daran, dass im Modell von Lux et al. (2005) der Fundamentalwert in der Renditegleichung nicht berücksichtigt wird.

Verlauf von Preis und Marktanteil des Modells von Lux et al. (2005)

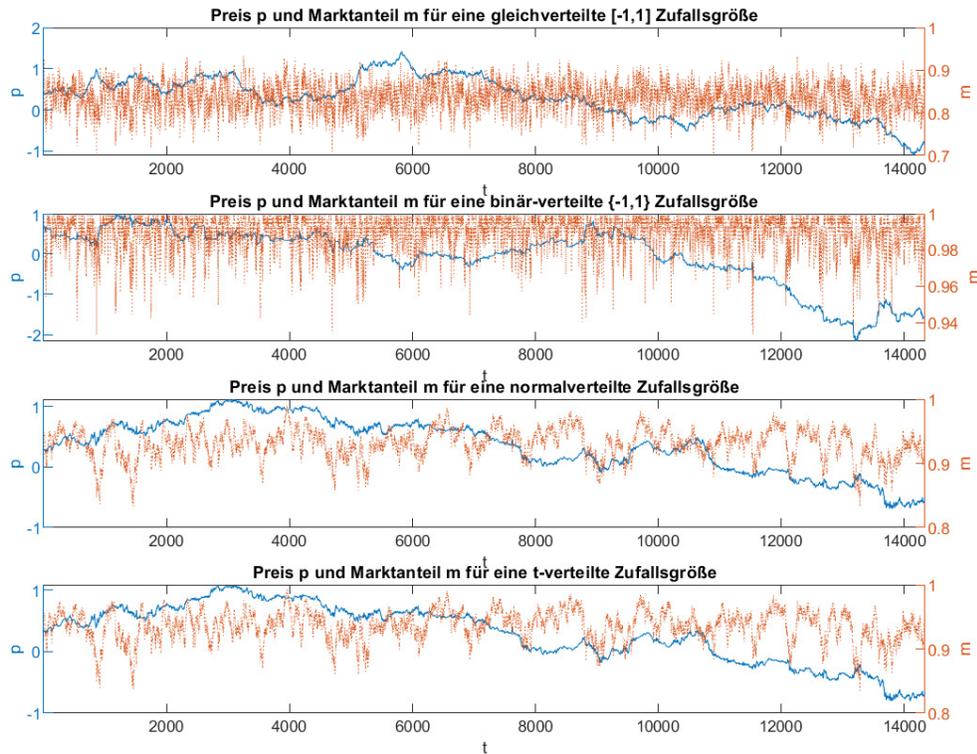


Abbildung 8.21: Vergleich der simulierten Preise des Modells von Lux et al. (2005) mit gleichverteilter (oben), binär-verteilter (mittig oben), normalverteilter (mittig unten) und t-verteilter (unten) Zufallsgröße.

### 8.4.1 Endwert der Optimierung und Analyse der zugehörigen Parameter

In Tabelle 8.23 sind die Ergebnisse der Stationaritäts- und Ergodizitätstests für die einzelnen Momente präsentiert. Da sehr wenige, vereinzelte Ablehnungen auftreten,

8.4. MODELL VON Lux et al. (2005)

Tabelle 8.23: Ergebnisse des Stationaritäts- (Stat) und Ergodizitätstests (Ergo) nach Wald und Wolfowitz (1940) für alle Momente des Modells von Lux et al. (2005). Signifikanzniveaus für die Ablehnung der Nullhypothese der Stationarität bzw. Ergodizität: (\*) p=0.1, (\*\*) p=0.05 (\*\*\*) p=0.01.

- $|r|_t$ : Absolute Rendite
- $H(|r|, q)$ : Hill-Schätzer des  $q$  Verteilungsanteils der absoluten Rendite
- $\rho(|r|, \tau)$ : Autokorrelation der absoluten Rendite zur Lag-Ordnung  $\tau$
- $CVaR(r, p)$ : CVaR zum Konfidenzniveau  $p$
- $\bar{V}(r, p)$ : Durchschnittlicher Abstand der  $VaR_p$  Unterschreitungen
- $\sigma(V(r, p))$ : Standardabweichung der  $VaR_p$  Unterschreitungen

Momente	B		U	
	Stat	Ergo	Stat	Ergo
$100 \cdot \sigma(r)$	0.450	0.639	0.217	0.0375**
$H( r , 0.05)$	0.115	0.0850*	0.273	0.546
$\rho( r , \{5, \dots, 15\})$	0.289	0.911	0.222	0.314
$\rho( r , \{20, \dots, 30\})$	0.319	0.461	0.826	0.383
$\rho( r , \{45, \dots, 55\})$	0.118	0.146	0.458	0.293
$100 \cdot CVaR(r, 0.05)$	0.500	0.546	0.537	0.123
$\bar{V}(r, 0.05)$	0.595	0.383	0.364	0.946
$\sigma(V(r, 0.05))$	0.603	0.187	0.120	0.202

Momente	N		T	
	Stat	Ergo	Stat	Ergo
$100 \cdot \sigma(r)$	0.0576*	0.576	0.187	0.517
$H( r , 0.05)$	0.765	0.982	0.641	0.314
$\rho( r , \{5, \dots, 15\})$	0.965	0.517	0.947	0.112
$\rho( r , \{20, \dots, 30\})$	0.393	0.704	0.197	0.771
$\rho( r , \{45, \dots, 55\})$	0.449	0.236	0.917	0.876
$100 \cdot CVaR(r, 0.05)$	0.182	0.383	0.745	0.488
$\bar{V}(r, 0.05)$	0.901	0.607	0.913	0.876
$\sigma(V(r, 0.05))$	0.567	0.911	0.951	0.771

kann die Nullhypothese auf der Stationarität und Ergodizität der einzelnen Momente für alle Modellvarianten nicht mit ausreichender Konfidenz abgelehnt werden. In Tabelle 8.24 sind die Zielfunktionsendwerte der Optimierung zu sehen. Was sich

bereits beim Vergleich der Renditezeitreihen angedeutet hat, kann auch bei den Zielfunktionsendwerten beobachtet werden. Eine t-verteilte Zufallsgröße führt eindeutig zur besten Abbildung der Momente<sup>15</sup>, während aus einer normalverteilten Zufallsgröße schon eine signifikant schlechtere Anpassung resultiert. Eine gleichverteilte oder binär-verteilte Zufallsgröße kann die Momente insgesamt überhaupt nicht abbilden. Im Weiteren wird daher nur die Modellvariante mit der t-verteilten Zufallsgröße weiter untersucht.

Tabelle 8.24: Mittelwert, Median und Standardabweichung der Zielfunktionswerte des Modells von Lux et al. (2005) nach der Optimierung.

	Lux et al. (2005)			
	G	B	N	T
Median	11743	3508	33.9	4.77
Mittelwert	67765	3508	65.1	5.10
Standardabweichung	155628	0.00441	72.3	0.707

Ein Vergleich der deskriptiven Statistiken der optimierten Parameter in Tabelle 8.25 zeigt, dass die Standardabweichung der einzelnen Parameter relativ klein ist, was auf ein robustes, lokales Minimum hinweist. Des Weiteren ist der Freiheitsgrad der t-Verteilung auch zu groß, um durch diesen alleine die im Modell beobachteten Fat-Tails der simulierten Renditen erklären zu können. Da der Freiheitsgrad einer t-Verteilung auch ihrem Tail-Exponenten entspricht, liegt hier mit  $\alpha \approx 8$  ein deutlich größerer Tail-Exponent als bei den empirischen Renditen<sup>16</sup> vor. Die Fähigkeit, die statistischen Eigenschaften der empirische Renditezeitreihe grundsätzlich zu replizieren, ist also im Modell bereits enthalten und wird durch eine t-verteilte Zufallsgröße nur verbessert.

<sup>15</sup>Insgesamt ist die Anpassung der Momente aber auch bei der t-verteilten Zufallsgröße leicht schlechter als bei den vorherigen ABM.

<sup>16</sup>Der S&P 500 besitzt im Optimierungszeitraum einen Tail-Exponenten von  $\alpha \approx 3.3$ .

#### 8.4. MODELL VON Lux et al. (2005)

Tabelle 8.25: Median, Mittelwert und Standardabweichung der Parameter des Modells von Lux et al. (2005) mit t-verteilter Zufallsgröße nach der Optimierung.

Parameter	Median	Mittelwert	Standardabweichung
$\alpha_f$	87.1	87.2	3.67
$\alpha_r$	6.11	6.09	0.130
$\delta$	0.000142	0.000142	$5.1 \cdot 10^{-6}$
$r_0$	0.0901	0.0905	0.00423
$n$	8.22	8.21	0.202

#### 8.4.2 Güte der Abbildung der Momente

Tabelle 8.26: Vergleich der empirischen und simulierten Momente sowie Güte der Momentabbildung für das Modell von Lux et al. (2005) mit t-verteilter Zufallsgröße. Die Güte der Momentabbildung wird dabei anhand der p-Werte des Verteilungstests von Franke und Westerhoff (2012) bestimmt.

Signifikanzniveau zur Ablehnung der Nullhypothese von identischen Verteilungen: (\*) p=0.1, (\*\*) p=0.05 (\*\*\*) p=0.01.

- $|r|$ : Absolute Rendite
- $H(|r|, q)$ : Hill-Schätzer des  $q$  Verteilungsanteils der absoluten Rendite
- $\rho(|r|, \tau)$ : Autokorrelation der absoluten Rendite zur Lag-Ordnung  $\tau$
- $CVaR(r, p)$ : CVaR zum Konfidenzniveau  $p$
- $\bar{V}(r, p)$ : Durchschnittlicher Abstand der  $VaR_p$  Unterschreitungen
- $V(r, p)$ : Standardabweichung der  $VaR_p$  Unterschreitungen

Momente	empirisch	simuliert	p-Wert
$100 \cdot \sigma(r)$	0.895	0.794	0.802
$H( r , 0.05)$	0.300	0.290	0.970
$\rho( r , \{5, \dots, 15\})$	0.160	0.141	0.971
$\rho( r , \{20, \dots, 30\})$	0.127	0.115	0.978
$\rho( r , \{45, \dots, 55\})$	0.102	0.0810	0.959
$100 \cdot CVaR(r, 0.05)$	-2.03	-1.98	0.996
$\bar{V}(r, 0.05)$	19.8	25.1	0.788
$\sigma(V(r, 0.05))$	38.1	45.2	0.775
Gesamt			0.844

Die p-Werte der einzelnen Momente in Tabelle 8.26 bekräftigen quantitativ die qua-

litativen Beobachtungen der Renditezeitreihen und des Endwertes der Zielfunktion. Dem Modell Lux et al. (2005) mit der t-verteilten Zufallsgröße gelingt es sowohl Fat-Tails als auch Volatilitätsclustering gut zu replizieren. Entgegen den Ergebnissen aus Tabelle 8.24 bildet das Modell von Lux et al. (2005) die Zielfunktionsverteilung von allen ABM sogar am besten ab.

### 8.4.3 Zuverlässigkeit der MSM Schätzung

Wie in Abbildung 8.22 gezeigt, tritt durch eine Parameterverschiebung auch bei der t-verteilten Variante des Modells von Lux et al. (2005) immer eine Verschlechterung des Zielfunktionswerts ein.

Dabei sind die Auswirkungen bei den Parametern  $\alpha_f$ ,  $\alpha_r$  und  $r_0$  am größten. Wie schon bei den vorherigen ABM, sind dies die Parameter, welche die Volatilität direkt beeinflussen. Auch für die restlichen Parameter  $\delta$  und  $n$  lässt sich eine deutliche, wenn auch etwas schwächere Verschlechterung der Zielfunktion bei nur geringen Abweichungen beobachten. Des Weiteren fällt noch auf, dass sich nur für den Parameter  $\delta$  eine Senkung bzw. Erhöhung in etwa gleich auswirken, während die Parameter  $r_0$  und  $n$  deutlich sensitiver auf eine Verringerung ihres Wertes reagieren<sup>17</sup>. Für den Parameter  $n$  ist dieses Verhalten leicht erklärbar. Fällt dieser Parameter, so hören ab bestimmten Schwellenwerten wichtige Verteilungsmomente<sup>18</sup> auf zu existieren, während eine Erhöhung nur dazu führt, dass sich die Zufallsgröße einer Normalverteilung annähert. Für den Parameter  $r_0$  kann etwas ähnliches beobachtet werden. Für kleine Werte von  $r_0$  nimmt nicht nur die Gesamtvolatilität ab, sondern die Schwankungen des Marktanteils wirken sich deutlich stärker auf die Renditezeitreihe aus, was zu einem stärker ausgeprägten Volatilitätsclustering sowie extremeren Ausreißern führt, wobei letzteres durch die t-Verteilung der Zufallsgröße noch verstärkt wird. Größere Werte von  $r_0$  führen hingegen nur zu einer höheren Gesamtvolatilität

<sup>17</sup>Wobei für die Parameter  $\alpha_f$  und  $\alpha_r$  nur eine Verringerung bzw. Erhöhung untersucht wurde, da die optimierten Werte bereits nahe der Unter- bzw. Obergrenze lagen.

<sup>18</sup>Für  $n \leq 4$  bzw.  $n \leq 3$  weist die Verteilung keine Kurtosis bzw. Schiefe mehr auf und sollte  $n \leq 2$  sein, so existiert die Varianz nicht. Da die Varianz bzw. Volatilität explizit eines der zu optimierenden Momente war, scheitert dann natürlich auch die Optimierung.

### MSM Zielfunktionsänderung unter t-verteiletem Zufallseinfluss

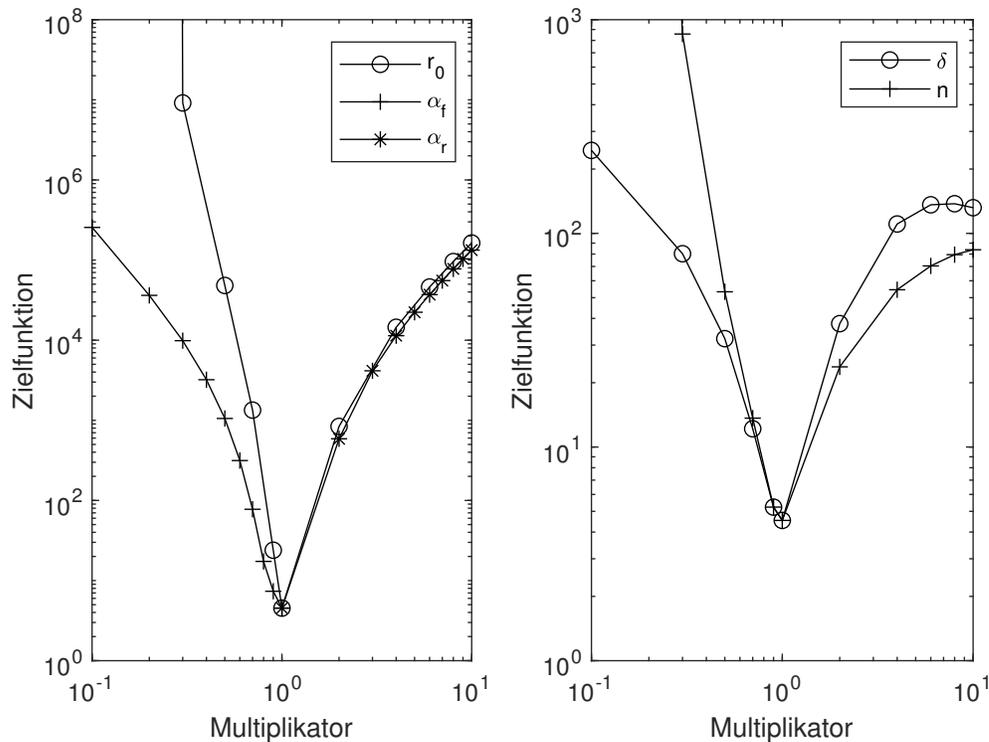


Abbildung 8.22: Verlauf der MSM Zielfunktion des Modell von Lux et al. (2005) mit t-verteilter Zufallsvariable unter Variation der Parameter  $r_0$ ,  $\alpha_f$ ,  $\alpha_r$  (links) und  $\delta$ ,  $n$  (rechts).

und geringerem Volatilitätsclustering.

Nach Tabelle 8.27 sind auch für das Modell von Lux et al. (2005) die Abweichung zwischen dem wahren Parametersatz und den Medianwerten des Schwarms relativ gering. Die Abweichung ist dabei bei allen Parametern etwa gleich groß. Da alle Parameter in Abbildung 8.22 eine starke Sensitivität gegenüber Abweichungen aufweisen, ist dies konsistent zu den vorherigen Ergebnissen. Insgesamt kann von daher auch für das Modell von Lux et al. (2005) die MSM Optimierung als robust angesehen werden.

Tabelle 8.27: Vergleich der wahren und optimierten Parameter für das Modell von Lux et al. (2005) mit t-verteilter Zufallsgröße. Als für die Optimierung repräsentative Werte sind hierbei die Mediane der Zielfunktionswerte (ZFW) und Parameter dargestellt. Signifikanzniveau zur Ablehnung der Nullhypothese von identischen Verteilungen: (\*) p=0.1, (\*\*) p=0.05 (\*\*\*) p=0.01.

Lux et al. (2005)		
Parameter	wahr	optimiert
ZFW		2.88
$\alpha_f$	85.7	95.0
$\alpha_r$	6.00	5.77
$\delta$	0.000144	0.000123
$r_0$	0.0898	0.107
$n$	8.22	8.28

#### 8.4.4 Zusammenfassung der wichtigsten Optimierungsergebnisse

Für das Modell von Lux et al. (2005) führt die Optimierung mit der MSM Methode zu unterschiedlichen Ergebnissen, wobei für die meisten Varianten keine gute Anpassung der Momente erreicht werden kann. Der Grund hierfür ist, dass sich die vermuteten Probleme mit der Definition des Zufallseinflusses der Preisgleichung bestätigt haben. Durch eine andere Modellierung des Zufallseinflusses werden die generierte Renditezeitreihen stark beeinflusst. Von all den hier untersuchten Varianten des Zufallseinflusses ist deshalb nur die t-verteilte Zufallsgröße in der Lage, die Momente gut abzubilden und realistische Renditezeitreihen zu generieren. Dabei deuten die Ergebnisse der Tabelle 8.26 darauf hin, dass das die t-verteilte Variante des Modells von Lux et al. (2005) die Momente sogar etwas besser abbildet als die vorherigen ABM. Zugleich zeigt ein Vergleich der Renditezeitreihen, dass die Rendite der t-verteilten ABM Variante der empirischen Rendite deutlich ähnlicher ist. Dies weist auf eine Schwäche der MSM hin, nämlich dass eine Überanpassung der Momente stattfindet, was nicht unbedingt zu einer guten Replikation aller Eigenschaften der empirischen Rendite führt. Zusammenfassend kann das Modell von Lux et al. (2005) mit der Spezifikation des t-verteilten Zufallseinflusses als bisher beste Replikation

## 8.5. MODELL VON Alfarano et al. (2008)

einer empirischen Renditezeitreihe angesehen werden, da es einerseits in der Lage ist Renditezeitreihen zu generieren, welche die größte Ähnlichkeit zu empirischen Renditen aufweisen (qualitatives Kriterium) und andererseits die Zielfunktionsverteilung am besten abbildet (quantitatives Kriterium). Zusammen mit der großen Variabilität der Volatilität könnte sich dieses Modell daher gut für eine akkurate VaR-Prognose eignen.

### 8.5 Modell von Alfarano et al. (2008)

Zum Abschluss werden noch Ergebnisse des Modells von Alfarano et al. (2008) diskutiert. Die Tabelle 8.28 zeigt die zur Optimierung verwendeten Parametergrenzen.

Tabelle 8.28: Obere und untere Parametergrenzen bei der Optimierung des Modells von Alfarano et al. (2008).

Parameter	U. Grenze	O. Grenze
$\lambda$	$1.0 \cdot 10^{-5}$	0.01
$\delta$	$1.0 \cdot 10^{-6}$	0.01
$\sigma_f$	$1.0 \cdot 10^{-6}$	0.1
$r_0$	0.01	100

Die Rendite in Abbildung 8.23 zeigt ein deutliches Volatilitätsclustering, allerdings ist die Variation der Volatilität eher mit denen der Modelle von Franke und Westerhoff (2012, 2016) und Brock und Hommes (1998) zu vergleichen. Der Grund hierfür ist, dass das System, wie bei den Modellen von Franke und Westerhoff (2012, 2016) und Brock und Hommes (1998), die meiste Zeit fast vollständig von einer Strategie dominiert wird<sup>19</sup>. Im Unterschied zu den Modellen von Franke und Westerhoff (2012, 2016) und Brock und Hommes (1998) ist die Volatilität in diesen beiden Phasen gleich und nur in den kurzen Wechselphasen bildet sich eine höhere Volatilität heraus. Dieses Systemverhalten wird auch durch die Verteilungsfunktion des Marktstimmung in Abbildung 8.24 bestätigt. Demnach ist die Marktstimmungswahrscheinlichkeit am

<sup>19</sup>Wobei sich die Strategien hier allerdings nicht in eine Fundamental- und Trendstrategie aufteilen, sondern eine positive bzw. negative Stimmung der Noise-Trader umfassen.

Verlauf von Rendite, Preis und Marktstimmung des Modells von Alfarano et al. (2008)

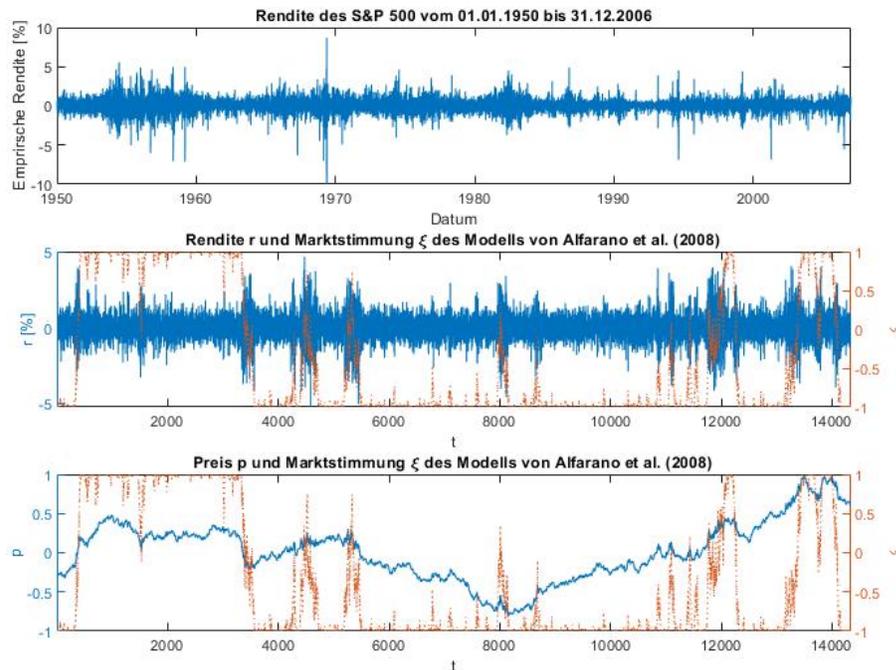


Abbildung 8.23: Vergleich der empirischen (oben) und simulierten Rendite für das von Modell Alfarano et al. (2008) (mittig) sowie Darstellung der dazugehörigen simulierten Preiszeitreihe (unten).

höchsten, wenn eine der beiden Strategien fast vollständig das System dominiert, während das Minimum der Verteilung sich am Punkt befindet, an dem beide Strategien gleich stark vertreten sind. Der Preisverlauf in Abbildung 8.23 wiederum ähnelt eher dem des Modells von Lux et al. (2005). Auch hier existiert kein Zusammenhang zwischen der dominanten Strategie und dem dazugehörigen Preis. Größere Preissprünge können allerdings nur in Phasen beobachtet werden, in der keine der beiden Strategien von einer breiten Mehrheit der Agenten verfolgt wird.

## 8.5. MODELL VON Alfarano et al. (2008)

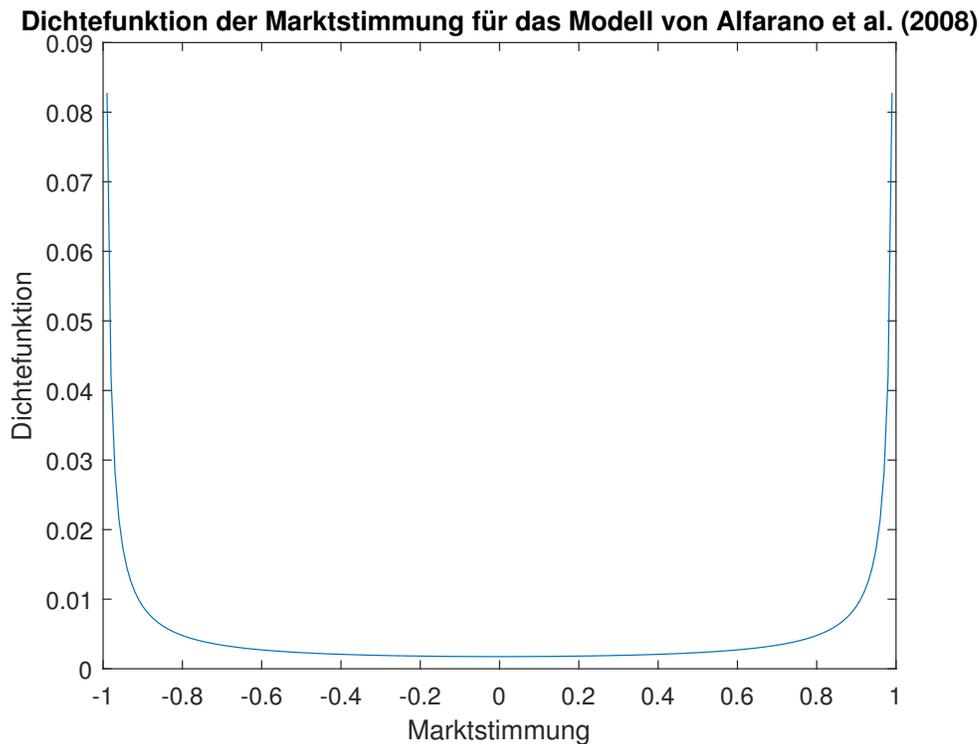


Abbildung 8.24: Verteilungsfunktion der Marktstimmung für das Modell von Alfarano et al. (2008). Es liegt eine bimodale Verteilung vor, deren Maxima bei den Marktstimmungswerten  $\xi \approx 1$  und  $\xi \approx -1$  liegt. Dies bedeutet, die Noise-Trader sind meistens entweder überwiegend optimistisch ( $\xi \approx 1$ ) oder pessimistisch ( $\xi \approx -1$ ) eingestellt.

### 8.5.1 Endwert der Optimierung und Analyse der zugehörigen Parameter

Tabelle 8.29 zeigt die Ergebnisse der Stationaritäts- und Ergodizitätstests für die einzelnen Momente. Da nur einige wenige Ablehnungen auf dem  $p = 0.1$  Niveau existieren, kann auch für das Modell von Alfarano et al. (2008) insgesamt keine Ablehnung der Nullhypothese der Stationarität und Ergodizität der einzelnen Momente vorgenommen werden. In Tabelle 8.30 sind die Zielfunktionsendwerte der Optimierung gezeigt. Diese gleichen in etwa den Werten des Modells von Lux et al. (2005)

Tabelle 8.29: Ergebnisse des Stationaritäts- (Stat) und Ergodizitätstests (Ergo) nach Wald und Wolfowitz (1940) für alle Momente des Modells von Alfarano et al. (2008). Signifikanzniveaus für die Ablehnung der Nullhypothese der Stationarität bzw. Ergodizität: (\*) p=0.1, (\*\*) p=0.05 (\*\*\*) p=0.01.

- $|r|$ : Absolute Rendite
- $H(|r|, q)$ : Hill-Schätzer des  $q$  Verteilungsanteils der absoluten Rendite
- $\rho(|r|, \tau)$ : Autokorrelation der absoluten Rendite zur Lag-Ordnung  $\tau$
- $CVaR(r, p)$ : CVaR zum Konfidenzniveau  $p$
- $\bar{V}(r, p)$ : Durchschnittlicher Abstand der  $VaR_p$  Unterschreitungen
- $\sigma(V(r, p))$ : Standardabweichung der  $VaR_p$  Unterschreitungen

Momente	Stationarität	Ergodizität
$100 \cdot \sigma(r)$	0.0705*	0.876
$H( r , 0.05)$	0.418	0.460
$\rho( r , \{5, \dots, 15\})$	0.909	0.0634*
$\rho( r , \{20, \dots, 30\})$	0.0925*	0.159
$\rho( r , \{45, \dots, 55\})$	0.772	0.159
$100 \cdot CVaR(r, 0.05)$	0.884	0.134
$\bar{V}(r, 0.05)$	0.818	0.488
$\sigma(V(r, 0.05))$	0.930	0.460

und sind damit leicht höher als bei den Modellen von Franke und Westerhoff (2012) und Brock und Hommes (1998). Demnach konnte auch hier ein adäquates Minimum gefunden werden. Des Weiteren suggeriert die geringe Standardabweichung, dass der Großteil der Partikel ein robustes, lokales Minimum auffinden konnte. Dieser Eindruck wird durch die fast gleichen Werte für Median und Mittelwert gestützt, da dies suggeriert, dass kaum Ausreißer existieren und damit so gut wie alle Partikel dasselbe Minimum aufgefunden haben.

Tabelle 8.30: Mittelwert, Median und Standardabweichung der Zielfunktionswerte des Modells von Alfarano et al. (2008) nach der Optimierung.

Median	4.15
Mittelwert	4.15
Standardabweichung	0.0274

### 8.5. MODELL VON Alfarano et al. (2008)

Diese Schlussfolgerung wird auch durch die Ergebnisse der einzelnen Parameter in Tabelle 8.31 bestätigt, da alle Parameter fast gleiche Mediane und Mittelwerte sowie eine geringe Standardabweichung aufweisen.

Tabelle 8.31: Median, Mittelwert und Standardabweichung der Parameter des Modells von Alfarano et al. (2008) nach der Optimierung.

Parameter	Median	Mittelwert	Standardabweichung
$\lambda$	$7.8 \cdot 10^{-5}$	$7.8 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-6}$
$\delta$	0.00504	0.00505	$4.4 \cdot 10^{-5}$
$\sigma_f$	0.00588	0.00587	$7.5 \cdot 10^{-6}$
$r_0$	0.146	0.146	0.000611

### 8.5.2 Güte der Abbildung der Momente

Tabelle 8.32: Vergleich der empirischen und simulierten Momente sowie Güte der Momentabbildung für das Modell von Alfarano et al. (2008). Die Güte der Momentabbildung wird dabei anhand der p-Werte des Verteilungstests von Franke und Westerhoff (2012) bestimmt. Signifikanzniveau zur Ablehnung der Nullhypothese von identischen Verteilungen: (\*) p=0.1, (\*\*) p=0.05 (\*\*\*) p=0.01.

- $|r|$ : Absolute Rendite
- $H(|r|, q)$ : Hill-Schätzer des  $q$  Verteilungsanteils der absoluten Rendite
- $\rho(|r|, \tau)$ : Autokorrelation der absoluten Rendite zur Lag-Ordnung  $\tau$
- $CVaR(r, p)$ : CVaR zum Konfidenzniveau  $p$
- $\bar{V}(r, p)$ : Durchschnittlicher Abstand der  $VaR_p$  Unterschreitungen
- $V(r, p)$ : Standardabweichung der  $VaR_p$  Unterschreitungen

Momente	empirisch	simuliert	p-Wert
$100 \cdot \sigma(r)$	0.895	0.822	0.953
$H( r , 0.05)$	0.300	0.280	0.874
$\rho( r , \{5, \dots, 15\})$	0.160	0.148	0.962
$\rho( r , \{20, \dots, 30\})$	0.127	0.121	0.964
$\rho( r , \{45, \dots, 55\})$	0.102	0.0854	0.955
$100 \cdot CVaR(r, 0.05)$	-2.03	-1.96	0.953
$\bar{V}(r, 0.05)$	19.8	23.9	0.850
$\sigma(V(r, 0.05))$	38.1	42.1	0.934
Gesamt			0.747

Insgesamt bestätigt die Tabelle 8.32 die Ergebnisse aus Tabelle 8.30. Das Modell von Alfarano et al. (2008) bildet sowohl die einzelnen Momente als auch deren Gesamtverteilung gut ab.

### 8.5.3 Zuverlässigkeit der MSM Schätzung

#### MSM Zielfunktionsänderung des Modells von Alfarano et al. (2008)

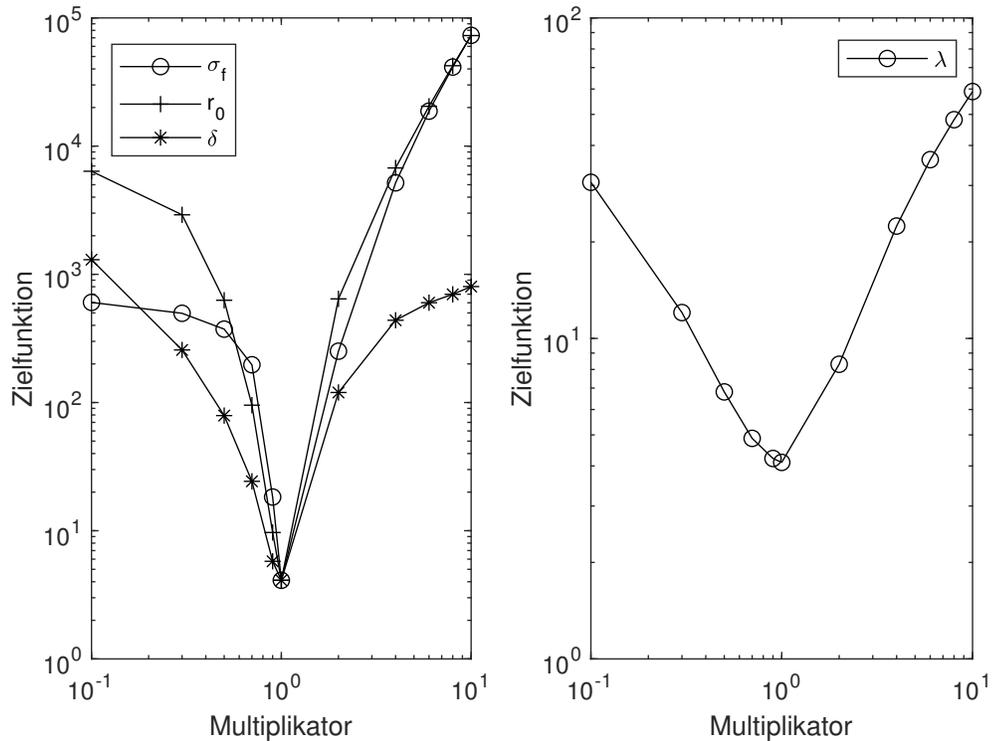


Abbildung 8.25: Verlauf der MSM Zielfunktion des Modells von Alfarano et al. (2008) unter Variation der Parameter  $\sigma_f$ ,  $r_0$ ,  $\delta$  (links) und  $\lambda$  (rechts).

Aus der Abbildung 8.25 geht hervor, dass sich für alle Parameter durch Verschiebung eine Verschlechterung des Zielfunktionswerts eintritt. Am stärksten wirkt sich die Verschiebung dabei bei den Parametern  $\sigma_f$  und  $r_0$  aus. Wie bei den vorherigen Modellen sind dies die Parameter welche sich direkt auf die Volatilität des Systems

### 8.5. MODELL VON Alfarano et al. (2008)

auswirken. Auch der Parameter  $\delta$  verursacht eine hohe Verschlechterung der Zielfunktion bei Parameterverschiebungen. Etwas kleiner, aber immer noch signifikant, ist die Erhöhung der Zielfunktion beim Parameter  $\lambda$ . Insgesamt reagiert die Zielfunktion bei den einzelnen Parametern ähnlich stark auf eine Erhöhung bzw. Verringerung des Parameterwertes. Beim Parameter  $\sigma_f$  kann allerdings eine deutlich stärkere Sensitivität gegenüber einer Erhöhung festgestellt werden. Der Grund hierfür ist, dass die Volatilität nach unten durch einen systembedingten Wert  $\sigma_f > 0$  begrenzt ist, während keine Obergrenze existiert. Dies bewirkt, dass die Abweichung zum Volatilitätsmoment nur nach unten begrenzt ist. Ein ähnlicher, abgeschwächt Effekt beeinflusst auch den Parameter  $r_0$ . Auch hier gibt es eine logische untere Grenze von  $r_0 > 0$ .

Tabelle 8.27 zeigt, dass auch für das Modell von Alfarano et al. (2008) die Abweichung zwischen den wahren und optimierten Parameterwerten gering ist. Die relativ größte Abweichung zeigt dabei der Parameter  $\lambda$ , was konsistent zu den Ergebnissen aus der Abbildung 8.25 ist. Da aber insgesamt alle Abweichung sehr gering ausfallen, kann die MSM Optimierung auch für das Modell von Alfarano et al. (2008) als robust angesehen werden.

Tabelle 8.33: Vergleich der wahren und optimierten Parameter für das Modell von Alfarano et al. (2008). Als für die Optimierung repräsentative Werte sind hierbei die Mediane der Zielfunktionswerte (ZFW) und Parameter dargestellt. Signifikanzniveau zur Ablehnung der Nullhypothese von identischen Verteilungen: (\*) p=0.1, (\*\*) p=0.05 (\*\*\*) p=0.01.

Alfarano et al. (2008)		
Parameter	wahr	optimiert
ZFW		5.88
$\lambda$	$7.810^{-5}$	$1.010^{-5}$
$\delta$	0.00508	0.00661
$\sigma_f$	0.00588	0.00606
$r_0$	0.146	0.121

### 8.5.4 Zusammenfassung der wichtigsten Optimierungsergebnisse

Zusammenfassend kann die Optimierung als erfolgreich angesehen werden. Das lokale Minimum ist robust und wird von fast allen Partikeln des Schwarms erreicht und die einzelnen Parameter besitzen eine signifikante Sensitivität gegenüber Änderungen. Allerdings besitzt auch dieses ABM dieselbe Schwäche, welche auch bei den Modellen von Franke und Westerhoff (2012, 2016) und Brock und Hommes (1998) vorhanden ist. Nämlich, dass die Momente zwar einerseits gut abgebildet werden, andererseits aber die Variabilität der Varianz deutlich geringer ausfällt als dies bei den empirischen Renditen der Fall ist.

## 8.6 Fazit

Die MSM Optimierung konnte für die meisten ABM erfolgreich durchgeführt werden. Einzig das T-Modell von Brock und Hommes (1998) und drei Varianten des Modells von Lux et al. (2005) zeigen keine gute Anpassung an die empirischen Momente. Alle übrigen Modelle weisen nicht nur eine gute Abbildung der Momente, sondern zusätzlich auch noch ein robustes Minimum der Zielfunktion auf. Was die Güte der Anpassung betrifft, so schneidet der Großteil der ABM ähnlich gut ab. Wird zur Messung der Güte der Zielfunktionsendwert herangezogen, dann weist das BHR-Modell, gefolgt von den weiteren Varianten des Modells von Franke und Westerhoff (2012), die beste Anpassung auf. Am schlechtesten schneiden in diesem Fall die Modelle von Lux et al. (2005) und Alfarano et al. (2008) ab. Als alternatives Gütekriterium kann allerdings auch der Verteilungstest der Zielfunktionswerte angewendet werden. In diesem Fall zeigt das Modell von Lux et al. (2005) deutlich die beste Anpassung, während die Modelle von Brock und Hommes (1998) die schlechteste Abbildung der Momente aufweisen. Des Weiteren zeigen die meisten ABM ein typisches zwei Phasen Verhalten. Einzig das Modell von Lux et al. (2005) ist in der Lage ein komplexeres Verhalten abzubilden. Insgesamt sollten aber alle ABM, welche eine gute MSM Abbildung aufweisen, grundsätzlich zur VaR-Prognose geeignet sein.

# Kapitel 9

## VaR-Prognose

Dieses Kapitel befasst sich mit der Erstellung und Auswertung der VaR-Prognose<sup>1</sup>. Bevor die Ergebnisse der genauer vorgestellt werden, wird kurz ausgeführt, wie die Erstellung der VaR-Prognosen im Detail funktioniert:

1. Das ABM wird mit dem ML- oder SMC-Verfahren an das ausgewählte Fenster angepasst.
2. Nach der Anpassung ist der Systemzustand des ABMs für den letzten Zeitpunkt des Fensters zu bestimmen.
3. Ausgehend von diesem Systemzustand wird das ABM um einen Schritt vorwärts in der Zeit iteriert<sup>2</sup> und der zukünftige Systemzustand ermittelt.
4. Die Erstellung der VaR-Prognose erfolgt nun, indem der  $p = 0.05$  Quantilwert<sup>3</sup> der Renditeverteilung des zukünftigen Systemzustandes bestimmt wird (ML-Verfahren) bzw. der Mittelwert dieser Quantilwerte über die einzelnen Marktanteilspartikel berechnet wird (SMC-Verfahren).

---

<sup>1</sup>Die hier präsentierten Ergebnisse sind auch zum Teil bereits in Tubbenhauer et al. (2021) publiziert worden.

<sup>2</sup>Für VaR-Prognosen, welche weiter in der Zukunft liegen sollen, kann das ABM natürlich auch beliebig weit in die Zukunft iteriert werden.

<sup>3</sup>Für VaR-Prognosen zu anderen Verteilungsquantilen kann dieser Wert entsprechend angepasst werden.

5. Die Schritte 1-4 werden so lange wiederholt, bis für alle Renditebeobachtungen des Prognosezeitraums eine VaR-Prognose vorliegt.

Um die Kalibrierungsgüte während der Expansions- und Rezessionsphasen explizit zu untersuchen, wird das Ergebnis der ML-Schätzung, wie in Abbildung 7.3 dargestellt, in drei Teile aufgeteilt: Eine Expansionsphase, eine Rezessionsphase sowie den gesamten Prognosezeitraum. In diesem Zusammenhang erfolgt auch die quantitative Auswertung nach den im Kapitel 5 „Auswertungskriterien“ vorgestellten Verfahren. Davon ausgehend wird dann auch der quantitative Vergleich der einzelnen Modelle untereinander sowie der Vergleich zur Benchmark vorgenommen.

## 9.1 Modell von Franke und Westerhoff (2016), der BHR- und BR-Ansatz

Die Tabelle 9.1 enthält detaillierte Informationen zur Parameterschätzung des BHR- und BR-Modells. Um einen Systemzustand des ABM am aktuellen Zeitrund zu bestimmen, müssen Werte für den Fundamentalwert und die Anfangszustände der versteckten Variablen geschätzt werden. Außerdem müssen zur Anpassung der Volatilität die Volatilitätsparameter  $\sigma_f$  und  $\sigma_c$  immer neu bestimmt werden. Alle anderen Parameter können optional der Optimierung hinzugefügt werden. Parameter, die in der letzten Spalte der Tabelle 9.1 mit (1) gekennzeichnet sind, werden nur mit der MSM geschätzt und nicht mit dem ML-Verfahren erneut bestimmt. Mit (1,2) gekennzeichnete Parameter werden zuerst mit der MSM geschätzt und anschließend mit dem ML-Verfahren erneut bestimmt. Die mit (2) gekennzeichneten Parameter werden ausschließlich mit dem ML-Verfahren bestimmt. Mit (0) gekennzeichnete Parameter werden aus anderen Parametern berechnet. Die Parameter der ersten und zweiten Optimierung werden anschließend gemeinsam zur Erstellung der VaR-Prognosen verwendet. Die Tabelle beschreibt den Fall, der in den folgenden Tabellen der Thesis als „Keine“ gekennzeichnet ist. Sind stattdessen bestimmte ABM-Parameter angegeben, so werden diese mit dem ML-Verfahren zusätzlich neu bestimmt.

9.1. MODELL VON Franke und Westerhoff (2016), DER BHR- UND BR-ANSATZ

Tabelle 9.1: Parameterschätzung im zweistufigen Ansatz für das BHR- und BR-Modell.

Parameter	Beschreibung	Modell	Phase Eins (1) Phase Zwei (2) Sonstiges (0)
$\phi$	Aggressivität Fundamentalisten	BHR, BR	1
$\chi$	Aggressivität Techniker	BHR, BR	1
$\sigma_f$	Fundamentalvarianz	BHR, BR	1,2
$\sigma_c$	Technikervarianz	BHR, BR	1,2
$\alpha_0$	Bias	BHR, BR	1
$\alpha_n$	Herdenfaktor	BHR	1
$\alpha_m$	Revisionsparameter	BHR, BR	1
$p_f$	Fundamentalwert	BHR, BR	2
$n_{f,0}$	Anfangsanteil Fundamentalisten	BHR, BR	2
$n_{c,0}$	Anfangsanteil Techniker	BHR, BR	0
$a_0$	Anfangswert Attraktivität	BHR, BR	0

Tabelle 9.2: Mittelwert (MW), Median (MD) und Standardabweichung (SD) der ML-Endwerte für das BHR- und BR-Modell, gebildet über die Partikel mit dem höchsten ML-Wert zu den einzelnen Zeitpunkten. Der Anfangszustand der verborgenen Variablen, sowie  $p_f$ ,  $\sigma_f$  und  $\sigma_c$  sind immer Teil des Schätzprozesses, während je nach ABM Variante zusätzliche Parameter der Optimierung hinzugefügt werden. Die Ergebnisse decken alle drei Perioden in Abbildung 7.1 ab.

Modell	Zusätzliche Parameter	Expansion			Rezession			Gesamt		
		MW	MD	SD	MW	MD	SD	MW	MD	SD
BHR	Keine	857	864	65.7	729	751	71.9	838	846	80.5
	$\alpha_n$	861	867	64.6	743	770	76.5	844	854	78.7
	$\alpha_n, \alpha_0$	862	867	64.6	743	770	76.0	845	856	78.6
	$\alpha_n, \alpha_m$	862	867	64.4	743	769	75.9	845	856	78.9
	$\alpha_n, \alpha_0, \alpha_m$	862	868	64.4	742	769	75.5	844	855	78.6
BR	Keine	858	864	64.8	728	742	73.0	839	849	80.4
	$\alpha_0$	858	865	64.7	729	745	73.0	839	850	80.2
	$\alpha_m$	858	865	64.8	729	744	72.8	839	849	80.2
	$\alpha_0, \alpha_m$	859	865	64.7	730	745	73.0	840	851	80.2

Tabelle 9.2 zeigt einige zusammenfassende Statistiken der ML-Schätzung der BHR- und BR-Modelle in den drei Zeiträumen. Alle ABM Varianten haben nahezu identische Mittelwerte und Mediane sowie eine relativ geringe Standardabweichung, was auf eine robuste Schätzung schließen lässt. Da ein Hinzufügen weiterer Parameter die ML-Werte kaum verbessert, ist eine weitere Schlussfolgerung, die aus der Tabelle 9.2 gezogen werden kann, dass für die BHR- und BR-Modelle die wichtigsten Parameter bereits im Standardsatz enthalten sind. Daher kann durch die Hinzufügung von Parametern zum Kalibrierungsprozess nur eine geringfügige Verbesserung der Schätzungsqualität erreicht werden. Dies legt den Schluss nahe, dass für die BHR- und BR-Modelle ein direkter Zusammenhang zwischen der Qualität des MSM und der ML-Schätzung besteht.

Tabelle 9.3: Ergebnisse des Christoffersen (1998)-Tests für die VaR-Prognosen des BHR- und BR-Modells. Für alle ABM Varianten sind der Anfangszustand der verborgenen Variablen,  $p_f, \sigma_f, \sigma_c$  immer Teil des Schätzprozesses, während je nach ABM Variante zusätzliche Parameter hinzukommen. Die Prognosen decken den Expansionszeitraum in Abbildung 7.1 ab.

Signifikanzniveaus für die Ablehnung der Nullhypothese des Christoffersen (1998)-Tests: (\*)  $p=0.1$ , (\*\*)  $p=0.05$  (\*\*\*)  $p=0.01$ .

Model	Zusätzliche Parameter	Expansion			
		Rate	$LR_{pof}$	$LR_{ind}$	$LR_{cc}$
BHR	Keine	6.42 %	$7.5 \cdot 10^{-4***}$	0.351	0.0022***
	$\alpha_n$	6.08 %	0.0100**	0.833	0.0353**
	$\alpha_n, \alpha_0$	6.25 %	0.0029***	0.254	0.0062***
	$\alpha_n, \alpha_m$	6.42 %	$7.5 \cdot 10^{-4***}$	0.523	0.0028***
	$\alpha_n, \alpha_0, \alpha_m$	6.42 %	$7.5 \cdot 10^{-4***}$	0.223	0.0016***
BR	Keine	6.87 %	$1.2 \cdot 10^{-5***}$	0.0793*	$1.4 \cdot 10^{-5***}$
	$\alpha_0$	6.67 %	$3.3 \cdot 10^{-5***}$	0.0595*	$3.1 \cdot 10^{-5***}$
	$\alpha_m$	6.94 %	$5.7 \cdot 10^{-6***}$	0.0951*	$8.4 \cdot 10^{-6***}$
	$\alpha_0, \alpha_m$	6.94 %	$5.7 \cdot 10^{-6***}$	0.0539*	$5.3 \cdot 10^{-6***}$

Die Ergebnisse der VaR-Prognosen des BR- und BHR-Modells für die drei verschiedenen Zeiträume, welche eine Expansionsphase, eine Rezessionsphase und den gesamten Zeitraum außerhalb des MSM Kalibrierungsfensters umfassen, sind in den Tabellen

9.1. MODELL VON Franke und Westerhoff (2016), DER BHR- UND BR-ANSATZ

Tabelle 9.4: Ergebnisse des Christoffersen (1998)-Tests für die VaR-Prognosen des BHR- und BR-Modells. Für alle ABM Varianten sind der Anfangszustand der verborgenen Variablen,  $p_f$ ,  $\sigma_f$ ,  $\sigma_c$  immer Teil des Schätzprozesses, während je nach ABM Variante zusätzliche Parameter hinzukommen. Die Prognosen decken den Rezessionszeitraum in Abbildung 7.1 ab.

Signifikanzniveaus für die Ablehnung der Nullhypothese des Christoffersen (1998)-Tests: (\*)  $p=0.1$ , (\*\*)  $p=0.05$  (\*\*\*)  $p=0.01$ .

Modell	Zusätzliche Parameter	Rezession			
		Rate	$LR_{pof}$	$LR_{ind}$	$LR_{cc}$
BHR	Keine	6.22 %	0.226	0.0499**	0.0704*
	$\alpha_n$	5.42 %	0.670	0.637	0.817
	$\alpha_n, \alpha_0$	5.82 %	0.411	0.355	0.465
	$\alpha_n, \alpha_m$	5.62 %	0.532	0.766	0.787
	$\alpha_n, \alpha_0, \alpha_m$	5.42 %	0.670	0.691	0.844
BR	Keine	6.63 %	0.112	0.253	0.147
	$\alpha_0$	7.03 %	0.0497**	0.0402**	0.0178**
	$\alpha_m$	7.63 %	0.0121**	0.239	0.0215**
	$\alpha_0, \alpha_m$	7.23 %	0.0319**	0.0529*	0.0154**

9.3-9.5 aufgeführt. Daraus geht hervor, dass bei den BHR- und BR-Modellen die Anzahl der Unterschreitungen durchweg zu hoch ist. Folglich bestehen sie den  $LR_{pof}$ -Test und damit auch den  $LR_{cc}$ -Test nicht. Der Grund hierfür ist die zu hohe Anzahl von Unterschreitungen in der Expansionsphase. Während zumindest fast alle Varianten des BHR-Modells<sup>4</sup> in der Rezessionsphase eine gute VaR Prognosegüte zeigen, reicht dies bei weitem nicht aus, um die schlechte Anpassung in der Expansionsphase zu kompensieren. Bei der Unabhängigkeit der Unterschreitungen bestehen fast alle<sup>5</sup> Varianten des BHR-Modells den  $LR_{ind}$ -Test. Im Gegensatz dazu können die Unterschreitungen beim BR-Modell nicht als unabhängig angesehen werden, da so gut wie jede Variante den  $LR_{ind}$ -Test nicht besteht. Insgesamt können also die BHR- und BR-Modellvarianten als nicht adäquate VaR-Prognosemodelle angesehen werden.

<sup>4</sup>Dem hingegen besteht beim BR-Modell nur eine Variante in der Rezessionsphase alle Test.

<sup>5</sup>Einzig die Variante ohne zusätzliche Parameter besteht in der Rezessionsphase den Test auf dem  $p = 0.05$  Signifikanzniveau nicht.

Tabelle 9.5: Ergebnisse des Christoffersen (1998)-Tests für die VaR-Prognosen des BHR- und BR-Modells. Für alle ABM Varianten sind der Anfangszustand der verborgenen Variablen,  $p_f, \sigma_f, \sigma_c$  immer Teil des Schätzprozesses, während je nach ABM Variante zusätzliche Parameter hinzukommen. Die Prognosen decken den gesamten Zeitraum in Abbildung 7.1 ab.

Signifikanzniveaus für die Ablehnung der Nullhypothese des Christoffersen (1998)-Tests: (\*)  $p=0.1$ , (\*\*)  $p=0.05$  (\*\*\*)  $p=0.01$ .

Modell	Zusätzliche Parameter	Gesamt			
		Rate	$LR_{pof}$	$LR_{ind}$	$LR_{cc}$
BHR	Keine	6.39 %	$3.5 \cdot 10^{-4***}$	0.101	$4.3 \cdot 10^{-4***}$
	$\alpha_n$	5.98 %	0.0109**	0.710	0.0364**
	$\alpha_n, \alpha_0$	6.19 %	0.0022***	0.164	0.0035***
	$\alpha_n, \alpha_m$	6.31 %	$7.8 \cdot 10^{-4***}$	0.489	0.0028***
	$\alpha_n, \alpha_0, \alpha_m$	6.28 %	0.0010***	0.203	0.0020***
BR	Keine	6.84 %	$3.2 \cdot 10^{-6***}$	0.0412**	$2.4 \cdot 10^{-6***}$
	$\alpha_0$	6.81 %	$4.5 \cdot 10^{-6***}$	0.0106**	$1.0 \cdot 10^{-6***}$
	$\alpha_m$	7.04 %	$2.5 \cdot 10^{-7***}$	0.0456**	$2.3 \cdot 10^{-7***}$
	$\alpha_0, \alpha_m$	6.98 %	$5.3 \cdot 10^{-7***}$	0.0110**	$1.4 \cdot 10^{-7***}$

## 9.2 Modell von Franke und Westerhoff (2012), der Gewinnansatz

Die Tabelle 9.6 enthält detaillierte Informationen zur Parameterschätzung der Gewinnmodelle. Als Kennzeichnung wird wieder dieselbe Logik wie bei den vorherigen Modellen verwendet<sup>6</sup>. Wie bei den Herdenmodellen muss eine Schätzung des Fundamentalwerts sowie der Anfangszustände der versteckten Systemvariablen erfolgen. Des Weiteren werden auch hier die Volatilitätsparameter  $\sigma_f, \sigma_c$  immer neu kalibriert. Tabelle 9.7 zeigt die zusammenfassenden Statistiken der ML-Schätzung der Gewinnmodelle in den drei Zeiträumen. Da alle Modelle wieder nahezu identische Mittelwerte und Mediane sowie eine relativ geringe Standardabweichung aufweisen, kann auch hier von einer robusten Schätzung ausgegangen werden. Auch für die Gewinnmodelle

<sup>6</sup>Berechnet (0), nur MSM-Schätzung (1), nur ML-Schätzung (2), MSM-Schätzung und ML-Schätzung (1,2).

9.2. MODELL VON Franke und Westerhoff (2012), DER GEWINNANSATZ

Tabelle 9.6: Parameterschätzung im zweistufigen Ansatz für das G-, GB- und GH-Modell.

Parameter	Beschreibung	Modell	Phase Eins (1) Phase Zwei (2) Sonstiges (0)
$\phi$	Aggressivität Fundamentalisten	G, GB, GH	1
$\chi$	Aggressivität Techniker	G, GB, GH	1
$\sigma_f$	Fundamentalvarianz	G, GB, GH	1,2
$\sigma_c$	Technikervarianz	G, GB, GH	1,2
$\alpha_0$	Bias	GB	1
$\alpha_n$	Herdenfaktor	GH	1
$\alpha_w$	Gewinneinfluss	G, GB, GH	1
$\nu$	Gedächtnis	G, GB, GH	1
$p_f$	Fundamentalwert	G, GB, GH	2
$w_{f,0}$	Anfangsgewinn Fundamentalisten	G, GB, GH	2
$w_{c,0}$	Anfangsgewinn Techniker	G, GB, GH	0
$a_0$	Anfangswert Attraktivität	G, GB, GH	0

ändern sich die ML-Werte durch das Einfügen zusätzlicher Parameter nur unwesentlich, womit festgestellt werden kann, dass die wichtigsten Parameter auch hier bereits im Standardsatz der Kalibrierungsparameter enthalten sind und somit auch hier ein direkter Zusammenhang zwischen der Qualität des MSM- und der ML-Schätzung besteht.

Die Ergebnisse der VaR-Prognosen der Gewinnmodelle für die drei verschiedenen Zeiträume sind in den Tabellen 9.8-9.10 aufgeführt. In der Expansionsphase bestehen fast alle Modellvarianten den  $LR_{pof}$ -Test, einzig Varianten für die der Parameter  $\eta$  erneut optimiert wird, bestehen den Test nicht. Dies lässt darauf schließen, dass eine Neuschätzung von  $\eta$  die VaR-Prognosegüte senkt<sup>7</sup>. Dem hingegen kann beobachtet werden, dass die Gewinnmodelle Probleme haben, unabhängige Unterschreitungen zu generieren. Nur die Hälfte der Varianten besteht den  $LR_{ind}$ -Test und selbst bei diesen Modellvarianten liegt das Testergebnis sehr nahe am  $p = 0.1$  Signifikanzniveau. Aus

<sup>7</sup>Diese Schlussfolgerung wird auch dadurch gestärkt, dass bei allen Varianten mit  $\eta$  die Rate der Unterschreitungen gegenüber den restlichen Modellvarianten merkbar ansteigt.

Tabelle 9.7: Mittelwert (MW), Median (MD) und Standardabweichung (SD) der ML-Endwerte für das G-, GB- und GH-Modell, gebildet über die Partikel mit dem höchsten ML-Wert zu den einzelnen Zeitpunkten. Der Anfangszustand der verborgenen Variablen, sowie  $p_f$ ,  $\sigma_f$  und  $\sigma_c$  sind immer Teil des Schätzprozesses, während je nach ABM Variante zusätzliche Parameter der Optimierung hinzugefügt werden. Die Ergebnisse decken alle drei Perioden in Abbildung 7.1 ab.

Modell	Zusätzliche Parameter	Expansion			Rezession			Gesamt		
		MW	MD	SD	MW	MD	SD	MW	MD	SD
G	Keine	855	863	65.5	727	762	79.2	836	846	81.4
	$\alpha_w$	856	863	65.5	728	736	79.2	837	846	81.3
	$\eta$	865	874	67.2	734	766	82.0	846	863	83.4
	$\alpha_w, \eta$	865	874	67.1	744	766	81.6	846	864	83.3
GB	Keine	854	862	65.9	726	761	78.6	836	846	81.7
	$\alpha_0$	855	863	65.9	726	761	78.5	836	846	81.7
	$\alpha_0, \alpha_w$	859	866	66.1	735	763	74.8	841	854	80.7
	$\alpha_0, \eta$	864	873	67.8	735	765	81.6	845	860	83.6
	$\alpha_0, \alpha_w, \eta$	866	874	66.8	740	766	77.5	847	861	81.6
GH	Keine	851	861	66.8	724	752	78.1	833	843	82.1
	$\alpha_n$	851	861	66.8	724	752	78.1	833	843	82.0
	$\alpha_n, \alpha_w$	858	865	66.8	736	761	74.2	840	851	80.2
	$\alpha_n, \eta$	859	869	69.1	729	759	79.3	840	853	84.4
	$\alpha_n, \alpha_w, \eta$	863	872	67.0	740	764	75.6	845	856	81.4

diesem Grund bestehen auch nur sechs von vierzehn Modellvarianten den  $LR_{cc}$ -Test in der Expansionsphase, wobei jedes Modell mindestens eine Variante besitzt welche den  $LR_{cc}$ -Test besteht. Das genau gegenteilige Ergebnis kann im Rezessionszeitraum beobachtet werden. Während hier alle Modellvarianten den  $LR_{ind}$  bestehen, sind die Unterschreitungen von der Mehrzahl der Varianten zu hoch<sup>8</sup>, um den  $LR_{ind}$ -Test und im Weiteren auch den  $LR_{cc}$ -Test zu bestehen. Da Modellvarianten, die alle Test in einem der Zeiträume bestehen, häufig Probleme bei mindestens einem der Tests im anderen Zeitraum aufweisen, gibt es im gesamten Beobachtungszeitraum mit der Variante GB,  $\alpha_0, \alpha_w$  und GH,  $\alpha_n, \alpha_w$  nur zwei Modellvarianten, welche alle drei

<sup>8</sup>Wie schon im Expansionszeitraum kann auch hier eine höhere Anzahl an Unterschreitungen für die Varianten mit  $\eta$  beobachtet werden.

9.2. MODELL VON Franke und Westerhoff (2012), DER GEWINNANSATZ

Tabelle 9.8: Ergebnisse des Christoffersen (1998)-Tests für die VaR-Prognosen des G-, GB- und GH-Modells. Für alle ABM Varianten sind der Anfangszustand der verborgenen Variablen,  $p_f$ ,  $\sigma_f$ ,  $\sigma_c$  immer Teil des Schätzprozesses, während je nach ABM Variante zusätzliche Parameter hinzukommen. Die Prognosen decken den Expansionszeitraum in Abbildung 7.1 ab.

Signifikanzniveaus für die Ablehnung der Nullhypothese des Christoffersen (1998)-Tests: (\*)  $p=0.1$ , (\*\*)  $p=0.05$  (\*\*\*)  $p=0.01$ .

Modell	Zusätzliche Parameter	Expansion			
		Rate	$LR_{pof}$	$LR_{ind}$	$LR_{cc}$
G	Keine	5.49 %	0.233	0.0763*	0.102
	$\alpha_w$	5.42 %	0.305	0.0301**	0.0562*
	$\eta$	5.63 %	0.128	0.333	0.196
	$\alpha_w, \eta$	5.84 %	0.0442**	0.178	0.0534**
GB	Keine	5.35 %	0.390	0.0042***	0.0115**
	$\alpha_0$	5.42 %	0.305	0.0022***	0.0054***
	$\alpha_0, \alpha_w$	5.35 %	0.390	0.104	0.184
	$\alpha_0, \eta$	5.97 %	0.0195**	0.140	0.0219**
	$\alpha_0, \alpha_w, \eta$	5.77 %	0.0643*	0.153	0.0650*
GH	Keine	5.08 %	0.852	0.100	0.255
	$\alpha_n$	5.08 %	0.852	0.0484**	0.140
	$\alpha_n, \alpha_w$	5.15 %	0.721	0.119	0.279
	$\alpha_n, \eta$	5.56 %	0.174	0.0096***	0.0139**
	$\alpha_n, \alpha_w, \eta$	5.84 %	0.0442**	0.0117**	0.0055***

Tests bestehen. Insgesamt existieren bei den Gewinnmodellen also nur genau zwei Varianten, welche als adäquate VaR-Prognosemodelle angesehen werden können.

Tabelle 9.9: Ergebnisse des Christoffersen (1998)-Tests für die VaR-Prognosen des G-, GB- und GH-Modells. Für alle ABM Varianten sind der Anfangszustand der verborgenen Variablen,  $p_f$ ,  $\sigma_f$ ,  $\sigma_c$  immer Teil des Schätzprozesses, während je nach ABM Variante zusätzliche Parameter hinzukommen. Die Prognosen decken den Rezessionszeitraum in Abbildung 7.1 ab.

Signifikanzniveaus für die Ablehnung der Nullhypothese des Christoffersen (1998)-Tests: (\*)  $p=0.1$ , (\*\*)  $p=0.05$  (\*\*\*)  $p=0.01$ .

Modell	Zusätzliche Parameter	Rezession			
		Rate	$LR_{pof}$	$LR_{ind}$	$LR_{cc}$
G	Keine	6.63 %	0.112	0.253	0.147
	$\alpha_w$	6.63 %	0.112	0.253	0.147
	$\eta$	9.04 %	$1.9 \cdot 10^{-4***}$	0.657	$8.6 \cdot 10^{-4***}$
	$\alpha_w, \eta$	9.84 %	$1.1 \cdot 10^{-5***}$	0.321	$3.8 \cdot 10^{-5*****}$
GB	Keine	7.23 %	0.0319**	0.163	0.0378**
	$\alpha_0$	7.03 %	0.0497**	0.353	0.0947*
	$\alpha_0, \alpha_w$	5.82 %	0.411	0.842	0.699
	$\alpha_0, \eta$	8.84 %	$3.7 \cdot 10^{-4***}$	0.585	0.0015***
	$\alpha_0, \alpha_w, \eta$	6.83 %	0.0756*	0.682	0.190
GH	Keine	7.83 %	0.0072***	0.607	0.0237**
	$\alpha_n$	7.63 %	0.0121**	0.538	0.0356**
	$\alpha_n, \alpha_w$	5.22 %	0.822	0.702	0.906
	$\alpha_n, \eta$	8.84 %	$3.7 \cdot 10^{-4***}$	0.585	0.0015***
	$\alpha_n, \alpha_w, \eta$	6.63 %	0.112	0.854	0.278

Tabelle 9.10: Ergebnisse des Christoffersen (1998)-Tests für die VaR-Prognosen des G-, GB- und GH-Modells. Für alle ABM Varianten sind der Anfangszustand der verborgenen Variablen,  $p_f$ ,  $\sigma_f$ ,  $\sigma_c$  immer Teil des Schätzprozesses, während je nach ABM Variante zusätzliche Parameter hinzukommen. Die Prognosen decken den gesamten Zeitraum in Abbildung 7.1 ab.

Signifikanzniveaus für die Ablehnung der Nullhypothese des Christoffersen (1998)-Tests: (\*)  $p=0.1$ , (\*\*)  $p=0.05$  (\*\*\*)  $p=0.01$ .

Model	Zusätzliche Parameter	Gesamt			
		Rate	$LR_{pof}$	$LR_{ind}$	$LR_{cc}$
G	Keine	5.66 %	0.0851*	0.0357**	0.0250**
	$\alpha_w$	5.60 %	0.116	0.0140**	0.0143**
	$\eta$	6.42 %	$2.6 \cdot 10^{-4}$ ***	0.0630*	$2.3 \cdot 10^{-4}$ ***
	$\alpha_w, \eta$	6.13 %	0.0035***	0.0119**	0.0010***
GB	Keine	5.63 %	0.0998*	0.0013***	0.0014***
	$\alpha_0$	5.56 %	0.0851*	0.0015***	0.0015***
	$\alpha_0, \alpha_w$	5.42 %	0.266	0.119	0.160
	$\alpha_0, \eta$	6.39 %	$3.5 \cdot 10^{-4}$ ***	0.101	$4.3 \cdot 10^{-4}$ ***
	$\alpha_0, \alpha_w, \eta$	5.92 %	0.0165**	0.142	0.0192**
GH	Keine	5.48 %	0.206	0.0763*	0.0933*
	$\alpha_n$	5.45 %	0.235	0.0357**	0.0544*
	$\alpha_n, \alpha_w$	5.16 %	0.678	0.194	0.395
	$\alpha_n, \eta$	6.04 %	0.0070***	0.0084***	$8.2 \cdot 10^{-4}$ ***
	$\alpha_n, \alpha_w, \eta$	5.95 %	0.0134**	0.0252**	0.0038***

### 9.3 Modell von Brock und Hommes (1998)

Die Tabelle 9.11 enthält detaillierte Informationen zur Parameterschätzung des Modells von Brock und Hommes (1998). Als Kennzeichnung wird wieder dieselbe Logik wie bei den vorherigen Modellen verwendet<sup>9</sup>. Wie bei den Modellen von Franke und Westerhoff (2012, 2016) kommen der Fundamentalwert sowie die Anfangszustände der versteckten Systemvariablen als neue Parameter hinzu. Des Weiteren werden die Volatilitätsparameter  $\sigma_f$ ,  $\sigma_c$ ,  $\sigma_0$ ,  $\sigma_r$  ebenfalls in jedem Fall neu kalibriert.

Tabelle 9.11: Parameterschätzung im zweistufigen Ansatzes für das F-, T- und FT-Modell.

Parameter	Beschreibung	Modell	Phase Eins (1) Phase Zwei (2) Sonstiges (0)
$v$	Aggressivität Fundamentalisten	F, T, FT	1
$g$	Aggressivität Techniker	F, T, FT	1
$\sigma_f$	Fundamentalvarianz	F, FT	1,2
$\sigma_c$	Technikervarianz	F, FT	1,2
$\sigma_0$	Basisvolatilität	T	1,2
$\sigma_r$	Noise Trader Volatilität	T, FT	1,2
$\beta$	Gewinneinfluss	F, T, FT	1
$a, \lambda$	Risikoaversion	F, T, FT	1
$\nu$	Gedächtnis	F, T, FT	1
$p_f$	Fundamentalwert	F, T, FT	2
$U_{f,0}$	Anfangsgewinn Fundamentalisten	F, T, FT	2
$U_{c,0}$	Anfangsgewinn Techniker	F, T, FT	0

Tabelle 9.12 zeigt die zusammenfassenden Statistiken der ML-Schätzung der Modelle von Brock und Hommes (1998) in den drei Zeiträumen. Auffällig ist, dass die ML-Werte des T-Modells deutlich niedriger sind, was auf eine schlechtere Anpassungsgüte schließen lässt. Im Gegensatz dazu weisen die F- und FT-Modelle wieder nahezu identische Mittelwerte und Mediane sowie eine relativ geringe Standardabweichung auf.

<sup>9</sup>Berechnet (0), nur MSM-Schätzung (1), nur ML-Schätzung (2), MSM-Schätzung und ML-Schätzung (1,2).

### 9.3. MODELL VON Brock und Hommes (1998)

Tabelle 9.12: Mittelwert (MW), Median (MD) und Standardabweichung (SD) der ML-Endwerte für das F-, T- und FT-Modell, gebildet über die Partikel mit dem höchsten ML-Wert zu den einzelnen Zeitpunkten. Der Anfangszustand der verborgenen Variablen, sowie  $p_f$ ,  $\sigma_f$  (F, FT),  $\sigma_c$  (F, FT) und  $\sigma_r$  (T, FT) sind immer Teil des Schätzprozesses, während je nach ABM Variante zusätzliche Parameter der Optimierung hinzugefügt werden. Die Ergebnisse decken alle drei Perioden in Abbildung 7.1 ab.

Modell	Zusätzliche Parameter	Expansion			Rezession			Gesamt		
		MW	MD	SD	MW	MD	SD	MW	MD	SD
F	Keine	856	861	65.5	732	744	73.4	838	846	80.0
	$a$	857	862	65.4	733	746	74.6	839	847	80.0
	$a, \beta$	858	863	65.2	737	762	76.1	840	849	79.5
	$a, \eta$	862	867	64.2	739	765	77.1	844	854	79.3
	$a, \beta, \eta$	863	867	64.5	740	765	77.1	845	854	79.5
T	Keine	756	764	58.0	623	662	107	736	757	82.2
	$a$	783	799	65.1	638	678	114	762	788	90.4
	$a, \beta$	795	809	57.4	681	726	98.0	778	799	76.6
	$a, \eta$	848	857	68.7	712	736	84.8	828	841	85.9
	$a, \beta, \eta$	849	858	68.3	715	744	84.9	830	842	85.4
FT	Keine	854	858	65.0	739	765	74.2	837	844	77.8
	$a$	856	861	65.2	740	766	75.5	839	847	78.3
	$a, \beta$	859	865	64.6	741	766	76.9	841	850	78.4
	$a, \eta$	863	867	64.3	742	766	76.3	846	855	78.9
	$a, \beta, \eta$	863	867	64.8	742	766	75.8	845	854	79.2

Für diese Modellvarianten kann deshalb auch von einer robusten Schätzung ausgegangen werden. Bei den F- und FT-Modellen ändern sich die ML-Werte durch das Einfügen zusätzlicher Parameter nur unwesentlich, womit festgestellt werden kann, dass die wichtigsten Parameter auch hier bereits im Standardsatz der Kalibrierungsparameter enthalten sind. Einzig beim T-Modell lässt sich eine deutliche Verbesserung der ML-Werte feststellen, wobei vor allem die Neubestimmung des Parameters  $\eta$  zu einer deutlichen Verbesserung führt. Zusammen mit den ML-Ergebnissen vorheriger ABM legt dies den Schluss nahe, dass eine gute Approximation der empirischen Momente unabhängig vom geschätzten Parametersatz auch zu guten ML-Kalibrierungsergebnissen führt.

Tabelle 9.13: Ergebnisse des Christoffersen (1998)-Tests für die VaR-Prognosen des F-, T- und FT-Modells. Für alle ABM Varianten sind der Anfangszustand der verborgenen Variablen,  $p_f$ ,  $\sigma_f$  (F, FT),  $\sigma_c$  (F, FT) und  $\sigma_r$  (T, FT) immer Teil des Schätzprozesses, während je nach ABM Variante zusätzliche Parameter hinzukommen. Die Prognosen decken den Expansionszeitraum in Abbildung 7.1 ab. Signifikanzniveaus für die Ablehnung der Nullhypothese des Christoffersen (1998)-Tests: (\*)  $p=0.1$ , (\*\*)  $p=0.05$  (\*\*\*)  $p=0.01$ .

Modell	Zusätzliche Parameter	Expansion			
		Rate	$LR_{pof}$	$LR_{ind}$	$LR_{cc}$
F	Keine	5.18 %	0.659	0.130	0.288
	$a$	5.25 %	0.542	0.694	0.769
	$a, \beta$	4.90 %	0.811	0.0630*	0.173
	$a, \eta$	5.63 %	0.128	0.109	0.0872*
	$a, \beta, \eta$	5.66 %	0.109	0.119	0.0820*
T	Keine	1.93 %	0***	$7.2 \cdot 10^{-4}$ ***	0***
	$a$	2.42 %	$1.7 \cdot 10^{-12}$ ***	0.0349**	$1.6 \cdot 10^{-12}$ ***
	$a, \beta$	2.62 %	$1.3 \cdot 10^{-10}$ ***	0.204	$4.7 \cdot 10^{-10}$ ***
	$a, \eta$	5.56 %	0.174	0.0096***	0.0139**
	$a, \beta, \eta$	5.77 %	0.0644*	0.0038***	0.0027***
FT	Keine	5.32 %	0.437	0.179	0.299
	$a$	5.28 %	0.488	0.479	0.612
	$a, \beta$	5.46 %	0.267	0.134	0.175
	$a, \eta$	5.52 %	0.202	0.0838*	0.0994*
	$a, \beta, \eta$	5.66 %	0.109	0.354	0.180

Die Ergebnisse der VaR-Prognosen des Modells von Brock und Hommes (1998) für die drei verschiedenen Zeiträume sind in den Tabellen 9.13-9.15 aufgeführt. Alle Varianten des F- und FT-Modells bestehen den  $LR_{pof}$ -Test in der Expansionsphase, wobei auch hier eine Inklusion von  $\eta$  zu einer merkbaren Verschlechterung der Unterschreitungsrate führt. Im Gegensatz dazu ist die Anzahl der Unterschreitungen beim T-Modell deutlich zu niedrig und verbessert sich nur durch die Neuoptimierung von  $\eta$  deutlich<sup>10</sup>, sodass mit der T,  $a, \eta$  Variante zumindest eine der Modellvarian-

<sup>10</sup>Anzumerken ist hier, dass sich die Anzahl der Unterschreitungen in allen Modellen durch eine Inklusion von  $\eta$  erhöht. Bei allen anderen ABM Varianten führt dies jedoch zu einer Verschlechterung der Unterschreitungsrate.

### 9.3. MODELL VON Brock und Hommes (1998)

Tabelle 9.14: Ergebnisse des Christoffersen (1998)-Tests für die VaR-Prognosen des F-, T- und FT-Modells. Für alle ABM Varianten sind der Anfangszustand der verborgenen Variablen,  $p_f$ ,  $\sigma_f$  (F, FT),  $\sigma_c$  (F, FT) und  $\sigma_r$  (T, FT) immer Teil des Schätzprozesses, während je nach ABM Variante zusätzliche Parameter hinzukommen. Die Prognosen decken den Rezessionszeitraum in Abbildung 7.1 ab. Signifikanzniveaus für die Ablehnung der Nullhypothese des Christoffersen (1998)-Tests: (\*)  $p=0.1$ , (\*\*)  $p=0.05$  (\*\*\*)  $p=0.01$ .

Modell	Zusätzliche Parameter	Rezession			
		Rate	$LR_{pof}$	$LR_{ind}$	$LR_{cc}$
F	Keine	5.02 %	0.984	0.770	0.958
	$a$	4.42 %	0.543	0.987	0.831
	$a, \beta$	3.82 %	0.206	0.787	0.434
	$a, \eta$	6.83 %	0.0756*	0.281	0.115
	$a, \beta, \eta$	6.63 %	0.112	0.321	0.173
T	Keine	6.43 %	0.161	0.540	0.311
	$a$	6.22 %	0.226	0.474	0.372
	$a, \beta$	5.22 %	0.822	0.619	0.862
	$a, \eta$	9.04 %	$1.9 \cdot 10^{-4}$ ***	0.932	$9.4 \cdot 10^{-4}$ ***
	$a, \beta, \eta$	8.84 %	$3.7 \cdot 10^{-4}$ ***	0.293	0.0010***
FT	Keine	5.02 %	0.984	0.770	0.958
	$a$	4.42 %	0.543	0.987	0.831
	$a, \beta$	5.42 %	0.670	0.691	0.844
	$a, \eta$	6.22 %	0.226	0.412	0.343
	$a, \beta, \eta$	7.03 %	0.0497**	0.245	0.0743*

ten den  $LR_{pof}$ -Test besteht<sup>11</sup>. Der Großteil der F- und FT-Varianten besteht auch den  $LR_{ind}$ -Test in der Expansionsphase, wobei viele Varianten Testwerte nah an der Ablehnung aufweisen. Im Gegensatz dazu bestehen fast alle T-Varianten den  $LR_{ind}$ -Test nicht. Insgesamt führt das dazu, dass der Großteil der F- und FT-Varianten auch den  $LR_{cc}$ -Test bestehen, während alle T-Varianten am  $LR_{cc}$ -Test scheitern. In der Rezessionsphase verhalten sich die Varianten ähnlich. Die F- und FT-Varianten bestehen fast alle den  $LR_{pof}$ -Test und einzig Varianten mit einer Neuoptimierung von

<sup>11</sup>Dies betätigt auch noch einmal die Ergebnisse in Tabelle 9.12, wo die Neuoptimierung des Parameters  $\eta$  zu einem deutlich höheren ML-Wert und damit zu einer signifikant besseren Anpassung geführt hat

Tabelle 9.15: Ergebnisse des Christoffersen (1998)-Tests für die VaR-Prognosen des F-, T- und FT-Modells. Für alle ABM Varianten sind der Anfangszustand der verborgenen Variablen,  $p_f$ ,  $\sigma_f$  (F, FT),  $\sigma_c$  (F, FT) und  $\sigma_r$  (T, FT) immer Teil des Schätzprozesses, während je nach ABM Variante zusätzliche Parameter hinzukommen. Die Prognosen decken den gesamten Zeitraum in Abbildung 7.1 ab. Signifikanzniveaus für die Ablehnung der Nullhypothese des Christoffersen (1998)-Tests: (\*)  $p=0.1$ , (\*\*)  $p=0.05$  (\*\*\*)  $p=0.01$ .

Modell	Zusätzliche Parameter	Gesamt			
		Rate	$LR_{pof}$	$LR_{ind}$	$LR_{cc}$
F	Keine	5.16 %	0.678	0.194	0.395
	$a$	5.13 %	0.736	0.722	0.887
	$a, \beta$	4.74 %	0.490	0.0645*	0.143
	$a, \eta$	5.80 %	0.0358**	0.291	0.0633*
	$a, \beta, \eta$	5.80 %	0.0358**	0.291	0.0633*
T	Keine	2.59 %	$1.6 \cdot 10^{-12}$ ***	$4.8 \cdot 10^{-4}$ ***	$3.3 \cdot 10^{-14}$ ***
	$a$	2.98 %	$5.4 \cdot 10^{-9}$ ***	0.0136**	$1.9 \cdot 10^{-9}$ ***
	$a, \beta$	3.01 %	$9.4 \cdot 10^{-9}$ ***	0.129	$2.2 \cdot 10^{-8}$ ***
	$a, \eta$	6.04 %	0.0070***	0.113	0.0075***
	$a, \beta, \eta$	6.22 %	0.0017***	0.0017***	$5.3 \cdot 10^{-5}$ ***
FT	Keine	5.27 %	0.468	0.252	0.399
	$a$	5.16 %	0.678	0.513	0.741
	$a, \beta$	5.45 %	0.235	0.129	0.156
	$a, \eta$	5.75 %	0.0514*	0.817	0.146
	$a, \beta, \eta$	5.86 %	0.0245**	0.697	0.0739*

$\eta$  scheitern am  $LR_{pof}$ -Test<sup>12</sup>. Auch beim T-Modell bestehen nur die Varianten mit  $\eta$  den  $LR_{pof}$ -Test nicht. Des Weiteren kann in der Rezessionsphase auch kein Problem mit der Unabhängigkeit festgestellt werden, da alle Modellvarianten den  $LR_{ind}$ -Test ohne Probleme bestehen. Zusammen mit den guten Ergebnissen beim  $LR_{pof}$ -Test führt dies dazu, dass nur eine Variante des FT- und zwei Varianten des T-Modells den  $LR_{cc}$ -Test nicht bestehen. Betrachtet man den gesamten Prognosezeitraum, so sind die Ergebnisse nicht ganz so positiv wie es die Ergebnisse aus beiden Phasen einzeln suggerieren. Beim F- und FT-Modell bestehen nur zwei bzw. drei der Varianten

<sup>12</sup>Allerdings kann auch bei den Varianten mit  $\eta$  die den  $LR_{pof}$ -Test bestehen eine höhere Anzahl von Unterschreitungen beobachtet werden.

#### 9.4. MODELL VON Lux et al. (2005)

alle Tests. Dies liegt vor allem daran, dass die Varianten mit  $\eta$  alle am  $LR_{pof}$ -Test scheitern. Beim T-Modell fallen die Ergebnisse noch deutlich schlechter aus. Fast keine Variante besteht auch nur einen der Tests. Insgesamt bestehen zwei Varianten des F- und drei Varianten des FT-Modells alle drei Tests in allen Untersuchungszeiträumen. Die besten Ergebnisse liefern dabei die F  $a$  und die FT  $a$  Variante. Im Weiteren soll allerdings nur die F  $a$  Variante noch genauer untersucht werden, da das FT- dem F-Modell insgesamt zu ähnlich ist, um eine eigene Untersuchung zu rechtfertigen. Beim T-Modell hingegen gibt es keine Variante welche alle Test in den drei Zeiträumen besteht. Somit kann das T-Modell für VaR-Prognosen als nicht geeignet angesehen werden.

### 9.4 Modell von Lux et al. (2005)

Die Tabelle 9.16 enthält detaillierte Informationen zur Parameterschätzung des Modells von Lux et al. (2005) mit t-verteilter Zufallsvariable<sup>13</sup>. Als Kennzeichnung wird wieder dieselbe Logik wie bei den vorherigen Modellen verwendet<sup>14</sup>. Da ein Fundamentalwert im Modell nicht existiert und der Anfangszustand der versteckten Variable über die Gleichgewichtsverteilung bestimmt wird, gibt es, im Gegensatz zu den vorherigen Modellen, keine Parameter, welche nur in der zweiten Optimierung vorkommen. Eine genau Anpassung des Systemzustandes und der Volatilität muss aber ebenfalls erfolgen, weswegen die Parameter  $\alpha_f$ ,  $\alpha_r$  und  $\delta$  immer neu geschätzt werden.

Tabelle 9.17 zeigt einige zusammenfassende Statistiken der SMC-Schätzung des Modells von Lux et al. (2005) in den drei Zeiträumen. Alle ABM Varianten besitzen nahezu identische Mittelwerte und Mediane sowie eine relativ geringe Standardabweichung, was auf eine robuste Schätzung schließen lässt. Wie bei den vorherigen Modellen ändern sich die ML-Werte durch das Einfügen zusätzlicher Parameter

---

<sup>13</sup>Die restlichen Varianten werden hier nicht weiter untersucht, da diese, im Gegensatz zum T-Modell, keine strukturellen Unterschiede aufweisen.

<sup>14</sup>Berechnet (0), nur MSM-Schätzung (1), nur ML-Schätzung (2), MSM-Schätzung und ML-Schätzung (1,2).

Tabelle 9.16: Parameterschätzung im zweistufigen Ansatzes für das Modell von Lux et al. (2005).

Parameter	Beschreibung	Phase Eins (1) Phase Zwei (2) Sonstiges (0)
$\alpha_f$	Skalierte Attraktivität der Fundamentalstrategie	1,2
$\alpha_r$	Skalierte Attraktivität des Noise-Tradings	1,2
$\delta$	Rekrutierungsfaktor	1,2
$r_0$	Einflussfaktor des Noise-Trading	1
$n$	Freiheitsgrad der t-Verteilung	1

Tabelle 9.17: Mittelwert (MW), Median (MD) und Standardabweichung (SD) der ML-Endwerte für das Modell von Lux et al. (2005) mit t-verteilter Zufallsvariable, gebildet über die Partikel mit dem höchsten ML-Wert zu den einzelnen Zeitpunkten. Die Parameter  $\alpha_f$ ,  $\alpha_r$  und  $\delta$  sind immer Teil des Schätzprozesses, während je nach ABM Variante zusätzliche Parameter der Optimierung hinzugefügt werden. Die Ergebnisse decken alle drei Perioden in Abbildung 7.1 ab.

Zusätzliche Parameter	Expansion			Rezession			Gesamt		
	MW	MD	SD	MW	MD	SD	MW	MD	SD
Keine	681	686	65.6	559	582	76.9	663	676	80.0
$r_0$	679	685	65.3	558	580	76.9	662	675	79.7
$n$	681	687	65.7	559	581	76.9	663	676	80.1
$r_0, n$	680	685	65.6	558	580	76.8	662	675	79.9

kaum, womit auch für das Modell von Lux et al. (2005) die wichtigsten Parameter bereits im Standardsatz der Kalibrierungsparameter enthalten sind. Wie für die ML-Methode kann somit auch für die Optimierung mittels SMC-Schätzung ein direkter Qualitätszusammenhang zur MSM-Schätzung festgestellt werden.

Die Ergebnisse der VaR-Prognosen des Modells von Lux et al. (2005) für die drei verschiedenen Zeiträume sind in den Tabellen 9.18-9.20 gezeigt. Im Expansionszeitraum bestehen fast alle Modelle den  $LR_{pof}$ -Test. Einzig für die Variante ohne zusätzliche Parameter können zu wenige Unterschreitungen beobachtet werden. Auch die Unabhängigkeit der Unterschreitungen wird vom Modell von Lux et al. (2005) gut abgebildet. Alle ABM Varianten bestehen den  $LR_{ind}$ -Test ohne Probleme. Dies ist auch

#### 9.4. MODELL VON Lux et al. (2005)

Tabelle 9.18: Ergebnisse des Christoffersen (1998)-Tests für die VaR-Prognosen des Modells von Lux et al. (2005) mit t-verteilter Zufallsvariable. Für alle ABM Varianten sind die Parameter  $\alpha_f$ ,  $\alpha_r$  und  $\delta$  immer Teil des Schätzprozesses, während je nach ABM Variante zusätzliche Parameter hinzukommen. Die Prognosen decken den Expansionszeitraum in Abbildung 7.1 ab.

Signifikanzniveaus für die Ablehnung der Nullhypothese des Christoffersen (1998)-Tests: (\*) p=0.1, (\*\*) p=0.05 (\*\*\*) p=0.01.

Zusätzliche Parameter	Expansion			
	Rate	$LR_{pof}$	$LR_{ind}$	$LR_{cc}$
Keine	4.21 %	0.0460**	0.685	0.126
$r_0$	4.59 %	0.308	0.697	0.551
$n$	4.70 %	0.449	0.787	0.724
$r_0, n$	4.90 %	0.811	0.973	0.971

Tabelle 9.19: Ergebnisse des Christoffersen (1998)-Tests für die VaR-Prognosen des Modells von Lux et al. (2005) mit t-verteilter Zufallsvariable. Für alle ABM Varianten sind die Parameter  $\alpha_f$ ,  $\alpha_r$  und  $\delta$  immer Teil des Schätzprozesses, während je nach ABM Variante zusätzliche Parameter hinzukommen. Die Prognosen decken den Rezessionszeitraum in Abbildung 7.1 ab.

Signifikanzniveaus für die Ablehnung der Nullhypothese des Christoffersen (1998)-Tests: (\*) p=0.1, (\*\*) p=0.05 (\*\*\*) p=0.01.

Zusätzliche Parameter	Rezession			
	Rate	$LR_{pof}$	$LR_{ind}$	$LR_{cc}$
Keine	6.22 %	0.226	0.412	0.343
$r_0$	5.82 %	0.411	0.517	0.578
$n$	7.23 %	0.0319**	0.643	0.0898*
$r_0, n$	7.63 %	0.0121**	0.158	0.0159**

der Grund, warum alle Varianten des Modells von Lux et al. (2005) den  $LR_{cc}$ -Test bestehen. Im Rezessionszeitraum schneidet das Modell von Lux et al. (2005) ebenfalls relativ gut ab. Die Hälfte aller Varianten besteht hier alle drei Tests. Die übrigen Varianten<sup>15</sup> scheitern allerdings am  $LR_{pof}$ -Test und infolgedessen auch am  $LR_c$ -Test. Der  $LR_{ind}$ -Test wird hingegen von allen Varianten bestanden. Das gute Abschneiden des

<sup>15</sup>Gemeinsam haben diese Varianten, dass der Parameter  $n$  neu geschätzt, was die Anzahl der Unterschreitungen deutlich erhöht.

Tabelle 9.20: Ergebnisse des Christoffersen (1998)-Tests für die VaR-Prognosen des Modells von Lux et al. (2005) mit t-verteilter Zufallsvariable. Für alle ABM Varianten sind die Parameter  $\alpha_f$ ,  $\alpha_r$  und  $\delta$  immer Teil des Schätzprozesses, während je nach ABM Variante zusätzliche Parameter hinzukommen. Die Prognosen decken den gesamten Zeitraum in Abbildung 7.1 ab.

Signifikanzniveaus für die Ablehnung der Nullhypothese des Christoffersen (1998)-Tests: (\*) p=0.1, (\*\*) p=0.05 (\*\*\*) p=0.01.

Zusätzliche Parameter	Gesamt			
	Rate	$LR_{pof}$	$LR_{ind}$	$LR_{cc}$
Keine	4.51 %	0.181	0.982	0.409
$r_0$	4.77 %	0.541	0.934	0.827
$n$	5.07 %	0.857	0.934	0.980
$r_0, n$	5.30 %	0.422	0.576	0.619

ABM in den beiden Phasen überträgt sich auch auf den gesamten Prognosezeitraum, wo alle Modellvarianten die Tests bestehen. Auffällig sind aber auch die hohen Testwerte der ABM Varianten beim  $LR_{ind}$ -Test. Im Gegensatz zu den Modellen von Franke und Westerhoff (2012, 2016) und Brock und Hommes (1998) hat das Modell von Lux et al. (2005) also überhaupt kein Problem, unabhängige VaR-Unterschreitungen zu generieren. Da allerdings verschiedene Varianten im Expansions- bzw. Rezessionszeitraum am  $LR_{pof}$ -Test scheitern, besteht insgesamt nur die  $r_0$  Variante alle Test in allen Zeiträumen.

## 9.5 Modell von Alfarano et al. (2008)

Die Tabelle 9.16 enthält detaillierte Informationen zur Parameterschätzung des Modells von Alfarano et al. (2008). Als Kennzeichnung wird wieder dieselbe Logik wie bei den vorherigen Modellen verwendet<sup>16</sup>. Wie beim Modell von Lux et al. (2005) existiert kein Fundamentalwert und der Anfangszustand der versteckten Variable wird über die Gleichgewichtsverteilung bestimmt. Damit sind keine zusätzlichen Parameter bei der zweiten Optimierung zu berücksichtigen. Um eine genaue Anpassung

<sup>16</sup>Berechnet (0), nur MSM-Schätzung (1), nur ML-Schätzung (2), MSM-Schätzung und ML-Schätzung (1,2).

### 9.5. MODELL VON Alfarano et al. (2008)

des Systemzustandes und der Volatilität zu gewährleisten, müssen allerdings die Parameter  $\lambda$  und  $\delta$  immer neu geschätzt werden.

Tabelle 9.21: Parameterschätzung im zweistufigen Ansatzes für die Modelle von Alfarano et al. (2008).

Parameter	Beschreibung	Phase Eins (1)
		Phase Zwei (2) Sonstiges (0)
$\lambda$	Stimmungsänderungsfaktor	1,2
$\delta$	Rekrutierungsfaktor	1,2
$\sigma_f$	Volatilität des Fundamentalswertes	1
$r_0$	Einflusses der Noise-Trader	1

Tabelle 9.22: Mittelwert (MW), Median (MD) und Standardabweichung (SD) der ML-Endwerte für das Modell von Alfarano et al. (2008), gebildet über die Partikel mit dem höchsten ML-Wert zu den einzelnen Zeitpunkten. Die Parameter  $\lambda$  und  $\delta$  sind immer Teil des Schätzprozesses, während je nach ABM Variante zusätzliche Parameter der Optimierung hinzugefügt werden. Die Ergebnisse decken alle drei Perioden in Abbildung 7.1 ab.

Zusätzliche Parameter	Expansion			Rezession			Gesamt		
	MW	MD	SD	MW	MD	SD	MW	MD	SD
Keine	673	682	63.3	528	574	99.5	673	682	63.3
$\sigma_f$	677	684	64.4	541	574	82.6	657	674	82.7
$r_0$	674	683	61.1	551	581	81.7	656	673	77.9
$\sigma_f, r_0$	673	680	64.7	542	577	80.8	654	668	81.6

Tabelle 9.22 zeigt einige zusammenfassende Statistiken der SMC-Schätzung des Modells von Alfarano et al. (2008) in den drei Zeiträumen. Insgesamt ist die Standardabweichung auch hier relativ gering, allerdings ist der Unterschied zwischen Mittelwerten und Medianen in der Rezessionsphase und über den gesamten Zeitraum etwas höher als bei den vorherigen Modellen. Zwar kann hier trotzdem noch von einer robusten Schätzung ausgegangen werden, allerdings deuten diese Ergebnisse darauf hin, dass die Anpassung in der Rezessionsphase, verglichen mit den restlichen ABM, etwas schlechter ausfallen ist. Wie bei den vorherigen Modellen ändern

sich die ML-Werte durch das Einfügen zusätzlicher Parameter nur unwesentlich, womit festgestellt werden kann, dass die wichtigsten Parameter auch hier bereits im Standardsatz der Kalibrierungsparameter enthalten sind. Somit kann auch für die Optimierung des Modells von Alfarano et al. (2008) ein direkter Zusammenhang zur Qualität der MSM-Schätzung festgestellt werden.

Tabelle 9.23: Ergebnisse des Christoffersen (1998)-Tests für die VaR-Prognosen des Modells von Alfarano et al. (2008). Für alle ABM Varianten sind die Parameter  $\lambda$  und  $\delta$  immer Teil des Schätzprozesses, während je nach ABM Variante zusätzliche Parameter hinzukommen. Die Prognosen decken den Expansionszeitraum in Abbildung 7.1 ab.

Signifikanzniveaus für die Ablehnung der Nullhypothese des Christoffersen (1998)-Tests: (\*)  $p=0.1$ , (\*\*)  $p=0.05$  (\*\*\*)  $p=0.01$ .

Zusätzliche Parameter	Expansion			
	Rate	$LR_{pof}$	$LR_{ind}$	$LR_{cc}$
Keine	5.46 %	0.267	0.613	0.475
$\sigma_f$	5.94 %	0.0241**	0.128	0.0248**
$r_0$	5.52 %	0.202	0.157	0.163
$\sigma_f, r_0$	6.42 %	$7.4 \cdot 10^{-4}$ ***	0.351	0.0022***

Tabelle 9.24: Ergebnisse des Christoffersen (1998)-Tests für die VaR-Prognosen des Modells von Alfarano et al. (2008). Für alle ABM Varianten sind die Parameter  $\lambda$  und  $\delta$  immer Teil des Schätzprozesses, während je nach ABM Variante zusätzliche Parameter hinzukommen. Die Prognosen decken den Rezessionszeitraum in Abbildung 7.1 ab.

Signifikanzniveaus für die Ablehnung der Nullhypothese des Christoffersen (1998)-Tests: (\*)  $p=0.1$ , (\*\*)  $p=0.05$  (\*\*\*)  $p=0.01$ .

Zusätzliche Parameter	Rezession			
	Rate	$LR_{pof}$	$LR_{ind}$	$LR_{cc}$
Keine	11.8 %	$1.9 \cdot 10^{-9}$ ***	0.630	$1.3 \cdot 10^{-8}$ ***
$\sigma_f$	10.8 %	$1.8 \cdot 10^{-7}$ ***	0.987	$1.2 \cdot 10^{-6}$ ***
$r_0$	8.84 %	$3.7 \cdot 10^{-4}$ ***	0.236	$8.7 \cdot 10^{-4}$ ***
$\sigma_f, r_0$	9.64 %	$2.3 \cdot 10^{-5}$ ***	0.889	$1.3 \cdot 10^{-4}$ ***

## 9.6. ERGEBNISSE DER ABM VAR-PROGNOSE

Tabelle 9.25: Ergebnisse des Christoffersen (1998)-Tests für die VaR-Prognosen des Modells von Alfarano et al. (2008). Für alle ABM Varianten sind die Parameter  $\lambda$  und  $\delta$  immer Teil des Schätzprozesses, während je nach ABM Variante zusätzliche Parameter hinzukommen. Die Prognosen decken den gesamten Zeitraum in Abbildung 7.1 ab.

Signifikanzniveaus für die Ablehnung der Nullhypothese des Christoffersen (1998)-Tests: (\*)  $p=0.1$ , (\*\*)  $p=0.05$  (\*\*\*)  $p=0.01$ .

Zusätzliche Parameter	Gesamt			
	Rate	$LR_{pof}$	$LR_{ind}$	$LR_{cc}$
Keine	6.39 %	$3.5 \cdot 10^{-4}***$	0.563	0.0014***
$\sigma_f$	6.66 %	$2.3 \cdot 10^{-5}***$	0.123	$4.0 \cdot 10^{-5}***$
$r_0$	6.01 %	0.0087***	0.430	0.0236**
$\sigma_f, r_0$	6.89 %	$1.6 \cdot 10^{-6}***$	0.326	$6.1 \cdot 10^{-6}***$

Die Ergebnisse der VaR-Prognosen des Modells von Alfarano et al. (2008) für die drei verschiedenen Zeiträume sind in den Tabellen 9.23-9.25 aufgeführt. Zwei der vier Varianten bestehen im Expansionszeitraum den  $LR_{pof}$ -Test nicht. Gemeinsam haben diese Varianten, dass der Parameter  $\sigma_f$  neu optimiert wird. Da alle Varianten den  $LR_{ind}$ -Test bestehen, scheitern insgesamt nur die Varianten mit  $\sigma_f$  am  $LR_{cc}$ -Test. Im Rezessionszeitraum kann das Modell von Alfarano et al. (2008) allerdings keine akkuraten VaR-Prognosen generieren. Zwar bestehen alle Modellvarianten den  $LR_{ind}$ -Test, scheitern aber im Gegenzug auch alle deutlich am  $LR_{pof}$ -Test. Aus diesem Grund besteht auch keine Variante den  $LR_{cc}$ -Test. Dieses Ergebnis überträgt sich auch auf den gesamten Prognosebereich. Auch hier bestehen alle Varianten nur den  $LR_{ind}$ -Test und scheitern an den weiteren Tests. Insgesamt existiert deshalb auch keine Variante, welche alle Test in allen drei Zeiträumen besteht. Somit eignet sich das Modell von Alfarano et al. (2008) nicht für VaR-Prognosen.

## 9.6 Ergebnisse der ABM VaR-Prognose

Insgesamt lässt sich aus den VaR-Prognoseergebnissen nicht schließen, dass es einen engen Zusammenhang zwischen dem ML-Wert und der VaR-Prognosegüte gibt, denn

selbst bei nahezu identischen ML-Werten ist die Abweichung der Trefferquote zwischen den Parametersätzen recht groß. Dies ist darauf zurückzuführen, dass ein hoher ML-Wert nur bedeutet, dass die Gesamtvolatilität des Schätzfensters gut approximiert wird. Um genaue VaR-Prognosen zu liefern, muss ein Modell jedoch auch in der Lage sein, schnell auf Änderungen der Volatilität im aktuellen Zeitschritt zu reagieren. Zusammenfassend lässt sich deshalb sagen, dass ein hoher ML-Schätzwert eine notwendige, aber nicht hinreichende Voraussetzung für eine gute VaR-Prognose ist. Was die Unabhängigkeit der Treffer betrifft, so hat sich gezeigt, dass viele ABM Schwierigkeiten haben, den  $LR_{ind}$ -Test durchgängig zu bestehen. Die Ausnahme sind hier das BHR-Modell und das ABM von Lux et al. (2005), bei denen jeder Parametersatz den  $LR_{ind}$ -Test besteht, sowie in geringerem Maße die F- und FT-Modelle, bei denen einige wenige Parametersätze mit hohen  $LR_{ind}$  p-Werten existieren. Das Problem mit der Trefferunabhängigkeit ist dabei hauptsächlich auf die Unfähigkeit zurückzuführen, auf kurze und schwache Volatilitätsspitzen zu reagieren, was zu zahlreichen aufeinanderfolgenden VaR-Treffern während dieser Phasen führt. Da viele ABM das Problem haben, entweder den  $LR_{pof}$ - oder den  $LR_{ind}$ -Test zu bestehen, scheitern die meisten ABM Varianten auch am  $LR_{cc}$ -Test. Alle Parametersätze der BHR- und BR-Modelle sowie das Modell von Alfarano et al. (2008) bestehen mindestens einen der Tests nicht, während es für die übrigen ABM wenigstens einen Parametersatz gibt, der alle drei VaR-Tests in allen Phasen besteht.

## 9.7 Benchmarkvergleich

Da viele Varianten der untersuchten ABM die Christoffersen (1998)-Tests nicht bestehen, werden im Weiteren nur die ABM Varianten mit den besten Prognoseergebnissen<sup>17</sup> für den Vergleich mit den Benchmarkmodellen herangezogen. Auch alle weiteren Untersuchungen werden nur an diesen Modellen durchgeführt.

---

<sup>17</sup>Dies sind die Varianten GB,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_w$ , GH  $\alpha_n$ ,  $\alpha_w$ , F,  $a$  und das Modell von Lux et al. (2005) mit dem zusätzlichen Parameter  $r_0$ . Das FT-Modell besitzt zwar ebenfalls Varianten, die in der Lage sind, genaue VaR-Prognosen zu erstellen, da es jedoch keine Verbesserungen im Vergleich zum F-Modell bietet, wird es von der weiteren Analyse ausgeschlossen.

## 9.7. BENCHMARKVERGLEICH

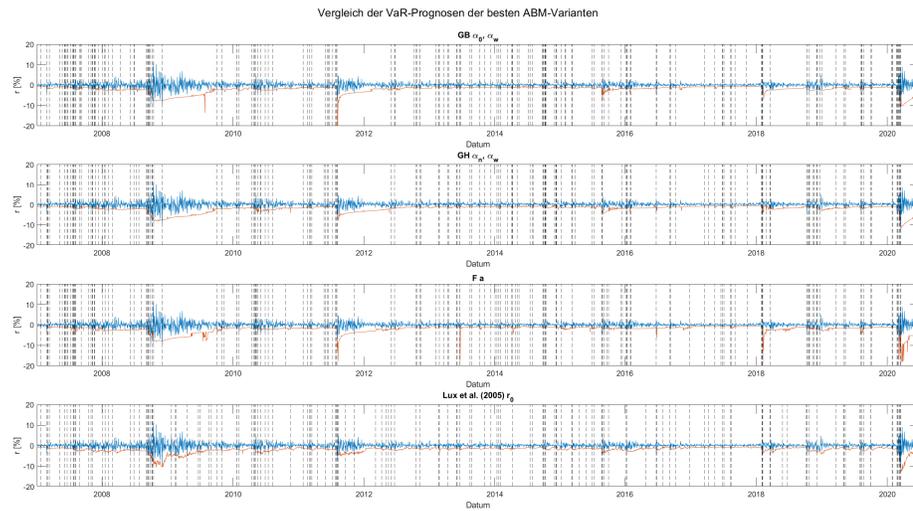


Abbildung 9.1: Vergleich der VaR-Prognosen der ABM Varianten GB,  $\alpha_0, \alpha_w$  (oben), GH,  $\alpha_n, \alpha_w$  (mittig oben), F, a (mittig unten) und Lux et al. (2005),  $r_0$  (unten).

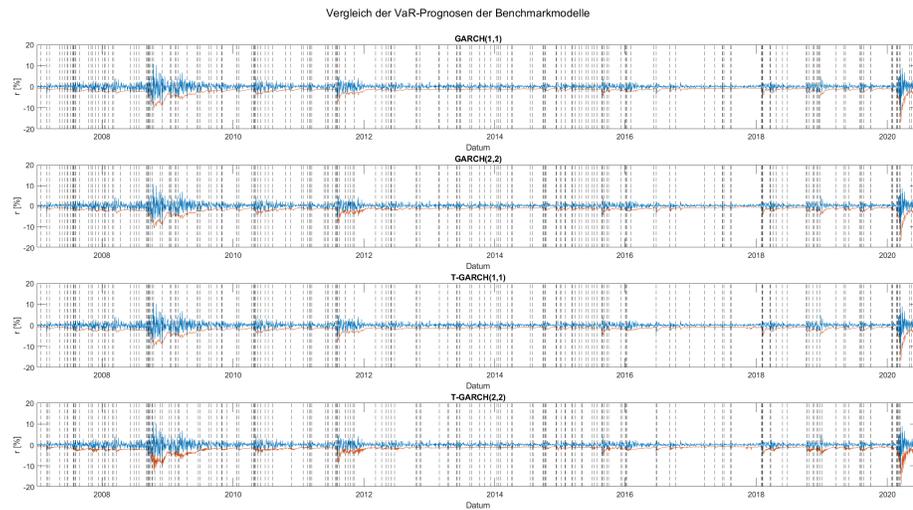


Abbildung 9.2: Vergleich der VaR-Prognosen der Benchmarkmodelle GARCH(1,1) (oben), GARCH(2,2) (mittig oben), T-GARCH(1,1) (mittig unten) und T-GARCH(2,2) (unten).

In den Abbildungen 9.1, 9.2 sind die VaR-Prognosen im Vergleich mit den empirischen Renditen sowie die VaR-Unterschreitungen der ABM und Benchmarkmodelle zu sehen. Alle ABM zeigen weniger Unterschreitungen in Rezessionsphasen als die Benchmarkmodelle, während die Performance in Expansionsphasen annähernd gleich ist. Hierfür gibt es zwei Gründe. Erstens reagieren die ABM schnell auf Änderungen der Volatilität und adjustieren die VaR-Prognosen entsprechend und zweitens wird eine hohe Volatilitätsänderung länger von den ABM beibehalten, was zu weniger VaR-Unterschreitungen im Zeitraum nach dem initialen Volatilitätsanstieg führt. Letzteres kann allerdings nicht für alle ABM gleich stark beobachtet werden. Beim Modell von Lux et al. (2005) nähert sich die VaR-Prognose wieder deutlich schneller einer niedrigeren Volatilität an, was zwar zu ein paar mehr Unterschreitungen im Rezessionszeitraum führt, aber die VaR-Prognosegüte nicht signifikant verschlechtert. Des Weiteren zeigt das Modell von Lux et al. (2005) keine Ausreißer, bei denen der prognostizierte VaR sich deutlich unter der empirischen Rendite befindet. Dies kann bei den anderen ABM durchaus vereinzelt vorkommen.

Tabelle 9.26: Ergebnisse des Christoffersen (1998)-Tests für die VaR-Prognosen ausgewählter Varianten der GB-, GH-, und F-Modelle sowie des Modells von Lux et al. (2005) im Vergleich mit den GARCH(p,q)-Modellen. Die Prognosen decken den Expansionszeitraum in Abbildung 7.1 ab.

Signifikanzniveaus für die Ablehnung der Nullhypothese des Christoffersen (1998)-Tests: (\*) p=0.1, (\*\*) p=0.05 (\*\*\*) p=0.01.

Model	Zusätzliche Parameter	Expansion			
		Rate	$LR_{pof}$	$LR_{ind}$	$LR_{cc}$
GB	$\alpha_0, \alpha_w$	5.35 %	0.390	0.104	0.184
GH	$\alpha_n, \alpha_w$	5.15 %	0.721	0.119	0.279
F	$a$	5.25 %	0.542	0.694	0.769
Lux et al. (2005)	$r_0$	4.59 %	0.308	0.697	0.551
GARCH(1,1)	$\omega, \gamma_1, \phi_1$	5.63 %	0.128	0.256	0.256
GARCH(2,2)	$\omega, \gamma_1, \phi_1, \gamma_2, \phi_2$	5.80 %	0.0535*	0.661	0.141
T-GARCH(1,1)	$\omega, \gamma_1, \phi_1, n$	5.11 %	0.786	0.853	0.947
T-GARCH(2,2)	$\omega, \gamma_1, \phi_1, \gamma_2, \phi_2, n$	5.49 %	0.233	0.256	0.258

In den Tabellen 9.26-9.28 werden die VaR-Prognosen der GB-, GH-, F-Modelle und

## 9.7. BENCHMARKVERGLEICH

Tabelle 9.27: Ergebnisse des Christoffersen (1998)-Tests für die VaR-Prognosen ausgewählter Varianten der GB-, GH-, und F-Modelle sowie des Modells von Lux et al. (2005) im Vergleich mit den GARCH(p,q)-Modellen. Die Prognosen decken den Rezessionszeitraum in Abbildung 7.1 ab.

Signifikanzniveaus für die Ablehnung der Nullhypothese des Christoffersen (1998)-Tests: (\*) p=0.1, (\*\*) p=0.05 (\*\*\*) p=0.01.

Modell	Zusätzliche Parameter	Rezession			
		Rate	$LR_{pof}$	$LR_{ind}$	$LR_{cc}$
GB	$\alpha_0, \alpha_w$	5.82 %	0.411	0.842	0.699
GH	$\alpha_n, \alpha_w$	5.22 %	0.822	0.702	0.906
F	$a$	4.42 %	0.543	0.987	0.831
Lux et al. (2005)	$r_0$	5.82 %	0.411	0.517	0.578
GARCH(1,1)	$\omega, \gamma_1, \phi_1$	7.43 %	0.0199**	0.184	0.0275**
GARCH(2,2)	$\omega, \gamma_1, \phi_1, \gamma_2, \phi_2$	7.43 %	0.0199**	0.184	0.0275**
T-GARCH(1,1)	$\omega, \gamma_1, \phi_1, n$	7.43 %	0.0199**	0.579	0.0570*
T-GARCH(2,2)	$\omega, \gamma_1, \phi_1, \gamma_2, \phi_2, n$	7.83 %	0.0072***	0.461	0.0206**

Tabelle 9.28: Ergebnisse des Christoffersen (1998)-Tests für die VaR-Prognosen ausgewählter Varianten der GB-, GH-, und F-Modelle sowie des Modells von Lux et al. (2005) im Vergleich mit den GARCH(p,q)-Modellen. Die Prognosen decken den gesamten Zeitraum in Abbildung 7.1 ab.

Signifikanzniveaus für die Ablehnung der Nullhypothese des Christoffersen (1998)-Tests: (\*) p=0.1, (\*\*) p=0.05 (\*\*\*) p=0.01.

Model	Zusätzliche Parameter	Gesamt			
		Rate	$LR_{pof}$	$LR_{ind}$	$LR_{cc}$
GB	$\alpha_0, \alpha_w$	5.42 %	0.266	0.119	0.160
GH	$\alpha_n, \alpha_w$	5.16 %	0.678	0.194	0.395
F	$a$	5.13 %	0.736	0.722	0.887
Lux et al. (2005)	$r_0$	4.77 %	0.541	0.934	0.827
GARCH(1,1)	$\omega, \gamma_1, \phi_1$	5.89 %	0.0201**	0.962	0.0671**
GARCH(2,2)	$\omega, \gamma_1, \phi_1, \gamma_2, \phi_2$	6.04 %	0.0070***	0.893	0.0262**
T-GARCH(1,1)	$\omega, \gamma_1, \phi_1, n$	5.45 %	0.235	0.963	0.493
T-GARCH(2,2)	$\omega, \gamma_1, \phi_1, \gamma_2, \phi_2, n$	5.83 %	0.0297**	0.309	0.0561*

des Modells von Lux et al. (2005) sowie der Benchmarkmodelle präsentiert. In der Expansionsperiode zeigen die ABM die Fähigkeit, genaue VaR-Prognosen auf Au-

genhöhe mit dem T-GARCH(1,1)-Benchmark zu erstellen. Zwar verschlechtert sich die Approximation der Trefferquote in der Rezessionsphase leicht, aber die ABM Varianten GB,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_w$ , GH,  $\alpha_n$ ,  $\alpha_w$ , F,  $a$  und Lux et al. (2005),  $r_0$  bestehen alle den  $LR_{pof}$ -Test. Im Gegensatz dazu ist die Trefferquote bei den Benchmark-Modellen erheblich schlechter, da alle Modelle den  $LR_{pof}$ -Test nicht bestehen. Aus diesem Grund besteht von den Benchmarkmodell auch nur das T-GARCH(1,1)-Modell den  $LR_{pof}$ -Test auf dem gesamten Prognosezeitraum, während alle ABM Varianten den  $LR_{pof}$ -Test bestehen. Insgesamt schneiden deshalb die ABM Varianten über den gesamten Prognosezeitraum beim  $LR_{pof}$ -Test besser ab. Da die ABM Varianten GB,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_w$ , GH,  $\alpha_n$ ,  $\alpha_w$ , F,  $a$  und Lux et al. (2005),  $r_0$  in allen drei Zeiträumen keine Probleme mit dem  $LR_{ind}$  haben, führt dies insgesamt dazu, dass alle vier ABM Varianten auch den  $LR_{cc}$  bestehen. Zwar zeigen die Benchmarkmodelle beim  $LR_{ind}$ -Test auch eine gute Performance, aber dadurch dass alle beim  $LR_{pof}$ -Test in der Rezessionsphase scheitern, gibt es auch kein Benchmarkmodell, welches den  $LR_{cc}$ -Test in allen drei Zeiträumen besteht. Damit können die ABM Varianten GB,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_w$ , GH,  $\alpha_n$ ,  $\alpha_w$ , F,  $a$  und Lux et al. (2005),  $r_0$  gegenüber den hier untersuchten Benchmarkmodellen als überlegene VaR-Prognosemodelle angesehen werden.

## 9.8 Korrelation

Durch eine Untersuchung der Verhaltensmuster der Agenten können die VaR-Prognosen noch gründlicher analysiert werden. Dies sollte einzigartige Markteinblicke verschaffen, die traditionellen VaR-Modellen wie den Benchmark-Modellen fehlen. Daher wird zusätzlich untersucht, ob es einen Zusammenhang zwischen den VaR-Prognosen und dem Verhalten der Agenten gibt. Zu diesem Zweck wird die Korrelation zwischen den VaR-Prognosen und den Parameterwerten im entsprechenden Schätzungsfenster betrachtet. Natürlich kann dieser Ansatz nur sinnvoll auf ABM angewendet werden, die bereits bewiesen haben, dass sie genaue VaR-Prognosen erstellen. Vor diesem Hintergrund werden nur die Verhaltenseigenschaften der GB-, GH- und F-Modelle sowie das Modell von Lux et al. (2005) analysiert. Die VaR-Prognosekorrelationen aus den GB,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_w$ , GH,  $\alpha_n$ ,  $\alpha_w$ , F,  $a$  und Lux et al. (2005),

## 9.8. KORRELATION

$r_0$  Sets sind in Tabelle 9.29 angegeben.

Tabelle 9.29: Korrelationen zwischen den VaR-Werten und den Systemparametern der GB-, GH- und F-Modelle sowie des Modells von Lux et al. (2005) in der Expansions- und Rezessionsphase. Signifikanzniveaus für die Korrelationskoeffizienten: (\*)  $p=0.1$ , (\*\*)  $p=0.05$  (\*\*\*)  $p=0.01$ .

Parameter	Korrelation					
	Expansion			Rezession		
	GB	GH	F	GB	GH	F
$\sigma_f$	-0.274***	-0.529***	-0.0415**	-0.556***	-0.522***	-0.414***
$\sigma_c$	-0.210***	-0.337***	-0.355***	-0.413***	-0.442***	-0.590***
$a_w$	0.0958***	0.0882***		0.195***	0.218***	
$a_0$	-0.0331*			-0.349***		
$a_n$		0.0634***			-0.185***	
$a$			-0.0530***			-0.176***

Parameter	Korrelation	
	Lux et al. (2005)	
	Expansion	Rezession
$\alpha_f$	0.0688***	0.218***
$\alpha_r$	0.110***	0.237***
$\delta$	0.0803***	0.0390
$r_0$	-0.166***	-0.278**

Die erste Schlussfolgerung aus Tabelle 9.29 ist, dass die VaR-Prognosen mit den Volatilitätsparametern  $\sigma_f$ ,  $\sigma_c$  und  $r_0$  stark negativ korreliert sind<sup>18</sup>. Des Weiteren ist diese Korrelation in der Rezessionsperiode noch stärker als in der Expansionsperiode. Dies mag aus Sicht der Modellierung nicht überraschen, hat aber auch einen verhaltensbezogenen Aspekt, der hier in erster Linie erörtert werden soll. In den ABM von Franke und Westerhoff (2012, 2016) sowie Brock und Hommes (1998) wurden die Volatilitätsparameter  $\sigma_f$  und  $\sigma_c$  als mögliche Kombinationen individueller Abweichungen vom deterministischen Teil der fundamentalen und technischen Strategien charakterisiert. Daher steht ein Anstieg der Volatilität in direktem Zusammenhang mit einer zunehmenden Heterogenität in der Preisprognose von Fundamentalisten

<sup>18</sup>Da der VaR hier eine negative Rendite ist, ergibt diese negative Korrelation durchaus Sinn.

bzw. Chartisten. Dies bedeutet, dass sich die Akteure mehr auf individuelle Strategien verlassen, um erfolgreich zu sein. Laut Tabelle 9.29 ist dieses Verhaltensmuster in der Rezessionsphase noch stärker ausgeprägt. Ein interessanter Unterschied zwischen den Modellen von Franke und Westerhoff (2012, 2016) und Brock und Hommes (1998) besteht hinsichtlich des Einflusses der Parameter  $\sigma_f$  und  $\sigma_c$  auf die VaR-Prognosen. Während bei den GB- und GH-Modellen die Korrelation für  $\sigma_f$  und  $\sigma_c$  in allen Perioden nahezu gleich ist, kann dies bei dem F-Modell nicht beobachtet werden. Hier ist die Korrelation von  $\sigma_f$  während der Expansion deutlich geringer. Daher sind Chartisten fast ausschließlich für Phasen hoher Volatilität im Expansionszeitraum verantwortlich. Beim Modell von Lux et al. (2005) gibt der Volatilitätsparameter  $r_0$  hingegen den Einfluss der Noise-Trader auf die Preisbildung an. Damit sind hohe VaR-Prognosewerte direkt auf stärker ausgeprägtes Noise-Trading zurückzuführen, wobei die Auswirkung eines höheren Volatilitätsparameters auch bei diesem ABM in der Rezessionsphase stärker ist. Als nächstes wird der Einfluss der modellspezifischen Verhaltensparameter bestimmt. Für alle Varianten des Modells von Franke und Westerhoff (2012, 2016) ist der Parameter  $\alpha_w$  signifikant positiv mit den VaR-Prognosen korreliert. Der Effekt ist in der Rezessionsperiode noch stärker, was impliziert, dass mit zunehmender Volatilität der Gewinn einer Strategie ein weniger wichtiges Entscheidungskriterium für die Agenten wird<sup>19</sup>. Dies in Kombination mit höheren Werten für  $\sigma_f$  und  $\sigma_c$  deutet auf eine allgemeine Verringerung der Rationalität hin<sup>20</sup>. Diese Schlussfolgerung wird durch die Ergebnisse für die Parameter  $\alpha_0$  (GB) und  $\alpha_n$  (BH) noch verstärkt. Für die GB-Variante ändert sich die Korrelation von leicht signifikant negativ in der Expansionsperiode zu stark signifikant negativ in der Rezessionsperiode. Das bedeutet, dass in Krisenzeiten der Entscheidungsprozess der Agenten, welcher in der Expansionsphase noch überwiegend auf realisierten Gewinnen basiert, nun von einem Bias zugunsten der technischen Stra-

---

<sup>19</sup>Eine stärkere positive Korrelation bedeutet, dass für höhere VaR-Werte der Parameter  $\alpha_w$  generell kleiner wird.

<sup>20</sup>Die hier verwendete Definition von Rationalität basiert auf zwei modellspezifischen Regeln. Erstens, wie stark orientieren sich die Agenten an den deterministischen Teilen der Strategien. Zweitens, wie stark sind die akkumulierten Gewinne an den Strategieentscheidungen der Agenten in Krisenzeiten beteiligt.

## 9.8. KORRELATION

ategie dominiert wird. Die Techniker sind also überwiegend für die höhere Volatilität in der Rezessionsphase verantwortlich, da die hohe Anzahl der Techniker direkt zu höheren VaR-Werten führt. Etwas Ähnliches kann für das GH-Modell beobachtet werden. Hier ändert sich die Korrelation von signifikant positiv in der Expansionsphase zu signifikant negativ in der Rezessionsphase. Während Herdenverhalten also in Phasen hoher Volatilität in der Expansionsphase völlig unbedeutend ist, ist es in der Rezessionsphase der vorherrschende Entscheidungsfaktor für die Akteure. Des Weiteren soll noch analysiert werden, wie sich der Risikoaversionsparameter  $a$  auf die VaR-Prognosen im F-Modell auswirkt. Es kann eine signifikante negative Korrelation sowohl für die Rezessions- als auch für die Expansionsphase beobachtet werden. Dieser Effekt ist während einer Rezession sogar noch stärker, was darauf hindeutet, dass Agenten in Zeiten höherer Volatilität zunehmend risikoscheuer werden. Beim Modell von Lux et al. (2005) wiederum ist die Korrelation zwischen Verhaltensparametern und VaR-Prognosen positiv. In der Expansionsphase haben alle Parameter eine signifikant positive Korrelation, was bedeutet, dass die Attraktivität der Strategien und das Herdenverhalten in Zeiten hoher Volatilität abnimmt. In der Rezessionsphase verstärkt sich der Effekt bei den Attraktivitätsparametern  $\alpha_f$  und  $\alpha_r$  noch, während der Herdenparameter  $\delta$  keine Signifikanz mehr aufweist. Insgesamt führt dies dazu, dass die Agenten häufiger zwischen den Strategien wechseln und dadurch die Volatilitätsschwankungen zunehmen. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass bei den GB-, GH- und F-Modellen höhere VaR-Prognosen weitgehend durch einen Anstieg der Volatilitätsparameter  $\sigma_f$  und  $\sigma_c$  bedingt sind. Die verhaltensbasierte Erklärung hierfür ist die abnehmende Homogenität der Kursprognosen von Fundamentalisten und Chartisten. Die Marktteilnehmer sind sich zunehmend uneinig über die Gesamtstrategie und verlassen sich stattdessen mehr auf individuelle Prognosen. Für das Modell von Franke und Westerhoff (2012, 2016) geht dies mit einem Rationalitätsverlust einher, der sich in einer Verringerung der gewinnbasierten Entscheidungsfindung zugunsten einer verstärkten Ausrichtung auf die Technikerstrategie (GB) oder eines stärkeren Herdenverhaltens (GH) äußert. Im Gegensatz dazu wird die zusätzliche Verhaltensbegründung für höhere VaR-Prognosen durch die Risikoaversion im F-Modell bestimmt, wo eine hohe Volatilität mit einer höheren

Risikoaversion einhergeht. Für das Modell von Lux et al. (2005) gehen höhere VaR-Prognosen mit einer erhöhten Stärke von Noise-Trading sowie einer höheren Bereitschaft zum Strategiewechsel einher. Insgesamt gibt es in Krisenzeiten also keinen Konsens mehr darüber was die beste Strategie ist und die Marktteilnehmer verhalten sich deshalb zunehmend erratisch.

# Kapitel 10

## Zusammenfassung

In dieser Thesis wird untersucht, ob die von Brock und Hommes (1998), Lux et al. (2005), Alfarano et al. (2008) und Franke und Westerhoff (2012, 2016) eingeführten ABM zur Erstellung genauer VaR-Prognosen verwendet werden können. Um dies zu erreichen, wird ein zweistufiger Kalibrierungsansatz verwendet. Zur Erstellung einer allgemeinen Schätzung der Modellparameter wird dabei im ersten Schritt das MSM-Verfahren verwendet. Um eine bessere Annäherung an die VaR-Prognosen zu erhalten, werden dazu VaR bezogene Momente zusammen mit einem Standard-satz von weit verbreiteten MSM-Momenten verwendet. Es hat sich gezeigt, dass die Durchführung der zweiten Schätzung mit einer präzisen MSM-Approximation als Ausgangspunkt genaue VaR-Prognosen liefert. Nach Erhalt der MSM-Parameterschätzungen wird eine ML- bzw. SMC-Kalibrierung durchgeführt. Während es in diesem Schritt möglich ist, alle Parameter neu zu schätzen, konnte festgestellt werden, dass genauere VaR-Prognosen erstellt werden, wenn nur ein Teil der Parameter neu bestimmt wird. Insgesamt sind fünf der zehn in dieser Studie untersuchten ABM Varianten in der Lage, VaR-Prognosen zu erstellen, die besser sind als die der üblichen Benchmark-Modelle. Darüber hinaus ist besonders bemerkenswert, dass die ABM während der Finanzkrise und der Covid-19-Rezession eine höhere Prognosegüte aufweisen. Somit eignen sich ABM besser zur VaR-Prognose in Perioden, die durch hohe Verlustrisiken gekennzeichnet sind. Schließlich finden sich auch Hinweise darauf, dass ein bestimmtes Agentenverhalten mit hohen bzw. niedrigen prognostizierten

VaR-Werten zusammenhängt. Damit übertreffen die ABM nicht nur herkömmliche VaR-Modelle, sondern bieten auch einen einzigartigen Einblick in die möglichen Ursachen extremer Marktvolatilität. Dies ist etwas, wozu die traditionelleren VaR-Modelle nicht in der Lage sind. In Anbetracht der vielversprechenden Ergebnisse dieser Thesis sollten weitere Untersuchungen zur ABM VaR-Prognose durchgeführt werden. Zu diesem Zweck gibt es vier vielversprechende, alternative Ansätze. Erstens könnten verschiedene Momente für die MSM-Optimierung ausgewählt werden. Insbesondere die Auswahl zusätzlicher VaR bezogener Momente ist möglicherweise in der Lage, noch bessere VaR-Prognosen zu liefern. Zweitens könnten Anpassungen an den Strukturen der ABM vorgenommen werden, welche die Schätzung sowie die VaR-Prognosen noch weiter verbessern. Insbesondere das Hinzufügen zusätzlicher Strategien oder die Veränderung des Entscheidungsprozesses der Agenten sind vielversprechende Ansätze. Anstatt das Risiko durch die Verwendung spezifischer Momente einzubeziehen, ist es auch möglich, es direkt in das Verhalten der Agenten einzubauen. Drittens könnten auch andere ABM mit den in dieser Arbeit beschriebenen Methoden kalibriert werden. Viertens könnten alternative Kalibrierungstechniken entweder für die MSM- oder die ML- bzw. SMC-Schätzung verwendet werden. In der Tat sollte die Verwendung weiterer ABM für die VaR-Prognose durch die Änderung bestehender oder die Entwicklung zusätzlicher Modelle eine Forschungspriorität sein, da dies nicht nur eine breitere Vergleichsbasis zwischen den ABM bietet, sondern auch der vielversprechendste Ansatz zur Verbesserung der VaR-Prognosen der ABM ist. Schließlich rechtfertigen die Ergebnisse dieser Thesis nicht nur die künftige akademische Forschung, sondern auch eine praktische Anwendung von ABM bei der VaR-Prognose. Insbesondere sollte untersucht werden, ob es möglich ist, ein Frühwarnsystem für plötzliche Volatilitätsänderungen zu schaffen, indem die in dieser Thesis gefundenen Verhaltensmuster in Verbindung mit den VaR-Prognosen verwendet werden. Des Weiteren sind die hier vorgestellte Kalibrierungstechniken nicht auf die VaR-Prognose beschränkt. Der zweistufige Ansatz ermöglicht es, mit ABM die Dynamik von Zeitreihen zu beschreiben. Dies eröffnet die Möglichkeit, ABM in vielen anderen empirischen Anwendungen einzusetzen. Allerdings könnten Änderungen der Schätzmethode im Hinblick auf die Anwendung erforderlich sein. Insbesondere ist es

von Vorteil, MSM-Momente zu wählen, die einen Zusammenhang zur gewünschten Anwendung aufweisen. Außerdem ermöglicht der zweistufige Ansatz auch den Vergleich konkurrierender ABM. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass ABM gut für empirische Anwendungen geeignet sind und die hier vorgestellten Kalibrierungstechniken als Beispiel für den Einsatz von ABM in zukünftigen Anwendungen dienen.



# Literaturverzeichnis

- Abad, P., Benito, S., und López, C. (2014). A comprehensive review of Value at Risk methodologies. *The Spanish Review of Financial Economics*, 12(1):15–32.
- Alfarano, S., Lux, T., und Wagner, F. (2008). Time variation of higher moments in a financial market with heterogeneous agents: An analytical approach. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 32(1):101–136.
- Alfarano, S. und Milaković, M. (2008). Should network structure matter in agent-based finance? Technischer bericht, Economics Working Paper.
- Alfarano, S., Milaković, M., und Raddant, M. (2009). Network hierarchy in Kirman’s ant model: fund investment can create systemic risk. Economics Working Papers 2009-09, Christian-Albrechts-University of Kiel, Department of Economics.
- Amilon, H. (2008). Estimation of an adaptive stock market model with heterogeneous agents. *Journal of Empirical Finance*, 15(2):342–362.
- Angelidis, T., Benos, A., und Degiannakis, S. (2004). The use of GARCH models in VaR estimation. *Statistical methodology*, 1(1-2):105–128.
- Anufriev, M., Arifovic, J., Ledyard, J., und Panchenko, V. (2013). Efficiency of continuous double auctions under individual evolutionary learning with full or limited information. *Journal of Evolutionary Economics*, 23(3):539–573.
- Arthur, W. B., Holland, J. H., LeBaron, B., Palmer, R., und Tayler, P. (1997). Asset pricing under endogenous expectations in an artificial stock market. In Arthur,

- W., Lane, D., und Durlauf, S., Herausgeber, *The economy as an evolving, complex system II*, Seiten 15–44. Addison Wesley, Redwood City, CA.
- Baptista, R., Farmer, J. D., Hinterschweiger, M., Low, K., Tang, D., und Uluc, A. (2016). Macroprudential policy in an agent-based model of the UK housing market. Technischer bericht, Bank of England.
- Barde, S. (2016). Direct comparison of agent-based models of herding in financial markets. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 73:329–353.
- Barde, S. (2017). A Practical, Accurate, Information Criterion for Nth Order Markov Processes. *Computational Economics*, 50:281–324.
- Beja, A. und Goldman, M. B. (1980). On The Dynamic Behavior of Prices in Disequilibrium. *The Journal of Finance*, 35(2):235–248.
- Bekiros, S. D. und Georgoutsos, D. A. (2005). Estimation of Value-at-Risk by extreme value and conventional methods: a comparative evaluation of their predictive performance. *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, 15(3):209–228.
- Berkowitz, J. und O’Brien, J. (2002). How accurate are value-at-risk models at commercial banks? *The journal of finance*, 57(3):1093–1111.
- Biais, B., Hillion, P., und Spatt, C. (1995). An Empirical Analysis of the Limit Order Book and the Order Flow in the Paris Bourse. *The Journal of Finance*, 50(5):1655–1689.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of econometrics*, 31(3):307–327.
- Bollerslev, T. (1987). A Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return. *The Review of Economics and Statistics*, 69(3):542–547.

## LITERATURVERZEICHNIS

- Bolt, W., Demertzis, M., Diks, C., Hommes, C., und van der Leij, M. (2019). Identifying booms and busts in house prices under heterogeneous expectations. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 103:234–259.
- Boswijk, H. P., Hommes, C. H., und Manzan, S. (2007). Behavioral heterogeneity in stock prices. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 31(6):1938–1970.
- Bouchaud, J.-P., Mézard, M., und Potters, M. (2002). Statistical properties of stock order books: empirical results and models. *Quantitative Finance*, 2(4):251–256.
- Bratton, D. und Kennedy, J. (2007). Defining a standard for particle swarm optimization. In *2007 IEEE swarm intelligence symposium*, Seiten 120–127.
- Brock, W. und Hommes, C. (1998). Heterogeneous beliefs and routes to chaos in a simple asset pricing model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 22(8-9):1235–1274.
- Caeiro, F., Gomes, M., und Pestana, D. (2005). Direct reduction of bias of the classical Hill estimator. *Revstat*, 3(2):113–136.
- Campbell, S. D. (2005). A review of backtesting and backtesting procedures. Technischer bericht, Board of Governors of the Federal Reserve System (U.S.).
- Candelon, B., Colletaz, G., Hurlin, C., und Tokpavi, S. (2011). Backtesting value-at-risk: a GMM duration-based test. *Journal of Financial Econometrics*, 9(2):314–343.
- Caporin, M. (2008). Evaluating value-at-risk measures in the presence of long memory conditional volatility. *The Journal of Risk*, 10(3):79.
- Chelouah, R. und Siarry, P. (2003). Genetic and Nelder-Mead algorithms hybridized for a more accurate global optimization of continuous multim minima functions. *European Journal of operational research*, 148(2):335–348.
- Chen, S.-H., Chang, C.-L., und Du, Y.-R. (2012). Agent-based economic models and econometrics. *The Knowledge Engineering Review*, 27(2):187–219.

- Chen, Z. und Lux, T. (2018). Estimation of Sentiment Effects in Financial Markets: A Simulated Method of Moments Approach. *Computational Economics*, 52:711 – 744.
- Chiarella, C., He, X.-Z., und Hommes, C. (2006). A dynamic analysis of moving average rules. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 30(9):1729–1753.
- Chiarella, C., Iori, G., und Perelló, J. (2009). The impact of heterogeneous trading rules on the limit order book and order flows. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 33(3):525–537.
- Christoffersen, P. und Pelletier, D. (2004). Backtesting value-at-risk: A duration-based approach. *Journal of Financial Econometrics*, 2(1):84–108.
- Christoffersen, P. F. (1998). Evaluating Interval Forecasts. *International Economic Review*, 39(4):841–862.
- Christoffersen, P. F. und Diebold, F. X. (2000). How relevant is volatility forecasting for financial risk management? *Review of Economics and Statistics*, 82(1):12–22.
- Clauset, A., Shalizi, C. R., und Newman, M. E. (2009). Power-law distributions in empirical data. *SIAM review*, 51(4):661–703.
- Clements, M. P. und Taylor, N. (2003). Evaluating interval forecasts of high-frequency financial data. *Journal of Applied Econometrics*, 18(4):445–456.
- Clerc, M. (2010). Particle Swarm Optimization. *Part. Swarm Optim.*, Seiten 1–17.
- Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, 1(2):223–236.
- Cont, R. und Bouchaud, J.-P. (2000). Herd behavior and aggregate fluctuations in financial markets. *Macroeconomic Dynamics*, 4(2):170–196.
- Dacorogna, M. M. und Pictet, O. V. (1998). Heavy Tails in High-Frequency Financial Data. *Capital Markets eJournal*.

## LITERATURVERZEICHNIS

- Day, R. H. und Huang, W. (1990). Bulls, bears and market sheep. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 14(3):299–329.
- De Long, J. B., Shleifer, A., Summers, L. H., und Waldmann, R. J. (1990). Noise trader risk in financial markets. *Journal of political Economy*, 98(4):703–738.
- Diks, C. und van der Weide, R. (2005). Herding, a-synchronous updating and heterogeneity in memory in a CBS. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 29(4):741–763.
- Ding, Z., Granger, C. W., und Engle, R. F. (1993). A long memory property of stock market returns and a new model. *Journal of empirical finance*, 1(1):83–106.
- Duffie, D. und Singleton, K. J. (1993). Simulated Moments Estimation of Markov Models of Asset Prices. *Econometrica*, 61(4):929–952.
- Dumitrescu, E.-I., Hurlin, C., und Madkour, J. (2013). Testing interval forecasts: A GMM-based approach. *Journal of Forecasting*, 32(2):97–110.
- Dumitrescu, E.-I., Hurlin, C., und Pham, V. (2012). Backtesting value-at-risk: from dynamic quantile to dynamic binary tests. *Finance*, 33(1):79–112.
- Durand, N. und Alliot, J.-M. (1999). A combined nelder-mead simplex and genetic algorithm. In *GECCO'99: Proc. Genetic and Evol. Comp. Conf.* Citeseer.
- Eberhart und Shi, Y. (2001). Particle swarm optimization: developments, applications and resources. In *Proceedings of the 2001 Congress on Evolutionary Computation*, Band 1, Seiten 81–86.
- Eberhart, R. C. und Shi, Y. (2000). Comparing inertia weights and constriction factors in particle swarm optimization. In *Proceedings of the 2000 congress on evolutionary computation*, Band 1, Seiten 84–88.
- Efron, B. (1979). Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife. *The Annals of Statistics*, 7(1):1–26.

- El-Mihoub, T. A., Hopgood, A. A., Nolle, L., und Battersby, A. (2006). Hybrid Genetic Algorithms: A Review. *Eng. Lett.*, 13(2):124–137.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, Seiten 987–1007.
- Engle, R. F. und Manganelli, S. (2004). CAViaR: Conditional autoregressive value at risk by regression quantiles. *Journal of business & economic statistics*, 22(4):367–381.
- Fama, E. F. (1965). The behavior of stock-market prices. *The journal of Business*, 38(1):34–105.
- Fama, E. F. (1970). Efficient capital markets: A review of theory and empirical work. *The journal of Finance*, 25(2):383–417.
- Fan, S.-K. S., Liang, Y.-c., und Zahara, E. (2004). Hybrid simplex search and particle swarm optimization for the global optimization of multimodal functions. *Engineering optimization*, 36(4):401–418.
- Fan, S.-K. S., Liang, Y.-C., und Zahara, E. (2006). A genetic algorithm and a particle swarm optimizer hybridized with Nelder-Mead simplex search. *Computers & industrial engineering*, 50(4):401–425.
- Fan, Y., Zhang, Y.-J., Tsai, H.-T., und Wei, Y.-M. (2008). Estimating ‘Value at Risk’ of crude oil price and its spillover effect using the GED-GARCH approach. *Energy Economics*, 30(6):3156–3171.
- Fisher, R. A. und Tippett, L. H. C. (1928). Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 24(2):180–190.
- Franke, R. (2009). Applying the method of simulated moments to estimate a small agent-based asset pricing model. *Journal of Empirical Finance*, 16(5):804–815.

## LITERATURVERZEICHNIS

- Franke, R. und Westerhoff, F. (2012). Structural stochastic volatility in asset pricing dynamics: Estimation and model contest. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 36(8):1193–1211.
- Franke, R. und Westerhoff, F. (2016). Why a simple herding model may generate the stylized facts of daily returns: Explanation and estimation. *Journal of Economic Interaction and Coordination*, 11:1 – 34.
- Gaunersdorfer, A., Hommes, C. H., und Wagener, F. O. (2008). Bifurcation routes to volatility clustering under evolutionary learning. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 67(1):27–47.
- Ghonghadze, J. und Lux, T. (2016). Bringing an elementary agent-based model to the data: Estimation via GMM and an application to forecasting of asset price volatility. *Journal of Empirical Finance*, 37:1–19.
- Gilli, M. und Winker, P. (2003). A global optimization heuristic for estimating agent based models. *Computational Statistics & Data Analysis*, 42(3):299–312. Computational Econometrics.
- Gnedenko, B. (1943). Sur La Distribution Limite Du Terme Maximum D’Une Serie Aleatoire. *Annals of Mathematics*, 44(3):423–453.
- Gomes, M. I. und Pestana, D. (2007a). A simple second-order reduced bias’ tail index estimator. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 77(6):487–502.
- Gomes, M. I. und Pestana, D. (2007b). A Sturdy Reduced-Bias Extreme Quantile (VaR) Estimator. *Journal of the American Statistical Association*, 102(477):280–292.
- Gopikrishnan, P., Meyer, M., Amaral, L. A. N., und Stanley, H. E. (1998). Inverse cubic law for the distribution of stock price variations. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 3:139–140.
- Grazzini, J. (2012). Analysis of the emergent properties: Stationarity and ergodicity. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, 15(2):7.

- Grazzini, J. und Richiardi, M. (2015). Estimation of ergodic agent-based models by simulated minimum distance. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 51:148–165.
- Grazzini, J., Richiardi, M. G., und Tsionas, M. (2017). Bayesian estimation of agent-based models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 77:26–47.
- Haas, M. (2005). Improved duration-based backtesting of value-at-risk. *The Journal of Risk*, 8(2):17.
- Hall, P., Horowitz, J. L., und Jing, B.-Y. (1995). On Blocking Rules for the Bootstrap with Dependent Data. *Biometrika*, 82(3):561–574.
- Hassan, R., Cohanim, B., De Weck, O., und Venter, G. (2005). A comparison of particle swarm optimization and the genetic algorithm. In *46th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC structures, structural dynamics and materials conference*, Seite 1897.
- Hauksson, H., Dacorogna, M., Domenig, T., Mller, U., und Samorodnitsky, G. (2001). Multivariate extremes, aggregation and risk estimation. *Quantitative Finance*, 1(1):79–95.
- Hill, B. M. (1975). A Simple General Approach to Inference About the Tail of a Distribution. *The Annals of Statistics*, 3(5):1163–1174.
- Hommes, C. u a. (2017). Booms, busts and behavioural heterogeneity in stock prices. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 80:101–124.
- Hommes, C. H. (2006). Chapter 23 Heterogeneous Agent Models in Economics and Finance. In *Handbook of Computational Economics*, Band 2, Seiten 1109–1186. Elsevier.
- Huisman, R., Koedijk, K. C. G., Kool, C. J. M., und Palm, F. C. (2001). Tail-Index Estimates in Small Samples. *Journal of Business & Economic Statistics*, 19:208–216.

## LITERATURVERZEICHNIS

- Hurlin, C., Tokpavi, S., u a. (2007). Backtesting Value-at-Risk Accuracy: A New Simple Test. *Journal of Risk*, 9(2):19–37.
- Iori, G. (2002). A microsimulation of traders activity in the stock market: the role of heterogeneity, agents' interactions and trade frictions. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 49(2):269–285.
- Jang, T.-S. (2015). Identification of Social Interaction Effects in Financial Data. *Computational Economics*, 45(2):207–238.
- Jang, T.-S. und Sacht, S. (2016). Animal Spirits and the Business Cycle: Empirical Evidence from Moment Matching. *Metroeconomica*, 67(1):76–113.
- Jansen, D. und de Vries, C. (1991). On the Frequency of Large Stock Returns: Putting Booms and Busts into Perspective. *The Review of Economics and Statistics*, 73(1):18–24.
- Ji, J., Wang, D., und Xu, D. (2019). Modelling the spreading process of extreme risks via a simple agent-based model: Evidence from the China stock market. *Economic Modelling*, 80:383–391.
- Jondeau, E. und Rockinger, M. (2003). The tail behavior of stock returns: Emerging versus mature markets. *Journal of Empirical Finance*, 10:559–581.
- Jordehi, A. R., Jasni, J., Wahab, N. I. A., und Abd Kadir, M. Z. A. (2013). Particle swarm optimisation applications in FACTS optimisation problem. In *2013 IEEE 7th international power engineering and optimization conference*, Seiten 193–198. IEEE.
- Kennedy, J. und Eberhart, R. (1995). Particle swarm optimization. In *Proceedings of ICNN'95-international conference on neural networks*, Band 4, Seiten 1942–1948.
- Kennedy, J. und Mendes, R. (2002). Population structure and particle swarm performance. In *Proceedings of the 2002 Congress on Evolutionary Computation*, Band 2, Seiten 1671–1676.

- Kirman, A. (1993). Ants, Rationality, and Recruitment. *The Quarterly Journal of Economics*, 108(1):137–156.
- Kirman, A. und Gilles, T. (2002). Microeconomic Models for Long Memory in the Volatility of Financial Time Series. *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, 5(4):1–23.
- Koedijk, K. G., Schafgans, M. M., und de Vries, C. G. (1990). The tail index of exchange rate returns. *Journal of International Economics*, 29(1):93–108.
- Kukacka, J. und Barunik, J. (2017). Estimation of financial agent-based models with simulated maximum likelihood. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 85:21–45.
- Kukacka, J. und Kristoufek, L. (2020). Do ‘complex’ financial models really lead to complex dynamics? Agent-based models and multifractality. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 113:103855.
- Kunsch, H. R. (1989). The Jackknife and the Bootstrap for General Stationary Observations. *The Annals of Statistics*, 17(3):1217–1241.
- Kupiec, P. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *The Journal of Derivatives*, 3(2):73–84.
- Lamperti, F. (2017). An information theoretic criterion for empirical validation of simulation models. *Econometrics and Statistics*, 5:83–106.
- LeBaron, B. (2006). Chapter 24 Agent-based Computational Finance. In *Handbook of Computational Economics*, Band 2, Seiten 1187–1233. Elsevier.
- Lee, B.-S. und Ingram, B. F. (1991). Simulation estimation of time-series models. *Journal of Econometrics*, 47(2):197–205.
- Lobato, I. N. und Savin, N. E. (1998). Real and Spurious Long-Memory Properties of Stock-Market Data. *Journal of Business & Economic Statistics*, 16(3):261–268.

## LITERATURVERZEICHNIS

- Longin, F. M. (1996). The Asymptotic Distribution of Extreme Stock Market Returns. *The Journal of Business*, 69(3):383–408.
- Lopez, J. A. (1998). Methods for Evaluating Value-at-Risk Estimates. *Economic Policy Review*, 4(3):119–124.
- Lux, T. (1996). The stable Paretian hypothesis and the frequency of large returns: an examination of major German stocks. *Applied Financial Economics*, 6(6):463–475.
- Lux, T. (1998). The Limiting Extremal Behaviour of Speculative Returns: An Analysis of Intra-Daily Data From the Frankfurt Stock Exchange. *IFAC Proceedings Volumes*, 31(16):29–33.
- Lux, T. (2009). Stochastic behavioral asset-pricing models and the stylized facts. In *Handbook of financial markets: Dynamics and evolution*, Seiten 161–215. Elsevier.
- Lux, T. (2018). Estimation of agent-based models using sequential Monte Carlo methods. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 91:391–408.
- Lux, T., Alfarano, S., und Wagner, F. (2005). Estimation of Agent-Based Models: The Case of an Asymmetric Herding Model. *Computational Economics*, 26:19–49.
- Lux, T. und Marchesi, M. (1999). Scaling and criticality in a stochastic multi-agent model of a financial market. *Nature*, 397(11):498–500.
- Lux, T. und Marchesi, M. (2000). Volatility clustering in financial markets: a micro-simulation of interacting agents. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 03(04):675–702.
- Mandelbrot, B. (1963). The Variation of Certain Speculative Prices. *The Journal of Business*, 36(4):394–419.
- Mandelbrot, B. (1967). The Variation of Some Other Speculative Prices. *The Journal of Business*, 40(4):393–413.

- Manzan, S. und Westerhoff, F. H. (2007). Heterogeneous expectations, exchange rate dynamics and predictability. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 64(1):111–128.
- McFadden, D. (1989). A Method of Simulated Moments for Estimation of Discrete Response Models Without Numerical Integration. *Econometrica*, 57(5):995–1026.
- Mitnik, S. und Paoella, M. S. (2000). Conditional density and value-at-risk prediction of Asian currency exchange rates. *Journal of Forecasting*, 19(4):313–333.
- Moys, G. (2018). *Risikomanagement für heterogene Finanzportfolios*. Verlag Dr. Kovač.
- Nelder, J. A. und Mead, R. (1965). A simplex method for function minimization. *The computer journal*, 7(4):308–313.
- Newey, W. K. und West, K. D. (1987). A Simple, Positive Semi-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix. *Econometrica*, 55(3):703–708.
- Nieppola, O. (2009). Backtesting Value-at-Risk Models. Technischer bericht, Helsinki School of Economics.
- Nieto, M. R. und Ruiz, E. (2016). Frontiers in VaR forecasting and backtesting. *International Journal of Forecasting*, 32(2):475–501.
- Pakes, A. und Pollard, D. (1989). Simulation and the Asymptotics of Optimization Estimators. *Econometrica*, 57(5):1027–1057.
- Panda, S. und Padhy, N. P. (2008). Comparison of particle swarm optimization and genetic algorithm for FACTS-based controller design. *Applied soft computing*, 8(4):1418–1427.
- Pictet, O. V., Dacorogna, M. M., und Müller, U. A. (1998). *Hill, Bootstrap and Jackknife Estimators for Heavy Tails*, Seite 283–310. Birkhauser Boston Inc.

## LITERATURVERZEICHNIS

- Platt, D. (2020). A comparison of economic agent-based model calibration methods. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 113:103859.
- Poli, R., Kennedy, J., und Blackwell, T. (2007). Particle swarm optimization. *Swarm intelligence*, 1(1):33–57.
- Politis, D. N. und Romano, J. P. (1991). *A circular block-resampling procedure for stationary data*. Purdue University. Department of Statistics.
- Politis, D. N. und Romano, J. P. (1994). The stationary bootstrap. *Journal of the American Statistical association*, 89(428):1303–1313.
- Raberto, M., Cincotti, S., Focardi, S. M., und Marchesi, M. (2001). Agent-based simulation of a financial market. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 299(1):319–327.
- Raberto, M., Cincotti, S., Focardi, S. M., und Marchesi, M. (2003). Traders’ long-run wealth in an artificial financial market. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 22(2):255–272.
- Recchioni, M. C., Tedeschi, G., und Gallegati, M. (2015). A calibration procedure for analyzing stock price dynamics in an agent-based framework. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 60:1–25.
- Rekik, Y. M., Hachicha, W., und Boujelbene, Y. (2014). Agent-based Modeling and Investors’ Behavior Explanation of Asset Price Dynamics on Artificial Financial Markets. *Procedia Economics and Finance*, 13:30–46.
- Samanidou, E., Zschischang, E., Stauffer, D., und Lux, T. (2007). Agent-based models of financial markets. *Reports on Progress in Physics*, 70(3):409–450.
- Sarma, M., Thomas, S., und Shah, A. (2003). Selection of Value-at-Risk models. *Journal of Forecasting*, 22(4):337–358.
- Schmitt, N. und Westerhoff, F. (2017). Herding behaviour and volatility clustering in financial markets. *Quantitative Finance*, 17(8):1187–1203.

- Sewell, M. (2011). Characterization of financial time series. *Research Note*, 11(01):01.
- Shi, Y. und Eberhart, R. (1998). A modified particle swarm optimizer. In *1998 IEEE international conference on evolutionary computation proceedings. IEEE world congress on computational intelligence*, Seiten 69–73.
- Shi, Y. und Eberhart, R. C. (1999). Empirical study of particle swarm optimization. In *Proceedings of the 1999 congress on evolutionary computation*, Band 3, Seiten 1945–1950.
- Simon, H. (1957). *Models of Man: Social and Rational; Mathematical Essays on Rational Human Behavior in Society Setting*. Continuity in administrative science. Wiley.
- Simon, H. A. (1959). Theories of Decision-Making in Economics and Behavioral Science. *The American Economic Review*, 49(3):253–283.
- So, M. K. und Philip, L. (2006). Empirical analysis of GARCH models in value at risk estimation. *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, 16(2):180–197.
- Suganthan, P. N. (1999). Particle swarm optimiser with neighbourhood operator. In *Proceedings of the 1999 Congress on Evolutionary Computation-CEC99*, Band 3, Seiten 1958–1962.
- Taylor, S. J. (1994). Modeling stochastic volatility: A review and comparative study. *Mathematical finance*, 4(2):183–204.
- Taylor, S. J. (2005). *Asset Price Dynamics, Volatility, and Prediction*. Princeton University Press.
- Taylor, S. J. (2008). *Modelling financial time series*. world scientific.
- Tedeschi, G., Iori, G., und Gallegati, M. (2012). Herding effects in order driven markets: The rise and fall of gurus. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 81(1):82–96.

## LITERATURVERZEICHNIS

- Thaler, R. (1994). Psychology and Savings Policies. *American Economic Review*, 84(2):186–92.
- Tubbenhauer, T., Fieberg, C., und Poddig, T. (2021). Multi-agent-based VaR forecasting. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 131:104231.
- Turing, A. M. (1950). Computing Machinery and Intelligence. *Mind*, LIX(236):433–460.
- Tversky, A. und Kahneman, D. (1973). Availability: A heuristic for judging frequency and probability. *Cognitive Psychology*, 5(2):207–232.
- Tversky, A. und Kahneman, D. (1974). Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases. *Science*, 185(4157):1124–1131.
- Wald, A. und Wolfowitz, J. (1940). On a Test Whether Two Samples are from the Same Population. *The Annals of Mathematical Statistics*, 11(2):147–162.
- Watts, D. J. und Strogatz, S. H. (1998). Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*, 393(6684):440–442.
- Wilks, S. S. (1938). The Large-Sample Distribution of the Likelihood Ratio for Testing Composite Hypotheses. *The Annals of Mathematical Statistics*, 9(1):60–62.
- Wilks, S. S. (1962). *Modelling financial time series*. J. Wiley and Sons.
- Winker, P., Gilli, M., und Jeleskovic, V. (2007). An objective function for simulation based inference on exchange rate data. *Journal of Economic Interaction and Coordination volume*, 2:125 – 145.
- Wyart, M., Bouchaud, J.-P., Kockelkoren, J., Potters, M., und Vettorazzo, M. (2008). Relation between bid–ask spread, impact and volatility in order-driven markets. *Quantitative Finance*, 8(1):41–57.

- Zambrano-Bigiarini, M., Clerc, M., und Rojas, R. (2013). Standard particle swarm optimisation 2011 at cec-2013: A baseline for future pso improvements. In *2013 IEEE congress on evolutionary computation*, Seiten 2337–2344.
- Ziggel, D., Berens, T., Weiß, G. N., und Wied, D. (2014). A new set of improved value-at-risk backtests. *Journal of Banking & Finance*, 48:29–41.